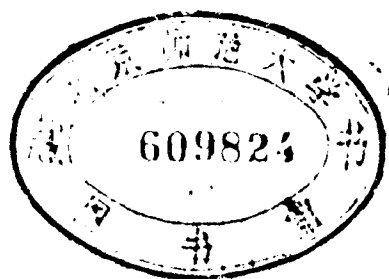


科學圖書大庫

電 磁 波

編譯者	魏施陳黃	游學添鐘	邦輝枝洛
校閱者			



徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有



不許翻印

中華民國六十七年十一月三十日四版

電 磁 波

基本定價 4.60

編譯者 魏游邦 國立臺灣大學電機系工學士
施學輝 陳添枝
校閱者 黃鐘洺 國立臺灣大學電機系教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號
7815250 號
發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話 9719739

7/11/85/03

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認為若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學：如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尙有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員王洪鎧氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大眾閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，廣續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會 敬啓

中華民國六十四年九月

譯者序

今日，洋文書幾乎已成為大學生的象徵。對初進大學的人來說，念洋文書不僅是項新鮮而刺激的挑戰，而且是項共認的榮耀。然而，爲了唸洋文書，我們的學生，須受七年的強迫英語教育，再加上一兩年兩載的磨鍊，才能漸漸進入狀況。這種時間的投資，累積起來，是何等驚人的數字！有些語文天份較低的人，這層文字的障礙，已夠使他精疲力竭，不但沒有餘力從事學問的探究，並且從此喪失了學習的興趣。

我們譯這本書的動機，就是想爲讀書的人增加一本有益的中文書籍，爲大家節約些許的精力。也許這本書敵不過翻版書源源上市的氣勢，在某些喜愛洋文書的教授眼裏也許不及毫毛的重量，但我們已然誠惶恐地將它完成，費了整整一年的工夫。我們不知道能否達成原來的意願，但我們願把它呈現在大家眼前，接受公衆的指教。如果有錯誤，我們承擔一切的罪責，唯一的希望是讀者諸君能不吝來信糾正。

本書譯自 Edward C. Jordan 和 Keith G. Balmain 含著的 "Electromagnetic Waves and Radiating Systems" 第二版。我們去除了原書的 12、14 及 15 章，這是比較不關緊要的部分。

最後，我們十分感謝黃鍾浩教授的校閱，以及楊志忠、廖志強兩位先生協助校對。

目 錄

譯者序

第一章 電磁分析之基本原

理 1

- 1.01 電路與場 1
- 1.02 向量分析 1
- 1.03 梯度、散度和旋度的物理意義 8
- 1.04 他種坐標系中的向量關係 11
- 1.05 積分定理 15
- 1.06 Dirac delta 16
- 1.07 矩陣 19
- 1.08 單位與維度 20
- 1.09 單位的數量級 25

第二章 靜電學 27

- 2.01 緒論 27
- 2.02 靜電場的基本關係 27
- 2.03 高斯定律 30
- 2.04 位函數 32
- 2.05 連續分布的電荷所造成的電場 34
- 2.06 等位面 36
- 2.07 散度定理 38
- 2.08 柏松方程式與拉普拉斯方程式 40
- 2.09 電容 45

- 2.10 靜電能 51
- 2.11 介電質界面的條件 55
- 2.12 圓柱與球面諧式 56
- 2.13 靜電場的唯一性定理 60
- 2.14 距電荷分布甚遠的電場 61
- 2.15 點電荷的 Dirac delta 表示法 62
- 2.16 無限小電偶極的 Dirac delta 表示法 64

第三章 靜磁場 69

- 3.01 磁場理論 69
- 3.02 磁感應和法拉第定律 70
- 3.03 磁通密度 $\mathbf{B}$ 71
- 3.04 磁場強度 $\mathbf{H}$ 和磁動勢 f 71
- 3.05 以微分向量表示的安培功定律 74
- 3.06 導磁係數 (磁導率) μ 76
- 3.07 儲存於磁場的能量 77
- 3.08 電流元素的安培定律 78
- 3.09 電流和 Dirac delta 的空間分布 79
- 3.10 安培力定律 80

3.11	向量磁位·····	82			體)反射——斜向入射時·····	130
3.12	向量位的另一推導方法·····	83	5.13	在導電介質表面的反射·····	136	
3.13	離電流分布甚遠的場·····	85	5.14	面阻抗·····	139	
3.14	電場和磁場互相類推·····	87	5.15	輸電綫類推·····	141	
第四章	馬克士威方程式 ·····	91	第六章	坡印廷向量與功率流 ·····	147	
4.01	時變場的連續方程式·····	92	6.01	坡印廷定理·····	147	
4.02	安培定律的矛盾·····	92	6.02	$\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 的物理意義·····	154	
4.03	馬克士威方程式·····	94	6.03	瞬間、平均與複坡印廷向量·····	155	
4.04	邊界條件·····	96	6.04	導體板上的功率損失·····	158	
第五章	電磁波 ·····	102	第七章	受導波 ·····	162	
5.01	自由空間的解·····	102	7.01	平行板間的波·····	162	
5.02	均勻平面波的傳播·····	104	7.02	橫電波·····	165	
5.03	均勻平面波·····	105	7.03	橫磁波·····	167	
5.04	導電介質的波動方程式·····	109	7.04	TE波和TM波的特性·····	168	
5.05	隨時間作正弦波型變化·····	110	7.05	橫電磁波·····	171	
5.06	導體和介電質·····	115	7.06	傳播速度·····	172	
5.07	極化·····	118	7.07	平行板波導間的衰減·····	175	
5.08	方向餘弦·····	121	7.08	波阻抗·····	179	
5.09	由完全導體反射——垂直入射時·····	123	7.09	導體間的電場與導體上的電流·····	182	
5.10	由完全導體反射——斜向入射時·····	125	7.10	輸電綫·····	187	
5.11	完全介電質(完全絕緣體)反射——垂直入射時·····	129	7.11	平行板輸電綫的綫路表示法·····	189	
5.12	由完全介電質(完全絕緣體)反射——斜向入射時·····	130	7.12	有損平行板輸電綫·····	192	
			7.13	截面不規則的平行長		

	柱體周圍的 E 和 H193	9.03	磁場中的圓運動.....258
7.14	輸電綫理論.....196	9.04	帶電粒子在正交場中的運動.....259
7.15	無綫電頻的低損輸電綫和超高頻輸電綫.....198	9.05	空間電荷所限制的二極管.....262
7.16	超高頻輸電綫作為電路元件.....204	9.06	電漿振盪.....264
7.17	輸電綫圖.....210	9.07	電漿中波的傳播.....265
7.18	電芽綫達成阻抗匹配.....214	9.08	介電質的極化.....268
第八章	波 導222	9.09	等效體電荷和面電荷.....270
8.01	矩形波導.....222	9.10	電容率（介電係數）的觀念.....272
8.02	矩形波導內的橫磁波.....223	9.11	磁極化.....273
8.03	矩形波導內的橫電波.....227	9.12	等效體電流和面電流.....274
8.04	導波中 TEM 波存在的不可能性.....230	9.13	導磁係數（磁導率）的觀念.....275
8.05	貝塞耳函數.....230	9.14	介電質的頻率響應.....277
8.06	場方程式的解.....232	第十章	輻 射281
8.07	圓形波導中的 TM 和 TE 波.....235	10.01	位函數與電磁場.....281
8.08	波阻抗和特性阻抗.....237	10.02	正弦振盪的位函數.....285
8.09	輸電綫和波導間的類推關係.....240	10.03	交變電流元素.....286
8.10	波導的衰減因數和 Q244	10.04	電流元素輻射的能量.....291
8.11	板狀介電質波導.....248	10.05	在短天線上的應用.....293
第九章	場和物質間的作用251	10.06	假想的電流分布.....294
9.01	帶電粒子的運動方程式.....251	10.07	四分之一波長的單極或半波偶極的輻射.....295
9.02	力和能量.....255	10.08	正弦積分和餘弦積分.....300
		10.09	靠近天線的電磁場.....300
		10.10	位函數.....305

10.11	遠場的近似表示法	308
-------	----------	-----

第十一章 天線的基本原理

.....	311
11.01 緒論.....	311
11.02 網路定理.....	311
11.03 偶極天線的方向性.....	318
11.04 傳進波（行波）.....	320
11.05 兩個元件的天線行列.....	322
11.06 廣播電線行列的水平輻射圖樣.....	324
11.07 線型行列.....	325
11.08 輻射圖樣的相乘.....	328
11.09 地球對鉛直輻射圖樣的影響.....	331
11.10 二項次行列.....	333
11.11 天線增益.....	335
11.12 有效面積.....	338
11.13 天線的終端阻抗.....	340
11.14 將天線看作輸電綫的展開.....	348
11.15 實際天線和激發的方法.....	356
11.16 天線間的傳輸損失.....	367
11.17 天線溫度與信號對雜音比值.....	369
11.18 太空通訊.....	372

第十二章 二次波源和孔徑

天線	377
12.01 磁流、馬克士威旋度 方程式	377

12.02	二象性	279
12.03	電流和磁流的像源	380
12.04	作為場源的電（磁）流片流片	381
12.05	外加流和感應電源	382
12.06	電磁場理論的互易性	387
12.07	感應定理和等效定理	393
12.08	二次波源（惠更斯波源）的場	395
12.09	同軸線開口端的輻射	397
12.10	穿透吸收幕上孔徑的輻射	399
12.11	經過傳導幕上孔徑的輻射	402
12.12	夫牢和斐與夫累涅爾繞射	403
12.13	電磁喇叭的輻射	407
12.14	電磁理論	409
12.15	立體照相術	412

第十三章 地面電波的傳播

.....	416
13.01 地球平面的反射現象	417
13.02 空間波與表面波	421
13.03 表面波	429
13.04 地面上方高架的偶極天線	433
13.05 表面波的波傾	438
13.06 球形地表傳播	439

第一章 電磁分析之基本原理

1.01 電路與場 (Circuits and Fields)

在過去數十年中，電機工程所以能有急速的進度，主要的原因是工程師們能夠預測任何電路的工作情況。他們所以有這種能力，是因為他們擁有一套簡單而有效的工具，叫做“電路理論”(Circuit Theory)。電路理論這樣法力無邊，是因為它本身經過簡化，化自一項更為精確的場論(Field Theory)。因此由一般化的場關係可直接導出大家所熟知的電路關係，在這過程中用到許多的假設及近似。

以線路為工具雖然這樣有效，通訊方面的工程師們在處理微波及無線電波的傳輸問題時，立刻發現了它解決問題的限度。在設計整個無線電通訊系統時，工程師可以應用電路理論來設計系統兩端的設備，但是介於發射端與接收端中間的情形，電路理論便不能派上用場，而必須求助於場論。電磁場論直接研究場向量 E 和 H ，電路理論則研究電壓和電流—這二者是電場和磁場積累而生的效應。電壓和電流是工程師們最感興趣的最後結果，但這中間步驟—電磁場也至為重要。本書的目的，即在使讀者熟習電磁場的基本關係，同時說明此種關係如何用以解決工程上的問題。

場論所以較電路理論繁難，是因為它包含較多的變數。在一電路中當電流為固定值時，電壓和電流只是一個變數—時間—的函數。(在均勻輸電線的理論中則多了一個變數：沿輸電線的距離；但工程師們已習於擴展普通的電路理論來處理這種常數分布電路(Distributed-Constants Circuit)的問題，形成一般所說的“輸電線理論”(Transmission-line Theory)在最一般化的電磁場問題中，因為包含三個空間變數，問題就複雜起來了。為了處理三度空間向量最好應用“向量分析”。在向量分析方面下一點工夫，應用它，問題即可大為簡化。因此，下面先讓我們來研究向量分析。

1.02 向量分析

2 電磁波

研究電磁場理論，應用向量分析可以節省時間，更重要的是，向量的形式可以使數學式所表示的物理定律易於明瞭。若以純量來表示這些簡單而重要的物理關係，就好比一個音符，一個音符地唱一首歌，而不以一小節，一小節為單位。向量的形式是要表出物理量的整體關係，而不是從它的分量一一着眼。這裡我們對於向量分析的介紹，是針對還不很熟習這一工具的讀者設計的，我們所涵蓋的內容，在目前足夠用的；讀者要想有深一層了解，可參考其他向量分析的書籍。

純量 只包含大小與代數符號（正負號）的量，稱為純量。例如質量、時間、溫度、功都是純量。純量以斜體字母 A, B, C, a, b, c 等表示。

向量 包含大小與方向的量稱為向量。例如力、速度、位移、加速度都是向量。向量以粗體字母表之，如 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 等。向量可用一個箭頭表示，箭頭的方向要適當地選擇，箭頭的長度則與向量的大小成正比。

場 若一區域的每一個點，均有一相對應的物理函數之函數值，則此區域稱為場。場可分為純量場和向量場，視其物理函數而定。

若此物理函數在每一點的函數值的為純量，這個場就稱為純量場。大氣層的溫度、地球表面距海平面的高度，以及不均勻物體的密度均為純量場。

當物理函數在每一點的函數值均為向量時，這個場就稱為向量場。大氣層中的風速，太空中某一質量所受的地心引力，在一個電場中帶電物體所受的力都是向量場。

向量的和與差 任意兩向量 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 之和如圖 1-1 (a) 所示。我們可以看到無論 $\mathbf{A}$ 加 $\mathbf{B}$ ，或者 $\mathbf{B}$ 加 $\mathbf{A}$ ，其結果都是相同的。即 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

像這樣，運算的次序可以互換時，這個運算叫做“服從交換律”，或“具有交換性”。

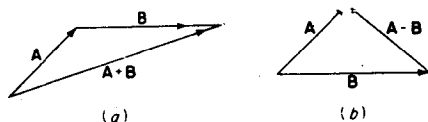


圖 1-1

一個向量的負值，是指與它大小相等，方向相反的向量。

純量與向量的積 當一向量被一純量所乘時，其積是一個新向量。此新向量之大小為原向量之大小與純量的積，此新向量之方向與原向量相同。即

$$\mathbf{C} = a\mathbf{B} \quad (1-2)$$

注意 a 與 $\mathbf{B}$ 之間，沒有任何相乘的記號。“ $\cdot$ ”和“ $\times$ ”號都留給其他特殊的乘法使用，下面將會討論到。

數學家發現，使用向量分析為工具，關係式的表示可以不需要任何坐標系。而工程師在解問題時，則經常須要一組坐標作為參考。本書採使用直角坐標（或卡提辛坐標）(Cartesian Coordinates)，除非其他坐標更能使問題簡化，否則不使用其他坐標。本書同時假定：所有的向量與場都是位於三度空間。

一個三度空間的向量，可以由其在 x ， y 和 z 軸上的投影，完整地表示出來。因此，一個三度空間的向量包含了三個特定的純量。（就是三個互相垂直的分量）同樣的，一個向量場包含了三個特定的純量場。（就是三個分量場）這種分量的觀念可以下式表示：

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}} \quad (1-3)$$

其中 A_x, A_y, A_z 是向量分別在 x ， y 和 z 軸的投影。 $\hat{\mathbf{x}}$ ， $\hat{\mathbf{y}}$ 和 $\hat{\mathbf{z}}$ 則分別為三個軸的單位向量。（看圖 1-2）

當任二向量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 相加時，

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}} + B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}} \quad (1-4)$$

上式可合併寫成

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y) \hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z) \hat{\mathbf{z}} \quad (1-5)$$

此式表示：合成向量的每一分量，是原來兩個向量的相對應分量之和。

此外，在任一個向量式中，左邊的 $\mathbf{x}$ 分量，一定等於右邊的 $\mathbf{x}$ 分量。 $\hat{\mathbf{y}}$ 分量和 $\hat{\mathbf{z}}$ 分量也必左右相等。因此，一個向量方程式可以寫成三個個別的方程式，例如方程式

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{E} \quad (1-6)$$

可以寫成三個方程式：

$$A_x + B_x = C_x + D_x + E_x \quad (1-6a)$$

$$A_y + B_y = C_y + D_y + E_y \quad (1-6b)$$

$$A_z + B_z = C_z + D_z + E_z \quad (1-6c)$$

反過來說，三個分量方程式可以寫成一個向量方程式，問題因之簡化，

4 電磁波

向量分析在場論中的用處，由此可見一斑了。

純量積 (Scalar Multiplication) 上面已經說明一個向量可以被一個純量所乘。同樣的，向量也可以被向量所乘，但是這種乘法的意義必須先加以定義，其運算規則也必須加以規定。目前，有兩種向量乘法被定義，一是“純量積”，另一是“向量積”。其定義及運算規則將討論於下：

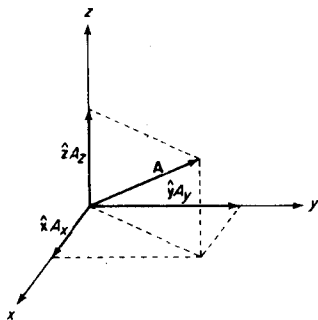


圖 1-2

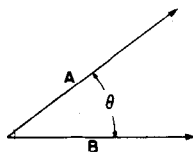


圖 1-3

兩個向量的純量積是一個純量，其值等於兩向量的大小之積，再乘以兩向量間夾角的餘弦值。這種乘法有時稱為點積 (dot product)，以一個“ $\cdot$ ”點擺在兩個相乘的向量間來表示。如圖 1-3，

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (1-7)$$

我們可看出點積服從交換律，即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-8)$$

力與位移的關係是點積的一個例。當力量 $\mathbf{F}$ 作用了一段位移 $\mathbf{D}$ (如圖 1-4 所示)，其所作的功 (W) 以下式表之：

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \quad (1-9)$$

注意，此式的點積是功，功是純量。

兩向量的點積可以用普通的代數規則算出：

令

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}}$$

則

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) + A_x B_y (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) + A_x B_z (\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}})$$

$$\begin{aligned}
 &+ A_y B_x (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) + A_y B_y (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) + A_y B_z (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \\
 &+ A_z B_x (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}) + A_z B_y (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) + A_z B_z (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \quad (1-10)
 \end{aligned}$$

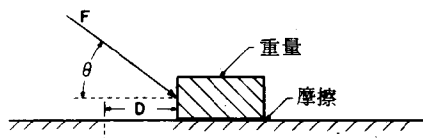


圖 1-4

由(1-7)式可知

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1 \quad (1-11a)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0 \quad (1-11b)$$

故(10)式可化成

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-12)$$

向量積 (Vector Product) 兩向量的向量積是一個向量，其大小為兩向量大小之積，再乘以兩向量間夾角的正弦值；其方向為包含兩向量之平面的垂直方向。如果一個右旋的螺絲釘(Right-Handed Screw)從第一個向量的方向轉到第二個向量的方向（經過其間較小的夾角），則此螺絲釘前進的方向，即為向量積的方向。這種乘法又常稱為“叉積”(Cross Product)，以一個“ $\times$ ”(Cross)擺在兩個相乘的向量中間來表示。如圖(1-3)

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (1-13)$$

其中 $|\quad|$ 表示某一物理量之大小。

而 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的方向則為離開讀者進入紙面的方向。至若向量 $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ 則與 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 大小相等，方向相反，亦即向讀者的方向。因此，

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1-14)$$

可見叉積不具有交換性。

螺絲起子的上舉力量是向量積的一例。若忽略摩擦，則加力 $\mathbf{f}$ 於長度 l 的起子桿端，所生的上舉力 $\mathbf{F}$ 滿足下式：

$$\frac{p}{2\pi} \mathbf{F} = \mathbf{f} \times \mathbf{l}$$

其中常數 p 為螺絲的螺距。

向量積亦可直接由代數運算計得，其結果和(10)式頗相似：

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x \mathbf{x} + A_y \mathbf{y} + A_z \mathbf{z}) \times (B_x \mathbf{x} + B_y \mathbf{y} + B_z \mathbf{z})$$

6 電磁波

$$\begin{aligned}
 &= A_x B_x (\hat{x} \times \hat{x}) + A_x B_y (\hat{x} \times \hat{y}) + A_x B_z (\hat{x} \times \hat{z}) \\
 &+ A_y B_x (\hat{y} \times \hat{x}) + A_y B_y (\hat{y} \times \hat{y}) + A_y B_z (\hat{y} \times \hat{z}) \\
 &+ A_z B_x (\hat{z} \times \hat{x}) + A_z B_y (\hat{z} \times \hat{y}) + A_z B_z (\hat{z} \times \hat{z}) \quad (1-15)
 \end{aligned}$$

由(13)及(14)式，依據右手坐標系(如圖1-5)，可得

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} = -\hat{y} \times \hat{x} \quad (1-16a)$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} = -\hat{z} \times \hat{y} \quad (1-16b)$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} = -\hat{x} \times \hat{z} \quad (1-16c)$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0 \quad (1-16d)$$

故(15)式可化成

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} \\
 &+ (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} \\
 &+ (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z} \quad (1-17)
 \end{aligned}$$

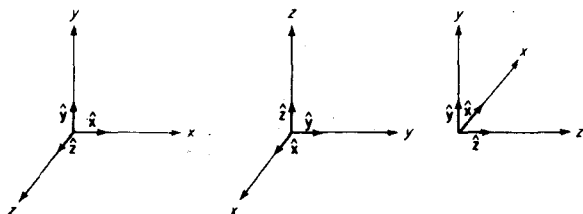


圖1-5 右手坐標系

這一結果可以這樣來記它：每一項的前半部(正的部份)的註腳與該項的坐標軸方向連起來，剛好是順 $x-y-z$ 旋轉。例如第一項的前半部，註腳順序為 $y-z-x$ ($\hat{x}$ 是指 x 軸方向)；第二項的前半部，註腳順序為 $z-x-y$ ；第三項的前半部，註腳順序則為 $x-y-z$ 。每項的後半部(負的部份)，只要顛倒前半部的註腳部可。正確的次序亦可由行列式表示：

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

微分—— ∇ 算子：微分向量算子 Δ ，又稱為 del 或 nabla，在物理問題上有重要的應用，其定義如下：

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \quad (1-18)$$

微分算子在很多方面，和普通的量的處理方法相同。例如，令算子 $D = \frac{\partial}{\partial x}$ ，

則運算 D_y 即表示 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 。

向量有三種乘法（如式(2)，(12)，(17)所示者）， ∇ 也有三種運算：

(1) 如 V 為純量函數，則由(2)式及(18)式得

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \quad (1-19)$$

這種運算稱為梯度 (Gradient)（理由將在後面說明），簡記為

$$\nabla V = \text{Grad } V \quad (1-20)$$

(2) 若 $\mathbf{A}$ 為向量函數，則應用(10)式，(12)式及(18)式可得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-21)$$

這種運算稱為散度 (Divergence) 簡記為

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} \quad (1-22)$$

(3) 若 $\mathbf{A}$ 為向量函數，則應用(15)式，(17)式和(18)式可得

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (1-23)$$

$$\text{或 } \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix}$$

這種運算稱為旋度 (Curl)，記為

$$\nabla \times \mathbf{A} = \text{curl } \mathbf{A} \quad (1-24)$$

恒等式 由上述運算導出的恒等式，在求場的方程式時非常有用。讀者只要直接展開這些式子，便可得到它們的證明。

$$\text{div curl } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1-25)$$

$$\text{curl grad } V = \nabla \times (\nabla V) = 0 \quad (1-26)$$

$$\text{div grad } V = \nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$$

上式 ∇^2 在卡提辛 (Cartesian) 坐標中 (直角坐標)，定義為

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1-27)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (1-28)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad (1-29)$$

$$\nabla (ab) = a \nabla b + b \nabla a \quad (1-30)$$

$$\nabla \cdot (a \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla a + a \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (1-31)$$

$$\nabla \cdot (a \nabla b) = \nabla a \cdot \nabla b + a \nabla^2 b \quad (1-32)$$

$$\nabla \times (a \mathbf{B}) = \nabla a \times \mathbf{B} + a \nabla \times \mathbf{B} \quad (1-33)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (1-34)$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1-35)$$

方向餘弦 (Direction Cosines)：一向量在某一方面的分量意指該向量在此方向的直線上之投影。因此，向量 $\mathbf{A}$ 的 x 分量 A_x ，等於 $A \cos \alpha$ ， α 為 $\mathbf{A}$ 與 x 軸的夾角。即

$$A_x = A \cdot \hat{x}$$

這就是說，一向量在某一方向的分量，是指該向量與此方向的單位向量之點積。

若一向量和坐標軸的夾角分別為 α ， β ， γ ，則

$$l = \cos \alpha, \quad m = \cos \beta, \quad n = \cos \gamma$$

稱為此向量的方向餘弦

問題 1. 兩向量的純量積可以由其對應分量的積之和表示。即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

證明兩向量的夾角 Ψ 的餘弦可以由對應方向餘弦的積之和表示：

$$\begin{aligned} \cos \Psi &= \cos \alpha_A \cos \alpha_B + \cos \beta_A \cos \beta_B + \cos \gamma_A \cos \gamma_B \\ &= l_A l_B + m_A m_B + n_A n_B \end{aligned}$$

1.03 梯度、散度和旋度的物理意義

由 del 算子所作的三種運算在向量場和純量場均有重要的物理意義。今依序討論於下：

梯度 一純量函數在空間某一點的梯度是指該函數在該點的最大變化率。(包括變化的方向) 例如純量函數 V 代表溫度，則 $\nabla V = \text{grad } V$ 為溫度梯度，代表溫度隨距離而變的變化率。雖然溫度 V 為一純量(只有大小而沒有方向)，但溫度梯度 ∇V 為一向量，方向是溫度變化最快的方向。此向量