

$$a|(b-c) \Leftrightarrow b \equiv c \pmod{a}$$

$$W_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = W_1^k$$



0.618

$$a+bi$$

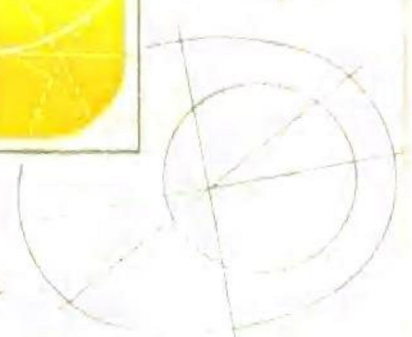
$$x^2$$

$$y=$$

0.618



单 樽



$$y=x^2$$

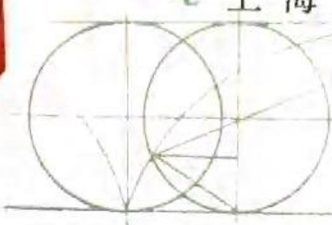
0.618

组合几何



$$y = \sin x$$

上海教育出版社



$$y=x^2$$

0.618

$$W_k$$

$$a+bi$$

组合几何

单 增

上海教育出版社

组 合 几 何
单 册

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

(邮政编码: 200031)

各地新华书店经销 上海市四印刷厂印刷

开本 787 × 1092 1/32 印张 7.75 字数 169,000

1996 年 6 月第 1 版 1996 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—3630 本

ISSN 7-5320-4772-5/G·4742 定价: 6.70 元

前 言

组合几何是组合学与几何学的孩子。它既禀承了组合学灵活的特性,又具有美丽的几何外形。

虽然几何学与组合学都已有数千年的历史,组合几何这个名称在本世纪中叶才被数学家 H. Hadwiger 首次使用。

组合几何中充满问题。有老问题,也有新问题;有彻底解决的,有部分解决的,更有完全未解决的。1964 年,标志组合几何学诞生的第一本专著, H. Hadwiger 等人合著的《平面组合几何》就是一本问题集。

这本小册子也是一本问题集。前面有八节,每节都有许多例题与问题,最后还有一节研究问题,一节未解决的问题。

节与节之间无前因后果的关系,而且除第一节(系统介绍一个问题)外,各节内部的例题亦无太多的联系。实际上组合数学,特别是组合几何,并无统一的方法,不同的问题往往需要不同的处理。这绝不意味组合几何是一盘散沙,这各具个性的问题与方法,恰好形成组合几何的鲜明的特点。正因为有众多的问题,而且没有固定的方法,组合几何吸引了许多数学家(包括专业与业余两方面)的浓厚兴趣。

我们选取问题的标准是初等与有趣,不求全面,只希望通过这本小册子的介绍,读者能领略到组合几何特有的魅力。

喜爱组合几何的读者,可以进一步参考 H. Orof, K.

Falconer 与 R. Guy 合著的《Unsolved Problems in Geometry》(Springer-Verlag 1991 年出版), 从该书可以查到大量有关的文献.

单 增

1995 年 5 月于南京师范大学

目 录

§ 1	Sylvester 问题	1
§ 2	凸集	49
§ 3	覆盖	80
§ 4	嵌入	100
§ 5	分解与拼补	124
§ 6	距离	161
§ 7	欧氏 Ramsey 定理	183
§ 8	竞赛问题	202
§ 9	研究问题	235
§ 10	未解决的问题	239

§ 1 Sylvester 问题

“他瘦得像欧几里得的一条直线。”

——高尔斯华绥《福尔赛世家》

这一节讨论一些与直线有关的问题。其中，最主要的一个是英国数学家 J. J. Sylvester (1814—1897) 提出的 (例 1)。

数学史家 Bell 的名著《数学精英》(Man of Mathematics)，描绘了从古至今的三十多位数学家，Sylvester 就是其中的一位。

Sylvester 多才多艺。他 25 岁时就因数学上的成就被选为英国皇家学会会员。后来做过保险公司的统计员，律师，教授。在他当统计员时，兼做私人教师，鼎鼎大名的南丁格尔护士就是其学生之一。在他当律师时，与 Cayley 一起建立了代数不变量的理论。1870 年他因“超龄”从教授职位退休后，出版了一本《诗律》。而后，在 62 岁时他又飞越大西洋，到美国霍普金斯大学重新执教。他毕生从事数学研究，“几乎任一个数学领域都给了他一个足资发现的迷人的世界”。

1893 年，Sylvester 在《教育时报》杂志 (Educational Times) 上提出一个几何问题，即下面的例 1。

例 1 证明不可能在平面上放有限多个点，使得每一条

过其中两点的直线都过第三个点, 除非这些点全在同一条直线上.

换句话说, 如果在平面上给出 n 个点, 并且过每两点的直线通过第三个点, 那么这 n 个点在一条直线上.

稍后刊登的解答是不正确的. 或许 Sylvester 本人有正确的解答, 但没有能保存下来. 直到 1933 年, Karamata 与 Erdős 重新提出这个问题, T. Gallai 才成功地给出证明, 但推导相当复杂. 后来, 出现了许多不同的证明与推广.

这里先介绍三个证明.

证明 1 n 个点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 至多组成 O_n^2 条直线. 如果每条直线 $P_i P_j$ 外都有已知点, 那么这点到 $P_i P_j$ 的距离大于 0. 这些大于 0 的距离(有限多个)中必有一个最小. 不妨设 P_1 到 $P_2 P_3$ 的距离最小.

设 P_1 在 $P_2 P_3$ 上的射影为 Q . 由已知, $P_2 P_3$ 上还有一个已知点 P_4 . P_2, P_3, P_4 三点中必有两点在 Q 的同侧, 不妨设 P_2 在 Q, P_3 之间. 这时直角三角形 $P_1 Q P_3$ 的斜边 $P_1 P_3$ 上的高 $QE < QP_3$ 上的高 $P_1 Q$, 从而 P_2 到 $P_1 P_3$ 的距离 $\leq QE < P_1 Q$ (图 1.1), 与 $P_1 Q$ 的最小性矛盾.

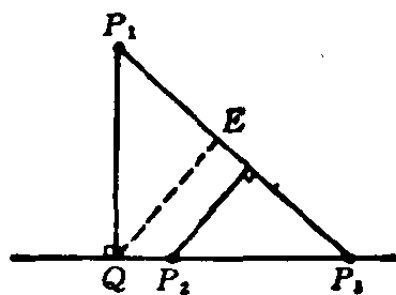


图 1.1

因此, n 个已知点必须在一条直线上.

这个证明属于 L. M. Kelly. 大概是最简单, 最优雅的一个. 不过这个证明利用了距离的概念. 下面的证明仅利用点与线的关系.

证明 2 首先 Sylvester 问题可改述为这样的形式:

如果 n 个点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 不共线, 那么至少有一条直线恰过其中两个点.

不妨设 P_1, P_2, P_3 不共线. 过 P_1 与其他已知点的直线至多 $n-1$ 条, 与直线 P_2P_3 的交点至多 $n-1$ 个. 因此, 可在 P_2P_3 上取一点 Q 不是上述交点, 从而直线 P_1Q 上仅含一个已知点 P_1 .

直线 $P_iP_j (1 < i < j \leq n)$ 至多 C_{n-1}^2 条, 它们与 P_1Q 的交点(包括 P_1 与 Q 在内)至多 C_{n-1}^2 个, 因此其中必有一点 A , 在线段 P_1A 内没有其他交点(A 可能与 Q 重合). 设 A 是直线 P_4P_5 与 P_1Q 的交点. 如果 P_4P_5 上没有其他已知点, 那么结论成立. 否则设 P_6 在直线 P_4P_5 上. P_4, P_5, P_6 三个点中至少有两个在 A 点同侧. 不妨设线段 AP_5 含有 P_4 , 不含 P_6 (图 1.2).

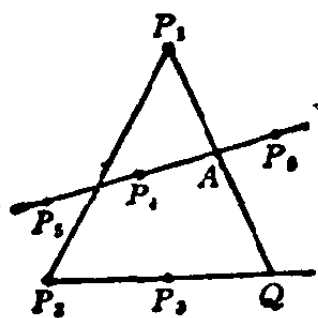
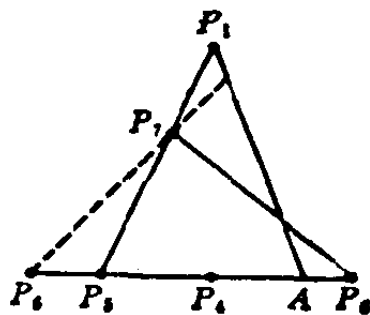
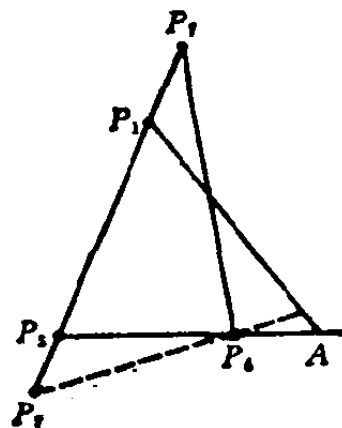


图 1.2



(a)



(b)

图 1.3

我们断言直线 P_1P_5 上没有其他的已知点. 假设有 P_7 在直线 P_1P_5 上, 那么当 P_7 在线段 P_1P_5 内时, 直线 P_6P_7 与线段 AP_1 有公共点(图 1.3(a)); 当 P_7 在线段 P_1P_5 外时, 直线 P_4P_7 与线段 AP_1 有公共点(图 1.3(b)), 均与 A 的定义不符.

因此直线 P_4P_5 或 P_1P_5 上没有其他的已知点.

证明 3 这个证明借助于立体几何.

设平面 M 上 $n (\geq 3)$ 个点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 不全共线.

在平面 M 外任取一点 O , 考虑所有形如

$$\lambda_1 \overrightarrow{OP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{OP_n}, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 (i=1, 2, \dots, n)$$

的向量 $\overrightarrow{OP}$. 它的端点 P 组成一个凸多面体, 每一个面都是中心对称的多边形, 并且与某条直线 $P_{j_1}P_{j_2}$ 平行, 它的边分别与 $OP_{j_1}, OP_{j_2}, \dots, OP_{j_s}$ 平行, $P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_s}$ 是直线 $P_{j_1}P_{j_2}$ 上的全部已知点(注).

由 Euler 定理

$$v - e + f = 2,$$

其中 v, e, f 分别是这个多面体的顶点、棱与面的个数.

在每个顶点处至少有 3 条棱, 所以

$$3v \leq 2e.$$

与上式结合消去 v 得

$$\frac{2}{3}e - e + f \geq 2,$$

即

$$2e \leq 6(f - 2),$$

从而有一个面的边(棱)数 $\leq \frac{2e}{f} \leq \frac{6(f-2)}{f} < 6$.

注意这个多面体的面都是中心对称的多边形, 所以必有一个面是平行四边形, 这时与这个平面平行的直线 P_1P_2 上只有 P_1, P_2 两个已知点(OP_1, OP_2 分别与平行四边形的边平行).

这个证明显示不仅低维(平面)的问题可以向高维(空间)推广, 而且高维空间可以用来解决低维的问题. 本书不准备多举这样的例子, 因为三维空间已经不如平面的图形直观, 更不必说须凭借想象的 n 维空间了.

注 当 $n=3$ 时, P 点组成的立体是以 OP_1, OP_2, OP_3 为棱的平行六面体. 假设结论对 n 成立, P 点组成一个所述

的凸多面体, 将它的每个点依向量 $\overrightarrow{OP}_{n+1}$ 平移. 所有与 $\overrightarrow{OP}_{n+1}$ 平行的面, 如图 1.4(a), 多边形 $ABODEF$ 成为 $ABOC'D'E'F'$, 边数增加 2, 它仍然中心对称, 新的中心由原中心平移 $\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}_{n+1}$, 这时 P_{n+1} 在与面 $ABCD$ 平行的直线 P_1P_1 上. 对不与 $\overrightarrow{OP}_{n+1}$ 平行的面, 可设想 $\overrightarrow{OP}_{n+1}$ 为(平行的)一束光线, 被照到的面, 如图 1.4(b)中的 $ABOD$, 仍为新立体的面. 不被照到的面, 如 $EFGH$, 它平移后成为新立体的面 $E'F'G'H'$. 新立体 $ABODEHGB'O'D'E'F'G'H'$ 还有一些与 $\overrightarrow{OP}_{n+1}$ 平行的面. 它是凸的(参见下节例 1).

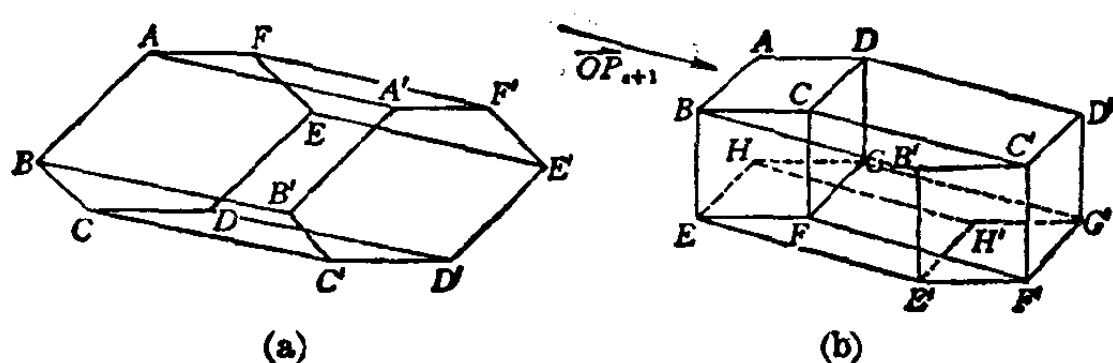


图 1.4

在后面, 我们还会说到例 1 的推广与加强(因而也给出了例 1 的新的证明).

这里先说一个例 1 的应用.

例 2 如果平面上 n 个点不全共线, 那么它们中每两点所确定的直线至少有 n 条.

证明 用数学归纳法. 当 $n=3$ 时, 结论显然成立.

假设结论对 n 成立. 考虑 $n+1$ 个点 $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$. 这些点不全在一条直线上, 所以根据例 1, 必有一条直线恰过其中两个点, 不妨设直线 P_1P_{n+1} 上没有其他的点 P_i ($2 \leq i \leq n$).

如果点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 不在一条直线上, 由归纳假设, 至少有 n 条直线, 每条过 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 中两个或更多个点, 这些直线均不同于 P_1P_{n+1} , 所以连同 P_1P_{n+1} , 至少有 $n+1$ 条直线.

如果点 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 在一条直线 s 上, 那么 $P_1P_{n+1}, P_2P_{n+1}, \dots, P_nP_{n+1}$ 及 s 为 $n+1$ 条不同的直线.

因此命题成立.

显然 n 个点中有 $n-1$ 个共线时, 不同的直线恰有 n 条. 如果其中至多有 $n-2$ 个点共线, Erdős 猜想在 n 充分大时, 至少有 $2n-4$ 条不同的直线. 这个猜想是正确的, 见例 23.

以下, 为简便起见, 称至少过两个已知点的直线为连结直线. 恰过两个已知点的直线为 Gallai 直线或 G 直线.

例 1 可叙述成:

如果 n 个已知点不在同一条直线上, 那么至少有一条 G 直线.

换句话说, 设 g 为 G 直线的条数, 那么 $g \geq 1$.

这一结论大有改进的余地. 请看后面的例 8~例 11.

在欧氏平面中, 每两点确定一条直线, 但每两条直线不一定都有交点. 为了消除这种缺陷, 我们引进实射影平面 P^2 (P 表示射影, 2 表示二维空间即平面).

约定欧氏空间中的平行直线 l_1, l_2 “相交于” 一个 “无穷远点” P_∞ , 凡与 l_1 平行的直线均过 P_∞ , 所有的无穷远点在一条 “无穷远直线” l 上. 这样, 每两条直线均恰有一个交点, 即在原来意义上相交的直线交于普通的点, 平行的直线相交于无穷远点.

P^2 中的点还可以用齐次坐标 (x, y, z) 表示, 其中 x, y, z 是不全为 0 的实数. 对于非零实数 k , (kx, ky, kz) 与

(x, y, z) 表示同一个点.

当 $z \neq 0$ 时, (x, y, z) 就是欧氏平面中的点 $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$. 当 $z=0$ 时, (x, y, z) 是新增加的无穷远点.

例如欧氏平面中的原点 $(0, 0)$, 在 P^2 中可写成 $(0, 0, z)$, 其中 $z \neq 0$.

欧氏平面中的直线 $ax+by+c=0$ (a, b 不全为 0) 可写成齐次形式

$$ax+by+cz=0. \quad (1)$$

因此, 在 P^2 中, 直线与点一样, 也可以用三元齐次坐标 (a, b, c) 表示, 其中 a, b, c 不全为 0. 当 $a=b=0$ 时, 直线 (1) 成为 $z=0$, 它代表无穷远直线.

由于在 P^2 中, 点与直线是对偶的(每两点确定一条直线, 每两条直线确定一个点), 所以有很多对偶的命题, 即将命题中的点与直线互换产生的命题. 如果原命题成立, 那么对偶命题也成立. 这称为对偶原理.

例如, 由例 1, 我们得到:

在 P^2 中, 如果 n 条直线不交于一点, 那么必有一点, 恰在两条已知直线上.

P^2 与欧氏平面当然有些不同. 例如在欧氏平面中, 任一点 P_1 将过它的直线 l 分为两个部分(两条以 P_1 为端点的射线), 而在 P^2 中, 点 P_1 并不能将 l 分为两个部分, 从 P_1 沿 l 向“东”前进, 最后将通过 P_∞ . 在“西”边出现, 又回到 P_1 . 要将 l 分成两部分, 必须在 l 上取两个点 P_1, P_2 (图 1.5(a)). 直线 l 被分成有限线段 P_1P_2 与含无限远点的无限线段 P_1P_2 .

类似地, 直线 l 将欧氏平面分为两个部分: 上半平面与下

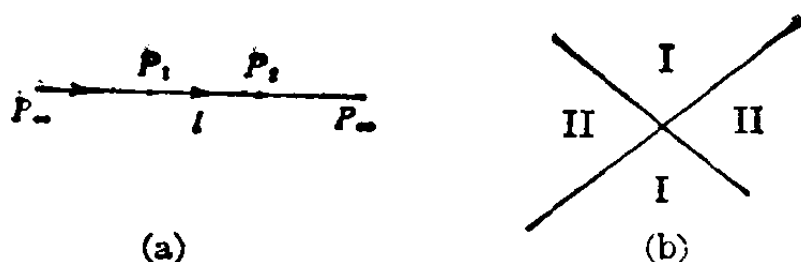


图 1.5

半平面, 而在 P^2 中, l 不能将 P^2 分成两个部分. 在图 1.5(b) 中, 两条直线将欧氏平面分为四个部分, 而在 P^2 中, 两条直线将它分为两个部分: I 与 II , 因为每一个对顶角是连通的.

例 3 n 条一般位置的直线, 即每两条互不平行, 每三条不共点的直线, 将欧氏平面分成多少个区域(连通部分)? 其中有多少个是有限的?

解 结论是共有

$$R = 1 + n + O_n^2 = 1 + O_{n+1}^2 \quad (2)$$

个区域, 其中

$$R' = O_{n-1}^2 \quad (3)$$

个是有限的.

上述结论是 J. Steiner 在 1826 年首先证明的.

(2) 可以用归纳法, 奠基 ($n=1$) 是显然的. 设 (2) 成立, 增添一条直线 l 后, l 被原有的 n 条直线分为 $n+1$ 段, 每一段将原来的一个区域分为两个区域, 因而增加了 $n+1$ 个区域, 共有

$$1 + n + O_n^2 + (n+1) = 1 + (n+1) + O_{n+1}^2$$

个区域. 因此, (2) 对一切自然数 n 均成立.

为了证明 (3), 只需作一个充分大的圆包含这 n 条直线的所有交点. 这时, 每条直线与圆有两个交点, n 条直线将圆

分成 $2n$ 份, 每一份恰属于上述 R 个区域中的一个无限区域, 每个无限区域也恰好含一份圆弧. 因此无限区域的个数是 $2n$. 有限区域的个数

$$R' = R - 2n = 1 - n + O_n^2 = O_{n-1}^2.$$

例 4 n 条一般位置的直线将 P^2 分为多少个区域?

解 这里一般位置指每三条直线不共点(在 P^2 中, 没有平行直线与相交直线的差别).

由上例, 欧氏平面中有 O_{n-1}^2 个有限区域, 它们也是 P^2 中的(互不连通的)区域. 欧氏平面中有 $2n$ 个无限区域, 每两个(属于某一个对顶角)相连通, 因而是 P^2 中的 n 个(含无穷远点的)区域. 于是共有

$$O_{n-1}^2 + n = 1 + O_n^2 \quad (4)$$

个区域.

如果直线不处于一般位置, 那么上面的公式需适当修正. S. Roberts 1889 年得出下面的(5). 这公式在 1963 年又被重新发现.

例 5 设在欧氏平面中有 n 条直线, 其中有 $\lambda_i (\geq 3)$ 条相交于同一点 ($i=1, 2, \dots, k$), μ_j 条互相平行 ($j=1, 2, \dots, h$), 则这些直线将欧氏平面分为

$$R = 1 + n + O_n^2 - \sum_{i=1}^k O_{\lambda_i-1}^2 - \sum_{j=1}^h O_{\mu_j}^2 \quad (5)$$

个区域, 其中有限的区域

$$R' = \max(1 - n + O_n^2 - \sum_{i=1}^k O_{\lambda_i-1}^2 - \sum_{j=1}^h O_{\mu_j}^2, 0) \quad (6)$$

个.

对于(5), 这里给出两个证明.

证明 1 对 n 进行归纳. 奠基显然. 设(5)对 n 条直线

成立, 考虑第 $n+1$ 条直线 l , 先设 l 与前 n 条直线均相交.

在(5)中, 可以认为 $\sum_{i=1}^k$ 包括 $\lambda_i=2$ 的情况 (这时 $O_{\lambda_i-1}^2=0$). 我们将相应的交点 P_i 在 l 上的情况记为 Σ_1 , P_i 不在 l 上的情况记为 Σ_2 , 并令

$$\lambda'_i = \begin{cases} \lambda_i + 1, & \text{若 } i \in \Sigma_1; \\ \lambda_i, & \text{若 } i \in \Sigma_2. \end{cases} \quad (7)$$

设 l 被前 n 条直线分为 m 段, 则

$$n+1 = m + \sum_1 (\lambda_i - 1). \quad (8)$$

(若 l 不过各直线的交点, 则它被分为 $n+1$ 段; 若 l 过交点 P_i , 并且前 n 条直线中有 λ_i 条过 P_i , 则段数减少 $\lambda_i - 1$.) 因为每一段表示增加一个区域, 所以共有区域

$$\begin{aligned} & 1 + n + O_n^2 - \sum O_{\lambda_i-1}^2 - \sum O_{\mu_j}^2 + m \\ &= 1 + n + O_n^2 - \sum O_{\lambda_i-1}^2 - \sum O_{\mu_j}^2 + (n+1) - \sum_1 (\lambda_i - 1) \\ &= 1 + (n+1) + O_{n+1}^2 - \sum_1 (O_{\lambda_i-1}^2 + O_{\lambda_i-1}^1) \\ &\quad - \sum_2 O_{\lambda_i-1}^2 - \sum O_{\mu_j}^2 \\ &= 1 + (n+1) + O_{n+1}^2 - \sum_1 O_{\lambda'_i-1}^2 - \sum_2 O_{\lambda'_i-1}^2 - \sum O_{\mu_j}^2 \\ &= 1 + (n+1) + O_{n+1}^2 - \sum O_{\lambda'_i-1}^2 - \sum O_{\mu_j}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

如果 l 与前 n 条直线中 μ_h 条平行, 那么 l 被分成的段数减少 μ_h , 平面被分成的区域比(9)减少 μ_h , 因而区域共

$$\begin{aligned} & 1 + (n+1) + O_{n+1}^2 - \sum O_{\lambda'_i-1}^2 - \sum O_{\mu_j}^2 - O_{\mu_h}^1 \\ &= 1 + (n+1) + O_{n+1}^2 - \sum O_{\lambda'_i-1}^2 - \sum O_{\mu'_j}^2. \end{aligned} \quad (10)$$

个, 其中

$$\mu'_j = \begin{cases} \mu_j, & j=1, 2, \dots, h-1; \\ \mu_{j+1}, & j=h. \end{cases} \quad (11)$$

如果 l 与前 n 条直线中 1 条平行, 这可以看成上款的特

例, 因为可令 $\mu_n = 1$ (这时 $O_{\mu_n}^2 = 0$).

于是, (5) 对一切自然数 n 成立.

证明 2 取一条直线 b 不与已知的 n 条直线平行. 这直线称为横扫直线.

横扫直线 b 的初始位置远离上述 n 条直线的交点. 因此, 它被这 n 条直线分为 $n+1$ 段 (两条射线, $n-1$ 条线段), 每段各属一个区域, 共 $n+1$ 个区域.

平移 b . b 首先横扫上述的 $n+1$ 个区域. 当 b 通过一个 λ_i 重点 P_i (即过 P_i 有 λ_i 条已知直线) 时, 它横扫的区域增加 $\lambda_i - 1$ 个 (例如 图 1.6 中, b 过 4 重点 P 后, 横扫的区域增加了 I、II、III 三个). 于是, 在 b 横扫整个平面时, 共横扫了

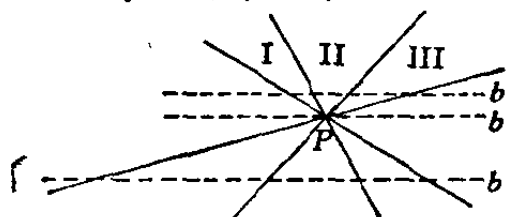


图 1.6

$$1 + n + t + \sum_{i=1}^k (\lambda_i - 1) \quad (12)$$

个区域, 其中 t 是二重点的个数, $\lambda_i \geq 3$ ($i = 1, 2, \dots, k$). (12) 也就是 n 条直线将平面分成的区域数 R .

现在, 设法定出二重点 (两条直线的交点) 的个数 t .

为此, 考虑直线对. 显然有

$$s_1 = t + \sum O_{\lambda_i}^2 \quad (13)$$

对两两相交的直线, 又有

$$s_2 = \sum O_{\mu_j}^2 \quad (14)$$

对两两不相交的直线. 因为

$$O_n^2 = s_1 + s_2, \quad (15)$$

所以

$$t = O_n^2 - \sum O_{\lambda_i}^2 - \sum O_{\mu_j}^2. \quad (16)$$

将 (16) 代入 (12) 得