微分方程解题分析

汤正谊 编

江
术出版社

微分方程解题分析

汤 正 谊

江苏科学技术出版社

（苏）新登字第 002 号

微分方程解题分析

汤　正　谊

出版发行：江苏科学技术出版社
经　　销：江苏省新华书店
印　　刷：泰县印刷四厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 16 字数 355,000
1993 年 1 月第 1 版　　1993 年 1 月第 1 次印刷
印数 1－2,000 册

ISBN　7—5345—1499—1

O·92　　　定价：7.30 元

《大学生之友》丛书出版说明

大学理工科的学生，包括电视大学、职工大学的学生，在学习过程中往往要演算大量的习题，以加深对课程内容的理解和记忆. 但在解题时，经常会遇到各种各样的困难.《大学生之友》丛书就是为了帮助他们提高解题能力，熟练演算技巧，牢固地掌握学科知识而出版的.

丛书以解题分析为主. 为了便于阅读，每节首先简要介绍有关的概念、定律和公式. 然后，用较大的篇幅选择有代表性的例题进行剖析，讲述解题的思路，归纳解题的规律，指出必须注意的事项. 最后，附以适量的习题，并提供答案或提示.

丛书内容密切配合大学教材，选题以数理化基础课和专业基础课为主，兼顾各专业课. 各书的出版时间，也基本上按此顺序安排，逐步配套.

我们的愿望，想使这套丛书成为大学生喜爱的"朋友". 能否如愿，还有待于广大师生的检验. 我们诚恳地欢迎读者对每一本书提出宝贵意见，使它们成为名副其实的"大学生之友".

江苏科学技术出版社

前　言

本书是为适应理工科大学生学习微分方程的需要，而编写的教学参考书.

鉴于微分方程内容之丰富，题目数量之多，各类学校对微分方程的要求又不尽一致，因此，不可能在一本参考书中面面俱到地把所有解法统统搜集进去，为此，本书仅涉及其中一些最基本的也是为各类学校学生初学微分方程时所共同接触到的某些问题，如微分方程的列法、一阶微分方程的各种解法、高阶微分方程的解法、常微分方程组及线性偏微分方程等；考虑到理工科大学在应用上的需要，关于微分方程的应用，本书给予了足够的重视，并专门列为一章，至于微分方程的数值解法及级数解法，限于篇幅没有列入.

本书在写法上，注意到以下几点：(1)每节的内容提要尽量做到简明扼要，因为它毕竟不是一本教科书，毋须把微分方程的内容详细写明；(2)例题的选配，力求由浅入深、由易到难、循序渐进；(3)例题的分析，有详有略，一般是先详后略；(4)习题的配备，注意紧密结合例题类型的.最后，附录中的答案是仅提供读者参考的.

此外，在文字叙述上，力求做到通俗易懂，说理清楚，但限于水平，错误和疏漏之处，在所难免，欢迎读者批评指正.

书中插图系由苏州大学数学系张筑生同志精心绘制，邢盘泉老师和南京大学王现、滕利邦副教授对本书初稿提出了许多宝贵意见，在此一并表示衷心的感谢.

编者

目　　录

第一章　微分方程的列法与微分方程的解

§1　按实际问题列微分方程

一、内容与解法提要

1.　**微分方程的产生**　微分方程，象其他一切自然科学一样，它的产生，首先由于实际问题的需要. 人们为了认识和把握自然现象的客观规律，总是致力于寻求出现在同一问题中的各种量(常量及变量)之间的相互依赖关系，这种关系. 在数学分析里常常体现为一定的函数关系，即某些量是另外一些量的函数. 但是，除了在一些简单的场合之外，绝大多数的函数关系，不是容易地能够直接书写出来，在这种情况下，我们首先写出的往往不是其未知函数的本身，而是这个未知函数所适合的一个方程，这种方程，一般地我们可称之为函数方程. 如果在这个方程中，含有未知函数的导数或微分，那么这种方程便称为微分方程.

2.　**微分方程的列法**　就实际问题建立微分方程，一般说来是比较困难的，因为这不仅需要有一定的数学知识，而且更重要的需要有其他自然科学知识的配合，从而对所要考察的那个实际问题的全过程有一个清晰的认识，在这个基础上，才有可能利用某些已知定律或等量关系去布列方程. 就数学的角度来说，常用的方法有两种：

(1)　直接利用导数概念列方程　在运用这种方法列方程时，必须了解导数(一阶或高阶)的实际意义：

(2) 利用“微元法”列方程 所谓“微元法”，它的基本思想有两点：第一，将所考察的整个物理过程“细分”成一些局部的过程；第二，在局部“以不变代变”，“以均匀代非均匀”，“以直代曲”. 在用微元法列方程时，实际上首先列出的是差分方程，然后过渡到极限形式，而得到所需要的微分方程.

二、例　　题

例 1 （大气压力） 设想有一块单位面积的薄板，在其上所承受的大气压力 p 显然与这块薄板离开水平面的高度 h 有关，即 p 是 h 的函数，试建立这个函数所满足的微分方程.

解 我们用微元法列方程，为此将高度进行“细分”，观察薄板离水平面的两个不同高度 h 及 $h+\Delta h$，其中 Δh 不妨假定是正的(图 1.1).

那么当高度为 h 及 $h+\Delta h$ 时，其对应的压力就分别是 $p(h)$ 及 $p(h+\Delta h)$.

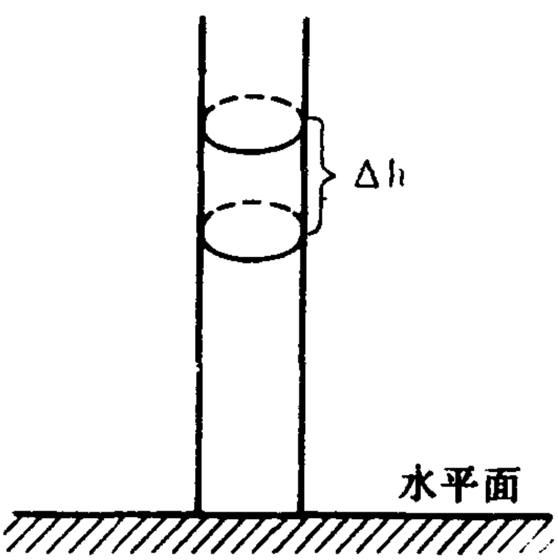

图 1.1

我们知道，所谓作用在该薄板上的大气压力，它实际上是等于直立在该薄板上的空气柱重量. 现在我们从两个不同角度来计算由 h 到 $h+\Delta h$ 这一段空气柱的重量. 一方面，它等于作用在该薄板上的大气压力之差

$$p(h) - p(h + \Delta h)$$

另一方面，可以直接根据公式

$$重量=密度\times体积$$

来计算. 我们看到,这一段柱体的体积显然等于 $1\times\Delta h=\Delta h$. 然而,这一段空气柱体的密度却不是一个常数,其分布是不均匀的,它随着离水平的高度 h 而改变,因此,如以 ρ 表示空气的密度,它应当是 h 的函数 $\rho=\rho(h)$. 但是,当 Δh 很小时,这一段空气柱的密度,我们可以近似地把它看作是分布均匀的,并取作对应于高度为 h 时的密度 $\rho=\rho(h)$,如此,这一段空气柱的重量就近似地等于 $\rho(h)\Delta h$,于是我们有近似等式

$$p(h)-p(h+\Delta h)\doteq\rho(h)\Delta h.$$

另一方面,又由波义耳—马略特定律,密度 ρ 与压力 p 成正比,故有 $\rho(h)=cp(h)$,其中 c 是一个正的常数,于是得

$$p(h)-p(h+\Delta h)\doteq cp(h)\Delta h.$$

这就是压力 p 和高度 h 之间的一个差分方程. 用 Δh 除上式有:

$$\frac{p(h+\Delta h)-p(h)}{\Delta h}\doteq-cp(h).$$

令 $\Delta h\to0$,最后得到所要的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h}=-cp.$$

说明 在以上引出微分方程的过程中,我们预先假定 $\Delta h>0$,当 $\Delta h<0$ 时可引导到同一个方程.

例 2 (镭的衰变规律) 设镭的衰变速度与该时刻现有存镭量成正比,且已知当 $t=0$ 时,其存镭量为 R_0 克,试建立在任意时刻 t 时,存镭量 $R(t)$所满足的微分方程.

解法 1 利用微元法

设在时间 t 时,其现有存镭量为 $R(t)$克;又在时间为 $t+\Delta t$ 时,存镭量为 $R(t+\Delta t)$克,故在 $\Delta t(>0)$这段时间内,镭损耗

$$R(t)-R(t+\Delta t)$$

克. 另一方面,可以直接根据公式

$$\text{镭的损耗数} = \text{镭的衰变速度} \times \text{时间}$$

来计算. 由于镭的衰变速度不是一个常数，它随着时间 t 的改变而改变，因此，如以 v 表示镭的衰变速度，它应当是时间 t 的函数 $v=v(t)$. 但是，当 Δt 很小时，我们可以认为在 Δt 这一段时间内，镭的衰变速度基本上是均匀的，并设想它就等于在时间 t 时的衰变速度 $v(t)$，依条件它是正比于在时间 t 时的存镭量，故有 $v(t)=CR(t)$，这里 C 是正的常数. 如此，在 Δt 时间内镭损耗 $CR(t)\Delta t$ 克，于是得到近似等式

$$R(t) - R(t+\Delta t) \doteq CR(t)\Delta t.$$

由此，用 Δt 除之并取极限，最后得到所要的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -CR.$$

此外，根据题设条件，当 $t=0$ 时，存镭量为 R_0 克. 因此，当列出了上述微分方程之后，还必须附加写出 $R(t)\big|_{t=0}=R_0$，这样，完整的记法应当是

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -CR, \\ R(t)\big|_{t=0} = R_0. \end{cases}$$

条件 $R(t)\big|_{t=0}=R_0$ 称为初始条件.

解法 2　用导数概念

因衰变速度是 $R(t)$ 对时间 t 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$，按题设条件正比于 R，于是立得所要的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -CR$$

其中 C 是正的常数，又右端的负号是由于函数 $R(t)$ 是 t 的减函数. 最后附上初始条件，得解法 1 同样的结果.

例 3　（动物的繁殖）　已知某地区内的某种动物的出生率和死亡率各为 p 及 q，于是该地区内的这种动物的数目 N 是时间 t 的函数 $N(t)$，试求这个函数所适合的微分方程.

解　在建立微分方程的时候，有一点需要说明的，就是所谓“理想化”的过程，这就是说，我们在导出微分方程的过程中，常常忽略或抛弃一些非主要因素，而只考虑所论问题的主要因素．在本题中，只考虑在某地区内的某种动物，这里自然假定它们对外界并无迁出，也无迁入，而且也不受其他动物的侵害和自然灾害的威胁．

经过这样理想化的假定之后，若在时间 t 时，其动物的数目为 $N(t)$；则在 $t+\Delta t$ 时，其动物的数目为 $N(t+\Delta t)$．因此，在 Δt 这段时间内，该种动物的变化为

$$N(t+\Delta t)-N(t).$$

另一方面，我们直接利用出生率 p 和死亡率 q 来计算该种动物在 Δt 时间内的变化．我们知道，出生率（或死亡率）是在单位时间内的出生数（或死亡数）和现有数之比．因此它们也是时间 t 的函数，但由于 Δt 很小，所以在 Δt 这段时间里的出生率和死亡率可以近似地把它们看作对应于时间 t 时的出生率 $p(t)$ 和死亡率 $q(t)$．如此，在 Δt 这段时间内，该种动物的出生数为 $p(t)N(t)\Delta t$，死亡数为 $q(t)N(t)\Delta t$．这就是说，在 Δt 这段时间内，该种动物的变化为

$$p(t)N(t)\Delta t-q(t)N(t)\Delta t=(p(t)-q(t))N(t)\Delta t.$$

于是我们得到：

$$N(t+\Delta t)-N(t)\doteq(p(t)-q(t))N(t)\Delta t.$$

用 Δt 除两边，并取极限，可得

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=(p-q)N.$$

对于这个微分方程，我们还必须作如下补充说明：由于动物数 N 是一个正整数，因此函数 $N(t)$ 实际上是一个阶梯函数，它的导数 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ 或者为 0，或者等于 ∞，此时我们可以选择一条光滑曲线去近似地代替它（图 1.2）．

例 4　（复利公式）　在连续计算复利时，若本金为 a，利

率是 k，则 t 年之后的本利和 S 将是 t 的函数 $S(t)$，试导出这个函数所满足的微分方程.

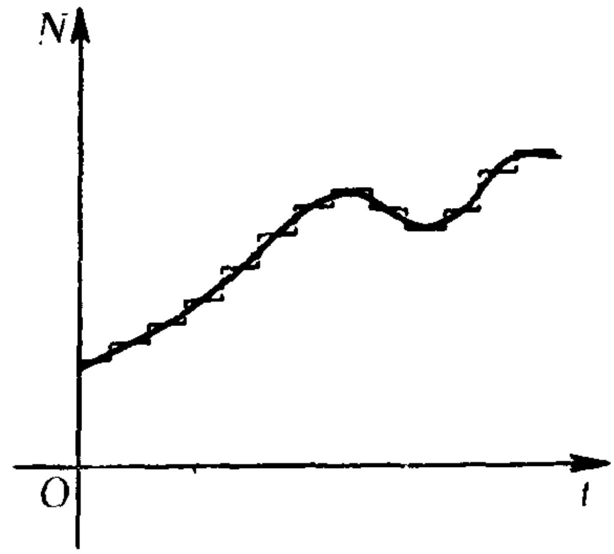

图 1.2

解　由假定，t 是整数，则 t 年之后的本利和显然为 $S(t)=a(1+k)^t$. 现在假定每过 $\frac{1}{n}$ 年计算一次利息，则对于 $\frac{1}{n}$ 年作计算单位，利率是 $\frac{k}{n}$，而经历的年数为 nt，故其本利和为

$$S(t)=a(1+\frac{k}{n})^{nt}.$$

当 n 无限增加时，就意味着连续计算本利和. 由此对上式取极限，就得到在连续计算复利时，t 年之后的本利和为

$$S(t)=\lim_{n\to\infty}a(1+\frac{k}{n})^{nt}$$

$$=\lim_{n\to\infty}a[(1+\frac{k}{n})^{\frac{n}{k}}]^{kt}=ae^{kt}.$$

对 t 求导数，并利用 $S(t)=ae^{kt}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=k\cdot ae^{kt}=kS.$$

因此，所求之微分方程为 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=kS$.

对本例有两点须说明：(1)由假定，t 是整数，因此对导数

$\frac{dS}{dt}$的意义应作出规定，我们是把函数 $S(t)$的定义域从正整数扩充到实数之后，然后再取相应的导数；(2)本题导出微分方程的最后步骤，实际上是从以下两个等式

$$S = ae^{kt} \quad 及 \quad \frac{dS}{dt} = ake^{kt}$$

中消去常数 a 而得到的. 关于这一点，我们在下一节将专门谈到.

例 5 （溶液问题） 一容器内盛有 N 公升盐水，其中含盐量为 k 公斤，今用每分钟 a 公升的均匀速度把净水注入容器，并以同样速度使盐水流出，若假定容器内有一搅拌器，使容器内的溶液每时每刻保持均匀. 试确立容器内的含盐量关于时间 t 的函数所适合的微分方程.

解 今用 $\theta(t)$表示容器内的含盐量关于时间 t 的函数，则在时间为 t 及 $t+\Delta t$ 时，其容器内的含盐量就分别为 $\theta(t)$及 $\theta(t+\Delta t)$，于是在 Δt 这段时间内，容器内的盐量减少

$$\theta(t) - \theta(t + \Delta t).$$

另一方面，在 Δt 时间内流出的溶液为 $a\Delta t$ 公升，因为 Δt 很小，故在这段时间内溶液的浓度可以近似地看作在时间为 t 时的浓度 $\frac{\theta(t)}{N}$，如此，在 Δt 这段时间内，流出的含盐量近似地为 $\frac{\theta(t)}{N} \cdot a\Delta t$，于是得到近似等式

$$\theta(t) - \theta(t + \Delta t) \doteq \frac{\theta(t)}{N} \cdot a\,\Delta t.$$

由此可得附有初始条件的形式的所要的微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{a}{N}\theta, \\ \theta(t)\big|_{t=0} = k. \end{cases}$$

在下面建立有关质点运动的微分方程时，其主要的依据是牛顿第二定律，即质点所受的力 F（指净力）等于该质点的

质量 m 与加速度 a 的乘积

$$F = ma.$$

而 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$，其中 s 是质点的位移，v 是质点运动的速度.于是，

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}.$$

例 6 （铅直下落与上抛运动）

（1） 一质量为 m 的物体，在空气中铅直下落，它除了受重力作用外，还受空气阻力的影响，假定空气阻力与运动速度成正比，并且已知当 $t=0$ 时，$v=0$，$s=0$，试求在任意时刻 t 时位移 $S(t)$ 及速度 $v(t)$ 所适合的微分方程.

（2） 一质量为 m 的小球以初速度 v_0 在空气中铅直上抛，假定小球所受空气阻力与速度的平方成正比，试建立小球上抛时速度 $v(t)$ 所适合的微分方程式.

解 （1） 我们取沿着质点铅直下落的直线为 OS 轴，其中原点 O 是取在质点开始下落时的初始位置.（图 1.3）

按题意，质点在运动过程中所受的力有两个：一个是重力 mg，它的方向与质点运动的方向一致；另一个是空气阻力，它正比于运动的速度 v，我们可记作 kv（这里 k 是正的常数），但是它的方向与质点运动的方向相反. 因此，作用在该质点上的净力是等于上面两个力的合力，其大小为 $mg-kv$；另一方面，由牛顿第二定律，这个力应当等于 $ma=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. 由此得到关于速度 $v(t)$ 所适合的微分方程是

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv, \\ v(t)\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

但是 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，故又可得到关于 $s(t)$ 所适合的微分方程为

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2s}{dt^2}=mg-k\dfrac{ds}{dt}, \\ s(t)|_{t=0}=0. \end{cases}$$

(2) 我们取小球铅直上抛的直线为 OS 轴，并取小球开始上抛时的初始位置为原点 O.（图 1.4）

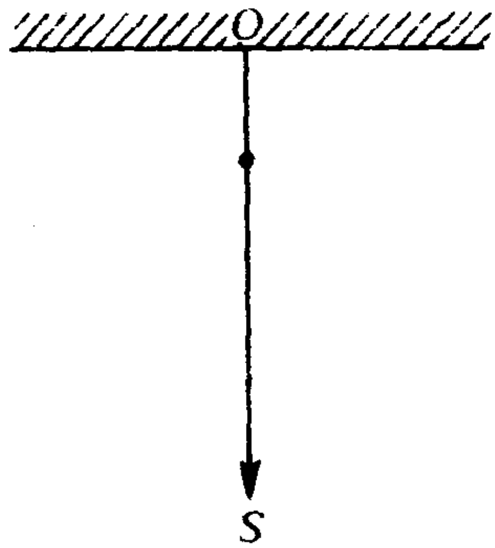

图 1.3

此时，作用在小球上的力有两个，一个是重力 mg，它与小球上抛运动的方向相反；另一个是空气阻力，它正比于速度的平方，我们可记作 $kv^2(k>0)$，它亦与小球上抛运动的方向相反. 如此，作用在小球上的净力为 $-mg-kv^2$，于是由牛顿第二定律，得到

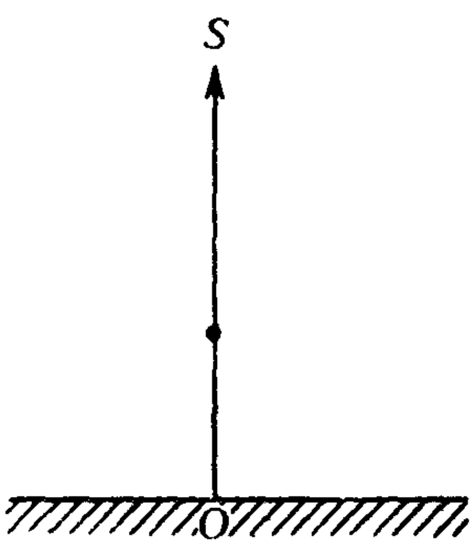

图 1.4

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-kv^2.$$

再考虑到当 $t=0$ 时，$v=v_0$，故最后可写成

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt}+kv^2+mg=0, \\ v(t)|_{t=0}=v_0. \end{cases}$$

例 7 （数学摆） 在一根长为 L 的细绳下端，悬挂着一质量为 m 的小球，先将它略为移动后，该小球即在重力作用下来回摆动，这种装置称为“数学摆”，试建立该数学摆上小球运动的方程.

解　假定细绳不会伸长又无重量，在悬挂点 O 处无摩擦力，也不计空气的阻力．这样，作用在小球上的力共有三个（图 1.5）：一个是重力 mg，在圆弧切线方向的分力 $F_1 = mg\sin\theta$，另一是 mg 在法线方向的分力 $F_2 = mg\cos\theta$，最后一个是绳子对小球的拉力 F_3，而 F_3 的大小与 F_2 相等，方向与 F_2 相反，故 $F_3 = -mg\cos\theta$.

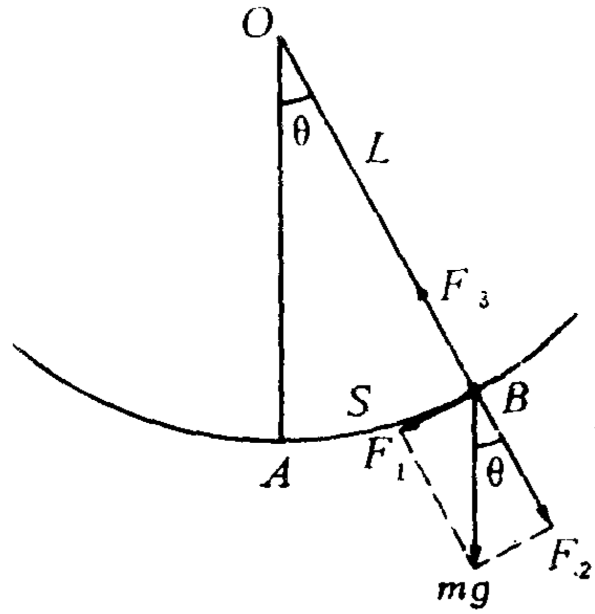

图 1.5

此外，我们对于小球偏离平衡位置 A 点的方向规定逆时针方向为正．这样，由于力 F_1 的方向总是指向平衡位置，因此它与小球偏离平衡位置的方向正好相反．

综上分析，作用在小球上的净力为

$$-mg\sin\theta + mg\cos\theta - mg\cos\theta = -mg\sin\theta.$$

由牛顿第二定律，即得

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta.$$

其中 s 为小球在时刻 t 时偏离平衡位置 A 的位移，即

$$s = \overset{\frown}{AB} = L\theta.$$

故
$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

于是上述方程最后可改写成