

PHYSICS

中国科学技术大学 主编
物理辅导班
张永德等 审校

美国物理
试题与解答

6

量子力学

中国科学技术大学出版社

美国物理试题与解答

第六卷 量子力学

中国科学技术大学物理辅导班 主编

张永德 朱栋培 范洪义 审校

中国科学技术大学出版社

1987·合肥

内 容 提 要

《美国物理试题与解答》丛书按学科范畴分为七卷。该丛书收集了美国加利福尼亚大学伯克利分校、纽约州立大学布法罗分校、芝加哥大学、哥伦比亚大学、麻省理工学院、普林斯顿大学和威斯康星大学的研究生入学试题，以及丁肇中博士招收的高能实验物理博士研究生试题2550道。同时收集1980—1985年中国赴美物理博士入学资格考试（CUSPEA）物理试题100道，并逐一作了解答。这些试题面广义新，思路灵活，所用的数学工具虽不繁难，但却十分注重物理思想和实际应用，其方法和结论往往较为简单和实用。在一定程度上反映了美国物理教学的精华，对我国的物理教学也有借鉴和启迪作用。

本卷收集量子力学试题380道。可供我国大学物理系师生使用。对于准备攻读硕士、博士学位的研究生和留学生，更是一本难得的参考书，对于中学物理教师的进修，也有一定的参考价值。

美 国 物 理 试 题 与 解 答

第六卷 量子力学

中国科学技术大学物理辅导班 主编

张永德 朱栋培 范洪义 审校

责任编辑：董川东 封面设计：何燕明

※

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号）

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行 各地新华书店经售

※

开本：787×1092毫米 1/32 印张 21 字数：471 千

1987年6月第一版 1987年6月第一次印刷

印数：1—15000册

ISBN 7—312—00033—9/O·6 统一书号：13474·6 定价：4.30元

GF37/05

序

这套习题集，是从美国各大学物理系的教学及考试材料中筛选而来的。编辑它的目的是为了给从事物理教学的老师以及学习物理的学生提供一份较完整的美国物理习题素材。所谓完整，有两方面的含义：一是包含基础物理的各门课程的习题；一是较全面地整理了美国物理教学的用题，因此，这套集子可以直接用于教学，也可以用来研究美国的物理教学内容更新的趋势。无疑，这两种功效，都有助于我们的物理教学跟上物理前沿的发展。

在各种科学著作中，习题集的地位可能是“最低”的了。因为，它不是教科书，不是论文集，更不是专著。几乎没有因编习题集而出名的作者。这本习题集的原始材料尽管来自美国，但编辑、整理、作解答等工作仍是十分繁重的。中国科学技术大学许多物理教师为此付出了大量的劳动。这些劳动苦而无“名”，但却是很值值的。

作习题是学习过程中的一环。对于学习数学、物理来说，更是必不可少的一环。许多科学大师都曾津津乐道于他们早年在习题中的受益。虽然作习题本身不是科学研究，但它对研究能力的养成，却有重要作用。索末菲曾写信给他的学生海森堡，告诫他：

要勤奋地去做练习，只有这样，你才会发现，
哪些你理解了，哪些你还没有理解。

杨振宁也曾如下回忆他的大学学习：

西南联大教学风气是非常认真的，我们那时所念的课，一般老师准备得很好，学生习题做得很多。

的确，“勤奋地去做练习”、“习题做得很多”，往往是达到成功的一个阶梯。正是由于这一点，许多教师愿意将自己的精力和心血用在这似乎是“最低”的工作上。

第一个教师节刚刚过去。我想，对于一题一题地编辑和整理的教师来说，他们所在意的并不是目前的“最低”或“最高”，只要用过这本习题集的学生，以后也有类似于上述那样的回忆，那么，编辑习题的劳动，就算有了最大的慰藉。

方励之

1985年9月18日

前 言

习题是锻炼思维的体操，而试题又往往是习题中的精粹。解答物理题是物理课程学习中必要而又重要的环节。

这套《美国物理试题与解答》是一部丛书，分七卷。各卷名称及审校人如下：第一卷，力学（强元桢、顾恩普、程稼夫、李泽华、杨德田）；第二卷，电磁学（赵叔平、尤峻汉、朱俊杰）；第三卷，光学（白贵儒、郭光灿）；第四卷，原子物理学、核与粒子物理学（杨保忠、金怀诚）；第五卷，热力学与统计物理学（郑久仁）；第六卷，量子力学（张永德、朱栋培、范洪义）；第七卷，相对论、固体物理学及其他（张家铝、周又元、章世玲）。《丛书》大体上包括了大学物理课程的全部内容。

《丛书》从美国七所大学近十年来研究生入学试题（包括 Qualifying Exam）以及其他几类试题共 3100 道中，筛选了 2550 道，除了个别题外我们均给了解答。试题来源及其代号是：哥伦比亚大学（Col）；加利福尼亚大学伯克利分校（Ber）；麻省理工学院（MIT）；威斯康星大学（Wis）；芝加哥大学（Chi）；普林斯顿大学（Pri）；纽约州立大学布法罗分校（Buf）；中美联合招收赴美攻读物理博士生考试试题（CUSPEA）；丁肇中招收实验高能物理博士生试题（CCT）。

一般地说，美国的物理试题，涉及的数字并不繁难，但却或多或少具有以下三方面的特色：内容新颖，富于“当代

感”，思路灵活，涉及面宽阔；方法和结论往往简单而实用。一些题分别涉及了不少新兴课题和边沿交叉区域；有不少题是拟题者直接从科研工作中摘取的；再有不少题本身似乎显得粗糙但却抓住了物理本质，显得“物理味”很足。纵观这些，我们深切地感到，这些题目的集合在一定程度上体现了美国科学文化的个性及其思维方式上的特色。

惟其如此，我们认为，不憚繁重，集近百人的努力，将它们收集后一一解答是值得的。它们也许会对我国大学和研究生物理学科的教学和赴美考试起到一定的参考作用，对推动我国大学物理教学更新起到一点促进作用。

参加这套丛书解题的人数很多，其中主要的共70余人，参加各卷审校的共19名。为向读者负责，每道题后均注明了解题人姓名。

编审中，我们仅仅删去了部分很常见、很平淡的题以及一些没有什么意义的题（后者比如，纽约年平均气温是多少等等）。同时，为了节省篇幅，不得不放弃了英文原题。

由于丛书篇幅大、涉及面广、参加解答和审校的人多、工作时间短，加之我们水平有限，因此，错误或不当之处在所难免，请读者批评指正。

本卷收集试题380道，按问题的主要内容分为8篇，各篇名称见目录。其中，第一篇72道，第二篇23道，第三篇48道，第四篇16道，第五篇83道，第六篇61道，第七篇37道，第八篇40道。

本卷所收的试题，就其内容深度而言，除个别题外，均含于我国大学量子力学通用教材之内；但就其广度、灵活性而言，已超出我们所常见。特别是它引进、吸收了部分当代科研成果，接触了一些当前活跃的课题，因而这将不仅有利于

学习已经成熟的理论和知识，而且能开阔思路、活跃学术气氛，有利于促进教学与科研相结合。

承担本卷解题的有任勇、戴铁生、肖旭东、周苏闽、王力军、何小东、孟国武、斯其苗、袁卡佳、何广梁、缪凌、唐绍祥、张洪、陈一新、杨仲侠、宁铂等人。其中，何广梁、袁卡佳、缪凌、宁铂和任勇所解的题的一审工作由朱栋培负责，唐绍祥、张洪的一审及周苏闽、何小东、斯其苗、肖旭东的一审二审工作由范洪义负责；其余部份由张永德负责。另外，戴铁生、曾树祥协助编审者做了部份一审和抄写工作，在此谨表示感谢。

编审者谨识

1986年6月15日

目 录

序.....	方励之(i)
前言.....	(iii)
第一篇 基本原理与一维运动 (1001—1072)	(1)
第二篇 中心势 (2001—2023)	(109)
第三篇 自旋与角动量 (3001—3048)	(151)
第四篇 在电磁场中运动 (4001—4016)	(227)
第五篇 微扰论 (5001—5083)	(261)
第六篇 散射与量子跃迁 (6001—6061)	(415)
第七篇 少体与多体 (7001—7037)	(533)
第八篇 杂题 (8001—8040)	(593)

第一篇 基本原理与 一维运动

(1001—1072)

1001 (Wis, 1981)

在宏观世界里，量子现象常常可以忽略。对下列诸情形，在数值上加以证明，a) 长 $l = 1\text{m}$ ，质量 $m = 1\text{kg}$ 的单摆的零点振荡的振幅。b) 质量 $m = 5\text{g}$ 以速度 $10\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ 向一刚性障碍物（高 $H = 5\text{cm}$ ，宽 $w = 1\text{cm}$ ）运动的子弹的透射几率。c) 质量 $m = 0.1\text{kg}$ 以速度 $v = 0.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 运动的钢球被尺寸为 $1 \times 1.5\text{m}^2$ 窗子所衍射。

解：a) 由谐振子理论 $\bar{V} = \frac{1}{2}E$ ，得： $\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{4}\hbar\omega$ ，

其中， A 为对应零点能的均方根振幅，所以

$$A = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 0.41 \times 10^{-17}\text{m}.$$

可见宏观振子的零点振荡实际上是没有的。（当然， A 也可用 $\sqrt{\langle\psi_0|x^2|\psi_0\rangle}$ 求得）

b) 如果把障碍物的宽度看成势垒的厚度，子弹透射看成是越过障碍物所设置的重力势垒，则透射几率

$$T \approx \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m\left(mgH - \frac{1}{2}mv^2\right)} w\right\}$$

$$= \exp \left\{ -\frac{2m\omega}{\hbar} \sqrt{2gH - v^2} \right\},$$

$$\frac{2m\omega}{\hbar} \sqrt{2gH - v^2} \approx 0.9 \times 10^{30},$$

即 $T \approx e^{-0.9 \times 10^{30}} \approx 0$

可见子弹的透射几率实际上为零。

c) 入射钢球的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \approx 1.3 \times 10^{-30} \text{ cm}.$$

方形窗的水平方向和垂直方向的衍射角分别为

$$\theta \approx \frac{\lambda}{D} \approx 1.3 \times 10^{-32} \text{ rad}, \quad \theta \approx \frac{\lambda}{L} \approx 0.9 \times 10^{-32} \text{ rad}.$$

可见实际上两个方向均没有衍射现象。

(孟国武)

1002 (Ber, 1976)

用 $\hbar$, e , c , m = 电子质量, M = 质子质量表示下列每个量。给出粗略的数值估计。a) 玻尔半径 (cm). b) 氢原子的结合能 (eV). c) 玻尔磁子 (选择你自己的单位). d) 电子的康普顿波长 (cm). e) 经典电子半径 (cm). f) 电子静止能量 (MeV). g) 质子静止能量 (MeV). h) 精细结构常数. i) 典型的氢原子精细结构分裂 (eV).

解: a) $a = \hbar^2 / me^2 = 5.2917 \times 10^{-9} \text{ cm}.$

b) $E = me^4 / 2\hbar^2 = 13.605 \text{ eV}.$

c) $\mu_B = e\hbar / 2mc = 9.273 \times 10^{-21} \text{ erg} \cdot \text{Gs}^{-1}.$

d) $\lambda = 2\pi\hbar / mc = 2.4262 \times 10^{-10} \text{ cm}.$

e) $r_e = e^2 / mc^2 = 2.8178 \times 10^{-13} \text{ cm}.$

f) $E_e = mc^2 = 0.511 \text{ MeV}.$

$$g) E_p = Mc^2 = 938.26 \text{ MeV}.$$

$$h) \alpha = e^2 / \hbar c = 7.297 \times 10^{-3} \approx 1/137.$$

$$i) \Delta E = e^4 mc^2 / 8\hbar^2 c^4 = \frac{1}{8} \alpha^4 mc^2 = 1.8 \times 10^{-4} \text{ eV}.$$

(唐绍祥)

1003 (Ber, 1975)

导出、估计、猜测或背出下列数值，精确到一个数量级范围内。
 a) 电子的康普顿波长.
 b) 电子的汤姆逊截面.
 c) 氢原子的玻尔半径.
 d) 氢原子的电离能.
 e) 氢原子中基态能级的超精细分裂能量.
 f) ${}^7\text{Li}$ ($Z=3$) 核的磁偶极矩.
 g) 质子和中子质量差.
 h) 自由中子的寿命.
 i) He^4 核的束缚能.
 j) 最大稳定核的半径.
 k) π^0 介子的寿命.
 l) μ^- 介子的寿命.

$$\text{解: } a) \lambda_c = h/m_e c = 2.43 \times 10^{-2} \text{ \AA}.$$

$$b) \sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.56 \times 10^{-31} \text{ m}^2.$$

$$c) a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0.53 \text{ \AA}.$$

$$d) I = \frac{e^2}{2a} = 13.6 \text{ eV}.$$

$$e) \Delta E_{\text{精}} \approx 13.6 \times \left(\frac{1}{137}\right)^2 \approx 10^{-4} \text{ eV}.$$

$$\Delta E_{\text{超}} \approx \frac{\Delta E}{10^3} \approx 10^{-7} \text{ eV}.$$

$$f) \mu = 1.67 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}.$$

$$g) \Delta m = m_p - m_n = -2.3 \times 10^{-30} \text{ kg}.$$

h) $\tau_{\alpha} \approx 15 \text{ min} = 9 \times 10^2 \text{ s}.$

i) $E = 4 \times 7 = 28 \text{ MeV}.$

j) r 在核力范围内, $r \approx 1.4 A^{1/3} \text{ fm}.$

$$r \approx 1.4 \times (100)^{1/3} \approx 6.5 \text{ fm}.$$

k) $\tau = 0.828 \times 10^{-16} \text{ s}.$

l) 衰变是弱相互作用过程. $\tau = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}.$

(戴铁生)

1004 (Wis, 1974)

从下列实验中的两个实验能了解到辐射或力学体系的量子化的什么性质? a) 光电效应. b) 黑体辐射谱. c) 夫兰克—赫兹实验. d) 戴维孙—革末实验. e) 康普顿散射. 详细描述所选的实验, 指出测量到的哪个效应是非经典的, 说明原因并用量子概念解释之, 给出适当方程.

解: a) 光具有粒子性. 即光由光子 (或光量子) 组成. 光子的能量只能一份份的吸而不能部分被吸收. 实验参看姚启钧著《光学教程》§ 8—5 与 § 8—6 (pp. 403~410). 非经典效应: 每个金属材料, 均存在某一频率 ν_0 , 仅当光频 $\nu > \nu_0$ 时, 才有光电子被打出. 这是因光子只能整个被吸收, 光子能量 $h\nu$, 只有当 $h\nu$ 大于电子脱出功 A 时, 电子才有可能被击出, 其动能为

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - A.$$

b) 电磁辐射只能以“量子”的方式进行. 即辐射场由光量子组成. 光量子能量 $h\nu$. 实验参看姚启钧著《光学教程》§ 8—2 与 § 8—3 (pp. 369—401). 用光量子概念可得普朗克公式

$$E_{\nu} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

它正确地描述了黑体辐射谱,解决了经典电磁理论的困难.

c) 原子中有能级存在. 实验参看褚圣麟编《原子物理学》§2—5 (pp. 42~45). 电子被加速, 当电子能量达到一组固定的值时, 实验中测得的电流突然变小, 这是非经典效应. 当电子能量达到原子第一激发态与基态的能量差时, 电子与原子碰撞, 电子有可能把自己获得的全部能量传递给原子, 使原子激发. 从而电流减小 (动能小的电子对电流无贡献).

d) 电子具有波动性, 从而说明物质的波粒二象性. 实验参看褚圣麟《原子物理学》§3—1 (pp. 78~82). 电子是德布罗意波, 波长为 $\lambda = h/p$, 具有波动性, 所以有衍射. 用电压 V 加速电子,

$$\lambda = h/\sqrt{2meV}, \quad n\lambda = 2d\sin\theta,$$

θ 方向是波束出射方向.

e) 光具有粒子性. 实验见姚启钧著《光学教程》§8—7 (pp. 410~415). 当 X 射线和 γ 射线与电子相互作用时, 所产生的实验现象不能用经典波动理论解释. 只有把这种光看成光子, 具有粒子性它和电子发生弹性碰撞, 才能解释. 波长的变化为

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (\text{戴铁生})$$

1005 (Wis, 1976)

在量子力学产生之前, 一个大的理论问题是如何防止原子发光, 解释之. 在量子力学产生之后, 一个大的理论问题

是如何使处于激发态的原子发光，解释之。是什么使激发态发光？

解：在量子力学产生之前，根据原子的行星模型，电子一般绕核作椭圆运动，由经典电动力学知，加速运动的带电粒子必伴随着辐射，也即原子必定发光。这时电子不断损失能量，最后要落到核上，但事实是电子并不落到核上，基态原子稳定并不发光。

在量子力学产生之后，根据量子力学基本原理，若无外界作用，原子的哈密顿量是不含时的，处于激发态（仍是定态！）的原子应永远处于该激发态，即处于激发态的原子不会自行发光。但实际上原子会自发辐射。

根据量子电动力学，辐射场和原子中的电子形成两个量子力学系统，它们之间的相互作用包含了单光子产生算子 a^+ 项，这项即使在初始无光子时也不为零。正是这种相互作用使激发态原子发光，产生自发辐射。（孟国武）

1006 (Col, 1983)

考虑如下实验：一束电子射向刻有 A 、 B 两缝的平板，板外是一装有检测器阵列的屏幕。利用检测器能定出电子撞击屏幕的位置。在下列各种情形下，画出入射电子强度随屏幕位置变化的草图，给出简单解释。

a) A 缝开启， B 缝关闭。
b) B 缝开启， A 缝关闭。
c) 两缝均开启。
d) 将“斯特恩-盖拉赫”装置连在缝上，使得只有 $s_z = \frac{1}{2}\hbar$ 电子能通过 A ，同时只有 $s_z = -\frac{1}{2}\hbar$ 电子能通过 B 。
e) 只有 $s_z = \frac{1}{2}\hbar$ 电子能通过 A ，同时只有 $s_z = \frac{1}{2}\hbar$ 电子能通过 B 。如果使束流强

度低到在任一时刻只有一个电子能通过该装置，结果有什么变化？

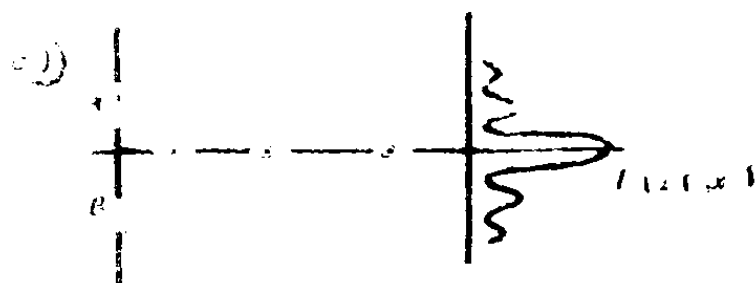
解：



在屏处测得的是电子穿过孔A的几率

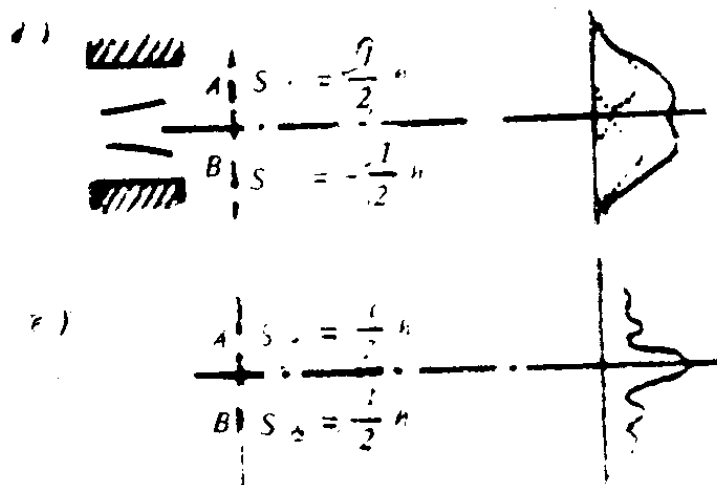


在屏处测得电子穿过孔B的几率。



$$I_{12}(x) = I_1 + I_2 + \text{(干涉项)} \neq I_1 + I_2.$$

图 1.1



通过缝A的电子和通过缝B的电子处于不同的本征态，无干涉项，屏上得到两单缝情况的强度迭加和。

$$x_{1/2}(\hat{S}_z) = 1/\sqrt{2}(\alpha + \beta), \quad x_{1/2}^+(\hat{S}_z) \times x_{1/2}(\hat{S}_z) = 1/2.$$

e) 同c), 但强度减少一半。

图 1.2

由于电子波函数的自身干涉, 对入射强度弱到单电子情形各种情况结果不变. (陈一新)

1007 (Wis, 1975)

一个质量为 m 的粒子受力 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ 作用, 使其波函数满足动量空间薛定谔方程

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - a \nabla_{\mathbf{p}}^2 \right) \varphi(\mathbf{p}, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{p}, t),$$

其中 $\hbar = 1$, a 是某一实常数, 且

$$\nabla_{\mathbf{p}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}.$$

求力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

解: 将动量空间薛定谔方程变到坐标空间中化为

$$\left(-\frac{\nabla^2}{2m} + a \mathbf{r}^2 \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t),$$

因此

$$V(\mathbf{r}) = a \mathbf{r}^2.$$

力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = -2a\mathbf{r}. \quad (\text{张 洪})$$

1008 (Ber, 1982)

考虑任意势 $V(x)$ 的时间无关一维薛定谔方程. 证明 如果一个解 $\psi(x)$ 具有性质: 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时 $\psi(x) \rightarrow 0$, 则此解必然非简并, 进而是实的, 除了某一可能的相因子.

提示: 反证法.

证: 设有另一 $\phi(x)$ 满足同样的方程, 且具有与 ψ 相同