科學圖書大庫

# 電 磁 波


編譯者 魏游邦
施學輝
陳添枝
校閱者 黃鐘洛




徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

**監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧**

# 科學圖書大庫



**中華民國六十七年十一月三十日四版**

# 電磁波

基本定價　4.60

編譯者　魏游邦　施學輝　陳添枝　國立臺灣大學電機系工學士

校閱者　黃鐘洺　國立臺灣大學電機系教授



(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686、7815250號

發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號

承印者　大興圖書印製有限公司三重市三和路四段一五一號　電話9719739

# 我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員王洪鎧氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

玆特掬誠呼籲：

**自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；**

**旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；**

**大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者**

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尚祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

**徐氏基金會　敬啓**

**中華民國六十四年九月**

# 譯者序

今日，洋文書幾乎已成爲大學生的象徵。對初進大學的人來說，念洋文書不僅是項新鮮而刺激的挑戰，而且是項共認的榮耀。然而，爲了唸洋文書，我們的學生，須受七年的強迫英語教育，再加上一年兩載的磨鍊，才能漸漸進入狀況。這種時間的投資，累積起來，是何等驚人的數字！有些語文天份較低的人，這層文字的障碍，已夠使他精疲力竭，不但沒有餘力從事學問的探究，並且從此喪失了學習的興趣。

我們譯這本書的動機，就是想爲讀書的人增加一本有益的中文書籍，爲大家節約些許的精力。也許這本書敵不過翻版書源源上市的氣勢，在某些喜愛洋文書的教授眼裏也許不及毫毛的重量，但我們已然誠惶恐地將它完成，費了整整一年的工夫。我們不知道能否達成原來的意願，但我們願把它呈現在大家眼前，接受公衆的指教。如果有錯誤，我們承擔一切的罪責，唯一的希望是讀者諸君能不吝來信糾正。

本書譯自 Edward C, Jordan 和 Keith G. Balmain 合著的"Electro-nagnetic Waves and Radiating Systems"第二版。我們去除了原書的 12、14 及 15 章，這是比較不關緊要的部分。

最後，我們十分感謝黃鐘洺教授的校閱，以及楊志忠、廖志強兩位先生協助校對。

# 目　錄

# 第一章　電磁分析之基本原理

## 1.01 電路與場 (Circuits and Fields)

在過去數十年中，電機工程所以能有急速的進度，主要的原因是工程師們能夠預測任何電路的工作情況。他們所以有這種能力，是因爲他們擁有一套簡單而有效的工具，叫做“電路理論”( Circuit Theory )。電路理論這樣法力無邊，是因爲它本身經過簡化，化自一項更爲精確的場論 (Field Theory)。因此由一般化的場關係可直接導出大家所熟知的電路關係，在這過程中用到許多的假設及近似。

以線路爲工具雖然這樣有效，通訊方面的工程師們在處理微波及無綫電波的傳輸問題時，立刻發現了它解決問題的限度。在設計整個無綫電通訊系統時，工程師可以應用電路理論來設計系統兩端的設備，但是介於發射端與接收端中間的情形，電路理論便不能派上用場，而必須求助於場論。電磁場論直接研究場向量E和H，電路理論則研究電壓和電流一這二者是電場和磁場積累而生的効應。電壓和電流是工程師們最感興趣的最後結果，但這中間步驟一電磁場也至爲重要。本書的目的，即在使讀者熟習電磁場的基本關係，同時說明此種關係如何用以解決工程上的問題。

場論所以較電路理論繁難，是因爲它包含較多的變數。在一電路中當電流爲固定值時，電壓和電流只是一個變數一時間一的函數。(在均勻輸電線的理論中則多了一個變數：沿輸電線的距離；但工程師們已習於擴展普通的電路理論來處理這種常數分布電路 ( Distributed - Constants Circuit ) 的問題，形成一般所說的“輸電線理論”( Transmission - line Theocy) 在最一般化的電磁場問題中，因爲包含三個空間變數，問題就複雜起來了。爲了處理三度空間向量最好應用“向量分析”。在向量分析方面下一點工夫，應用它，問題卽可大爲簡化。因此，下面先讓我們來研究向量分析。

## 1.02 向量分析

研究電磁場理論，應用向量分析可以節省時間，更重要的是，向量的形式可以使數學式所表示的物理定律易於明瞭。若以純量來表示這些簡單而重要的物理關係，就好比一個音符，一個音符地唱一首歌，而不以一小節，一小節爲單位。向量的形式是要表出物理量的整體關係，而不是從它的分量一一着眼。這裡我們對於向量分析的介紹，是針對還不很熟習這一工具的讀者設計的，我們所涵蓋的內容，在目前足夠用的；讀者要想有深一層了解，可參考其他向量分析的書籍。

**純　量**　只包含大小與代數符號（正負號）的量，稱爲純量。例如質量、時間、溫度、功都是純量。純量以斜體字母 $A, B, C, a, b, c$ 等表示。

**向　量**　包含大小與方向的量稱爲向量。例如力、速度、位移、加速度都是向量。向量以粗體字母表之，如$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 等。向量可用一個箭頭表示，箭頭的方向要適當地選擇，箭頭的長度則與向量的大小成正比。

**場**　若一區域的每一個點，均有一相對應的物理函數之函數值，則此區域稱爲場。場可分爲純量場和向量場，視其物理函數而定。

若此物理函數在每一點的函數值的爲純量，這個場就稱爲純量場。大氣層的溫度、地球表面距海平面的高度，以及不均匀物體的密度均爲純量場。

當物理函數在每一點的函數值均爲向量時，這個場就稱爲向量場。大氣層中的風速，太空中某一質量所受的地心引力，在一個電場中帶電物體所受的力都是向量場。

**向量的和與差**　任意兩向量$\mathbf{A}$與$\mathbf{B}$之和如圖 1－1 ($a$) 所示。我們可以看到無論$\mathbf{A}$加$\mathbf{B}$，或者$\mathbf{B}$加$\mathbf{A}$，其結果都是相同的。即　$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

像這樣，運算的次序可以互換時，這個運算叫做“服從交換律”，或“具有交換性”。

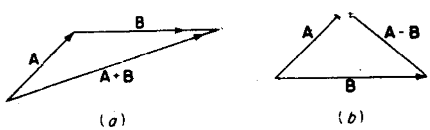


圖 1-1

一個向量的負值，是指與它大小相等，方向相反的向量。

**純量與向量的積** 當一向量被一純量所乘時，其積是一個新向量。此新向量之大小爲原向量之大小與純量的積，此新向量之方向與原向量相同。即

$$\mathbf{C}=a\mathbf{B} \tag{1-2}$$

注意 $a$ 與 $\mathbf{B}$ 之間，沒有任何相乘的記號。"・"和"X"號都留給其他特殊的乘法使用，下面將會討論到。

數學家發現，使用向量分析爲工具，關係式的表示可以不需要任何坐標系。而工程師在解問題時，則經常須要一組坐標作爲參考。本書採使用直角坐標（或卡提辛坐標）(Cartesian Coordinates)，除非其他坐標更能使問題簡化，否則不使用其他坐標。本書同時假定：所有的向量與場都是位於三度空間。

一個三度空間的向量，可以由其在X，Y和Z軸上的投影，完整地表示出來。因此，一個三度空間的向量包含了三個特定的純量。（就是三個互相垂直的分量）同樣的，一個向量場包含了三個特定的純量場。（就是三個分量場）這種分量的觀念可以下式表示：

$$\mathbf{A}=A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\hat{\mathbf{y}}+A_z\hat{\mathbf{z}} \tag{1-3}$$

其中 $A_x, A_y, A_z$ 是向量分別在 $x$，$y$ 和 $z$ 軸的投影。$\hat{\mathbf{x}}$，$\hat{\mathbf{y}}$ 和 $\hat{\mathbf{z}}$ 則分別爲三個軸的單位向量。（看圖 1-2）

當任二向量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 相加時，

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\hat{\mathbf{y}}+A_z\hat{\mathbf{z}}+B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}}+B_z\hat{\mathbf{z}} \tag{1-4}$$

上式可合併寫成

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_x+B_x)\hat{\mathbf{x}}+(A_y+B_y)\hat{\mathbf{y}}+(A_z+B_z)\hat{\mathbf{z}} \tag{1-5}$$

此式表示：合成向量的每一分量，是原來兩個向量的相對應分量之和。

此外，在任一個向量式中，左邊的 $\mathbf{x}$ 分量。一定等於右邊的 $\mathbf{x}$ 分量。$\hat{\mathbf{y}}$ 分量和 $\hat{\mathbf{z}}$ 分量也必左右相等。因此，一個向量方程式可以寫成三個個別的方程式，例如方程式

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}+\mathbf{D}+\mathbf{E} \tag{1-6}$$

可以寫成三個方程式：

$$A_x+B_x=C_x+D_x+E_x \tag{1-6a}$$

$$A_y+B_y=C_y+D_y+E_y \tag{1-6b}$$

$$A_z+B_z=C_z+D_z+E_z \tag{1-6c}$$

反過來說，三個分量方程式可以寫成一個向量方程式，問題因之簡化，

向量分析在場論中的用處，由此可見一斑了。

**純量積** (Scalar Maltiplication) 上面已經說明一個向量可以被一個純量所乘。同樣的，向量也可以被向量所乘，但是這種乘法的意義必須先加以定義，其運算規則也必須加以規定。目前，有兩種向量乘法被定義，一是“純量積”，另一定“向量積”。其定義及運算規則將討論於下：

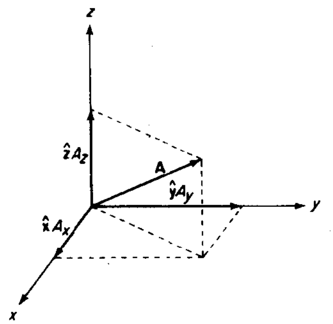


圖1-2

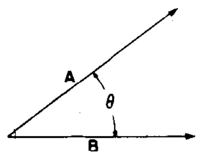


圖1-3

兩個向量的純量積是一個純量，其值等於兩向量的大小之積，再乘以兩向量間夾角的餘弦值。這種乘法有時稱爲點積 (dot product)，以一個“ • ”點擺在兩個相乘的向量間來表示。如圖1 - 3，

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|A|\,|B|\cos\theta \tag{1-7}$$

我們可看出點積服從交換律，即

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \tag{1-8}$$

力與位移的關係是點積的一個例。當力量**F**作用了一段位移**D**（如圖1 - 4所示），其所作的功（W）以下式表之：

$$\mathrm{W}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{D} \tag{1-9}$$

注意，此式的點積是功，功是純量。

兩向量的點積可以用普通的代數規則算出：

令 $\mathbf{A}=A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\hat{\mathbf{y}}+A_z\hat{\mathbf{z}}$

$\mathbf{B}=B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}}+B_z\hat{\mathbf{z}}$

則 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}})+A_xB_y(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}})+A_xB_z(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}})$

$$+A_y B_x(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}})+A_y B_y(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}})+A_y B_z(\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}})$$
$$+A_z B_x(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}})+A_z B_y(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{y}})+A_z B_z(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}}) \quad (1\text{-}10)$$

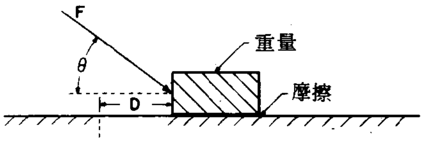


圖 1 - 4

由（ 1 - 7 ）式可知

$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}}=1 \quad (1\text{-}11a)$$
$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}}=0 \quad (1\text{-}11b)$$

故(10)式可化成

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z \quad (1\text{-}12)$$

**向量積** (Vector Product) 兩向量的向量積是一個向量，其大小爲兩向量大小之積，再乘以兩向量間夾角的正弦值；其方向爲包含兩向量之平面的垂直方向。如果一個右旋的螺絲釘(Right-Handed Screw) 從第一個向量的方向轉到第二個向量的方向（經過其間較小的夾角），則此螺絲釘前進的方向，即爲向量積的方向。這種乘法又常稱爲“叉積”(Cross Product)，以一個“×”(Cross) 擺在兩個相乘的向量中間來表示。如圖（ 1-3 ）

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\sin\theta \quad (1\text{-}13)$$

其中｜　｜表示某一物理量之大小。

而$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$的方向則爲離開讀者進入紙面的方向。至若向量$\mathbf{B}\times\mathbf{A}$則與$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$大小相等，方向相反，亦即向讀者的方向。因此，

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A} \quad (1\text{-}14)$$

可見叉積不具有交換性。

螺絲起子的上舉力量是向量積的一例。若忽略摩擦，則加力 $\mathbf{f}$ 於長度 $\mathbf{l}$ 的起子桿端，所生的上舉力$\mathbf{F}$滿足下式：

$$\frac{p}{2\pi}\mathbf{F}=\mathbf{f}\times\mathbf{l}$$

其中常數 $p$ 爲螺絲的螺距。

向量積亦可直接由代數運算計得，其結果和(10)式頗相似：

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_x\mathbf{x}+A_y\mathbf{y}+A_z\mathbf{z})\times(B_x\mathbf{x}+B_y\mathbf{y}+B_z\mathbf{z})$$

$$
\begin{aligned}
&= A_x B_x(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}})+A_x B_y(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}})+A_x B_z(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}})\\
&+A_y B_x(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{x}})+A_y B_y(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{y}})+A_y B_z(\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}})\\
&+A_z B_x(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}})+A_z B_y(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}})+A_z B_z(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{z}})
\end{aligned}\tag{1-15}
$$

由（13）及（14）式，依據右手坐標系（如圖 1-5），可得

$$\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{z}}=-\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{x}} \tag{1-16a}$$

$$\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{x}}=-\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{y}} \tag{1-16b}$$

$$\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{y}}=-\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}} \tag{1-16c}$$

$$\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{z}}=0 \tag{1-16d}$$

故（15）式可化成

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\mathbf{x}}\\
&+(A_z B_x - A_x B_z)\hat{\mathbf{y}}\\
&+(A_x B_y - A_y B_x)\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}\tag{1-17}
$$

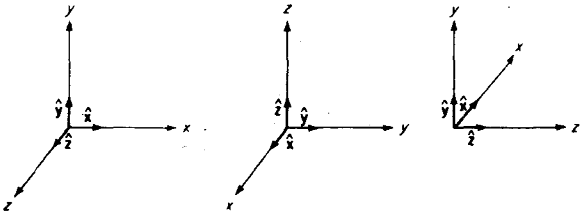


圖 1-5 右手坐標系

這一結果可以這樣來記它：每一項的前半部（正的部份）的註脚與該項的坐標軸方向連起來，剛好是順 $x$-$y$-$z$ 旋轉。例如第一項的前半部，註脚順序爲 $y$-$z$-$x$（$\hat{\mathbf{x}}$ 是指 $x$ 軸方向）；第二項的前半部，註脚順序爲 $z$-$x$-$y$；第三項的前半部，註脚順序則爲 $x$-$y$-$z$。每項的後半部（負的部份），只要顚倒前半部的註脚部可。正確的次序亦可由行列式表示：

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\end{vmatrix} \quad 或 \quad \mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

微分——$\nabla$ 算子：微分向量算子 Δ，又稱爲 del 或 nabla，在物理問題上有重要的應用，其定義如下：

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \tag{1-18}$$

微分算子在很多方面，和普通的量的處理方法相同。例如，令算子 $D=\frac{\partial}{\partial x}$，則運算 $D_y$ 即表示 $\frac{\partial y}{\partial x}$。

向量有三種乘法（如式(2)，(12)，(17)所示者），$\nabla$ 也有三種運算：

(1)如 $V$ 爲純量函數，則由(2)式及(18)式得

$$\nabla V=\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \tag{1-19}$$

這種運算稱爲梯度 (Gradient)（理由將在後面說明），簡記爲

$$\nabla V=\mathrm{Grad}V \tag{1-20}$$

(2)若 $\mathbf{A}$ 爲向量函數，則應用(10)式，(12)式及(18)式可得

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1-21}$$

這種運算稱爲散度 (Divergence) 簡記爲

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\mathrm{div}\mathbf{A} \tag{1-22}$$

(3)若 $\mathbf{A}$ 爲向量函數，則應用(15)式，(17)式和(18)式可得

$$\nabla\times\mathbf{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}} \tag{1-23}$$

$$\text{或}\quad \nabla\times\mathbf{A}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\\ \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}}\end{vmatrix}$$

這種運算稱爲旋度（Curl），記爲

$$\nabla\times\mathbf{A}=\mathrm{curl}\mathbf{A} \tag{1-24}$$

**恒等式**　由上述運算導出的恒等式，在求場的方程式時非常有用。讀者只要直接展開這些式子，便可得到它們的證明。

$$\mathrm{div}\ \mathrm{curl}\mathbf{A}=\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0 \tag{1-25}$$

$$\mathrm{curl}\ \mathrm{grad}V=\nabla\times(\nabla V)=0 \tag{1-26}$$

$$\mathrm{dir}\ \mathrm{grad}V=\nabla\cdot(\nabla V)=\nabla^2V$$

上式 $\nabla^2$ 在卡提辛 (Cartesian) 坐標中（直角坐標），定義爲

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1-27}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A} \tag{1-28}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B} \tag{1-29}$$

$$\nabla(\mathrm{ab})=\mathrm{a}\nabla\mathrm{b}+\mathrm{b}\nabla\mathrm{a} \tag{1-30}$$

$$\nabla\cdot(a\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\nabla a+\mathrm{a}\nabla\cdot\mathbf{B} \tag{1-31}$$

$$\nabla\cdot(a\nabla b)=\nabla a\cdot\nabla b+a\nabla^2 b \tag{1-32}$$

$$\nabla\times(\mathrm{a}\mathbf{B})=\nabla a\times\mathbf{B}+a\nabla\times\mathbf{B} \tag{1-33}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}\nabla\cdot\mathbf{B}-\mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{A}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} \tag{1-34}$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \tag{1-35}$$

**方向餘弦** (Direction Cosines) ：一向量在某一方面的分量意指該向量在此方向的直線上之投影。因此，向量$\mathbf{A}$的 $x$ 分量$\mathbf{A}_x$，等於$A\cos\alpha$，$\alpha$爲$\mathbf{A}$與 $x$ 軸的夾角。即

$$\mathbf{A}_x=\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{x}}$$

這就是說，一向量在某一方向的分量，是指該向量與此方向的單位向量之點積。

若一向量和坐標軸的夾角分別爲$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，則

$$l=\cos\alpha,\qquad m=\cos\alpha,\qquad n=\cos\gamma$$

稱爲此向量的方向餘弦

問題1. 兩向量的純量積可以由其對應分量的積之和表示。即

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

證明兩向量的夾角$\Psi$的餘弦可以由對應方向餘弦的積之和表示：

$$\cos\Psi=\cos\alpha_A\cos\alpha_B+\cos\beta_A\cos\beta_B+\cos\gamma_A\cos\gamma_B$$
$$=l_Al_B+m_Am_B+n_An_B$$

## 1.03 梯度、散度和旋度的物理意義

由 del 算子所作的三種運算在向量場和純量場均有重要的物理意義。今依序討論於下：

**梯度** 一純量函數在空間某一點的梯度是指該函數在該點的最大變化率。（包括變化的方向）例如純量函數$V$代表溫度，則$\nabla V=\mathrm{grad}\,V$爲溫度梯度，代表溫度隨距離而變的變化率。雖然溫度$V$爲一純量（只有大小而沒有方向），但溫度梯度$\nabla V$爲一向量，方向是溫度變化最快的方向。此向量