电磁场数值分析

盛剑霓 等 编著

科 学 出 版 社

电磁场数值分析

盛剑霓 等 编著

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书系统地论述了电磁场数值分析中常用的几种数值计算方法.基于工程应用的观点,阐明了各种方法的基本原理和使用要点.

全书内容包括:有限差分法,有限元法的基本原理和实施,二维等参元有限元法,三维场中的有限元法,非线性场中的有限元法,正弦时变场中的有限元法,矩量法,模拟电荷法与数值分析中的最优化方法初步等.书中有示例、框图和计算程序,可供参考.

本书适用于高等工科院校电类专业的高年级学生和研究生阅读,也可供从事电磁场研究的教师和科技工作者参考.

电磁场数值分析

盛剑霓 等 编著

责任编辑 范铁夫

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年1月第一版 开本:787×1092 1/32

1984年1月第一次印刷 印张:16 1/4

印数:0001—6,500 字数:368,000

统一书号:15031·531

本社书号:3311·15—5

定价:2.50元

序

电磁场与工农业生产、各种领域中的科学研究以及日常生活都有着十分密切的联系．电磁场的分析与计算是电气工程理论和应用的重要课题之一．

自1865年麦克斯韦奠定了经典的电磁理论以来，电气工程在理论与实际应用方面都获得了广泛的发展．就电磁场的分析计算而言，在本世纪六十年代随着电子计算机的发展有了一个新的开端，使大量工程电磁场问题有可能利用数值计算法获得符合工程精度要求的解答．电磁场的各种数值计算方法正是在这样的发展阶段中不断取得新的进展，并日益引起有关科学研究部门和工程技术界的重视．目前，电磁场数值分析已成为电气工程理论学科中的一个重要分支．

本书是作者在多年电磁场科研工作的基础上，结合电磁场理论教学的经验写成的．全书目的在于：从工程应用的观点出发，在不失数学严密性的前提下，阐明各种常用数值计算方法的基本原理及其使用要点，并提供了有关的计算公式、框图和程序，给出一些示例．从而，将有助于读者掌握和使用相应的数值计算方法，解决有关电磁场分析研究的课题．

基于上述目的，本书对数学内容的处理原则是：凡是对掌握和使用计算方法没有直接关联的数学问题，如数值计算方法的收敛性、唯一性及稳定性等，一概略去；而对有直接关联的数学问题，如电磁场问题的数学定解问题、等价变分问题、多元函数极值的求解方法等，则给予简明的阐述．

电磁场的基本方程组及其定解条件是本书的理论基础，为了便于读者学习、使用，在导言与有关章节中作了必要的回

顾.

本书由第一章至第八章系统地介绍了目前电磁场数值分析中常用的几种数值计算方法：有限差分法、有限元法、矩量法和模拟电荷法等．鉴于最优化技术在电磁场数值计算中已日益显示其重要性,因此在第九章中作了专门的讨论.

书中示例是以帮助读者了解和掌握基本内容为主要目的,故在选择、编写中贯穿了由浅入深,循序渐进的原则,并且特别注意到对于难点的剖析(如边界条件的给定等问题)．示例除个别外均由作者在计算机上解出，所使用的计算机有DJS-6、DJS-14、DJS-130、ANDROMIDA 西门子 7760 等机型．附录中提供的计算程序大部分用程序语言 ALGOL-60 编制，但对于通用性强的程序，如有限元法的计算程序(附录II) 同时用 ALGOL-60、FORTRAN IV 和 BASIC 三种程序语言编制,以满足不同读者的需要.

本书各章编著者的分工如下：第一、五、六章：倪光正；第二、七章：盛剑霓；第三章：陆忠亮；第四、五章：钱秀英；第八、九章：周佩白、肖衍明．全书由盛剑霓主编.

在本书编写、审稿和定稿过程中,西安交通大学电工原理教研室电磁场教学小组的同志们多次讨论书稿，对书稿进行了审查．沈明和田一涵两同志参与不少工作．本书还得到西安交通大学电工原理教研室，以及兄弟院校有关同志们的关心和支持,作者在此一并致以深切的谢意.

限于我们的水平,书中可能有不少不妥或错误之处,敬请读者批评指正.

编著者

1981 年 6 月于西安交通大学

导　言

1．随着近代科学技术的发展，电磁场有效控制和利用问题已经日益成为许多学科、工程技术部门研究的课题．但是，由于实际电磁场问题的复杂性，相当长时期以来，从解析方法着手进行的分析进展不大，难以获得满意的分析结果．六十年代开始，计算机和计算技术的飞速发展对科学、生产、生活等各个领域都产生了深刻的影响，并为电磁场数值分析的广泛应用奠定了基础．由此各种数值计算方法，例如有限差分法、有限元法、矩量法和模拟电荷法等相继应用于各类电磁场问题之中，使电磁场的分析研究取得了前所未有的进展并获得了大量成果．可以预期，在电磁场理论的应用研究中，电磁场数值分析这一分支今后将会不断充实和发展．

1865 年麦克斯韦奠定了经典的电磁理论，提出了电磁场普遍规律的数学描述——电磁场基本方程组(麦克斯韦方程组)．显然，这是研究电磁场问题的理论基础，也是本书论题——电磁场数值分析的出发点．

通常，电磁场基本方程组的微分形式表述为

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_c+\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0 \\ \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \end{cases} \tag{1}$$

电场与磁场各有关物理量之间的关系由所谓电磁场的辅助方程表征之，对于各向同性媒质，其关系是

$$\begin{cases}\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\\ \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}\\ \mathbf{J}_e=\gamma\mathbf{E}\end{cases}\tag{2}$$

2. 为便于分析计算，在电磁场问题的分析中，还引入辅助物理量——动态向量位 $\mathbf{A}$ 和动态标量位 φ，作为待求场量. 一般情况下，解得的电磁场场量将既是空间的又是时间的函数. 因此，在时变场范畴中，为定解偏微分方程组(1)，必须给定相应的初始条件和边界条件；只有当场量系非时变时，或者它的变化满足似稳条件，即系缓变场，并且忽略其中媒质损耗时，则由麦克斯韦方程组出发而得的场基本方程将归结为泊松或拉普拉斯方程. 以电场问题为例，若以电位函数 φ 为待求场量，那末，相应的泊松方程可记为

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}\tag{3}$$

而对 $\rho=0$ 的区域，泊松方程(3)即归结为拉普拉斯方程

$$\nabla^2\varphi=0\tag{4}$$

这时，为定解偏微分方程(3)或(4)，应给定场域的边界条件(边值)，构成电磁场的边值问题.

就场域边值而论，通常给定为下列三种情况：

(1) 给定的是整个场域边界上的位函数值

$$\varphi=f(p)\tag{5}$$

$f(p)$ 为边界点 p 的点函数. 这类问题称为第一类边值问题或第略赫利问题.

(2) 给定的是待求位函数在边界上的法向导数值

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=f(p)\tag{6}$$

称之为第二类边值问题或聂以曼问题.

(3) 给定的是边界上的位函数与其法向导数的线性组合

$$\varphi+f_1(p)\frac{\partial\varphi}{\partial n}=f_2(p) \tag{7}$$

称之为第三类边值问题.

3．当电磁场的场域由不同媒质构成时，在不同媒质的分界面上，媒质的特性系数 ε、μ、γ 发生突变，相应的场量一般也将发生突变，这时，为定解对应于不同媒质(如媒质 1 和媒质 2)的二个偏微分方程组 (1)，还必须规定分界面上场量所应满足的关系，这就是不同媒质分界面上的边界条件

$$\begin{cases} H_{1t}-H_{2t}=J_s \\ B_{1n}=B_{2n} \\ E_{1t}=E_{2t} \\ D_{2n}-D_{1n}=\sigma \\ J_{c2n}-J_{c1n}=-\dfrac{d\sigma}{dt} \end{cases} \tag{8}$$

若以位函数为待求场量，则对应于偏微分方程(3)或(4)所描述的电场问题，为定解引入的不同媒质分界面上的边界条件可表述为

$$\begin{cases} \varphi_1=\varphi_2 \\ \varepsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\sigma \end{cases} \tag{9}$$

而对于恒定磁场问题，则由向量磁位 $\mathbf{A}$ 描述的不同媒质分界面上的边界条件为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu_1}(\nabla\times\mathbf{A}_1)_t-\dfrac{1}{\mu_2}(\nabla\times\mathbf{A}_2)_t=J_s \\ A_1=A_2 \end{cases} \tag{10}$$

4．在对电磁场边值问题(位场)的数值计算中，根据其解答的唯一性定理，可采用类比法．这就是说，各种物理场，不论它们对应物理量的意义是否相同，只要它们具有相同的数学描述，即具有相似的微分方程和相似的边值，则它们的解答在形式上必完全相似．因而，在电磁场数值分析的基础上，我

表 1　由拉普拉斯方程描述的场间类比关系

静电场 (指没有空间电荷分布的区域)	导电媒质中的恒定电场 (指电源以外的区域)	恒定磁场 (指没有电流密度存在的区域)
$\nabla\times\mathbf{E}=0$ $\nabla\cdot\mathbf{D}=0$ $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ $Q=\int\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$ 当介质均匀时，则 $\nabla^2\varphi=0$	$\nabla\times\mathbf{E}_\gamma=0$ $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$ $\mathbf{J}=\gamma\mathbf{E}_\gamma$ $I=\int\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$ 当媒质均匀时，则 $\nabla^2\varphi_\gamma=0$	$\nabla\times\mathbf{H}=0$ $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ $\phi=\int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$ 当媒质均匀时，则 $\nabla^2\varphi_m=0$
$\mathbf{E}$——电场强度 $\mathbf{D}$——电位移 ε——介电常数 φ——电位 Q——电荷	$\mathbf{E}_\gamma$——电场强度 $\mathbf{J}$——电流密度 γ——电导率 φ_γ——电位 I——电流	$\mathbf{H}$——磁场强度 $\mathbf{B}$——磁感应强度 μ——磁导率 φ_m——磁位 ϕ——磁通量

表 2　在二维场（平行平面场）的情况下静电场和恒定磁场之间的类比关系

静电场	恒定磁场
$\nabla\times\mathbf{E}=0$ $\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$ $\tau=\int\rho\,dS$ 当介质均匀时，则 $\nabla^2\varphi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ $\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}=J_z\mathbf{k}$ * $I=\int J_z\,dS$ 当媒质均匀时，则 $\nabla^2A_z=-\mu J_z$
E——电场强度 D——电位移 φ——电位 ε——介电常数 ρ——自由电荷体密度 τ——自由电荷线密度	B——磁感应强度 H——磁场强度 A_z——向量磁位在 z 轴方向的分量 $\dfrac{1}{\mu}$——磁导率的倒数 J_z——电流密度在 z 轴方向的分量 I——电流

* 此处设无限长直载流导体的轴线与直角坐标系 z 轴相平行，故 $\mathbf{J}=J_z\mathbf{k}$。

们就能把某一位场的分析计算结果，推广到其他相似的位场中去，这将不仅意味着静电场、磁场与恒定电流场之间的类比（这三种物理场间的基本关系式和物理量的类比关系示于表1和表2中），而且也包含着电磁场与热传导场、重力场、流体场等之间的类比．从后一意义上来说，本书的论述也可作为上述其他物理场数值分析的借鉴．

为简明起见，本书中的讨论多数从静电场的角度提出问题，进行数值分析．根据类比概念，其数值分析结果可推广应用于恒定电流场、恒定磁场、似稳电磁场乃至于前述的其他类型的物理场．

目　录

序 ……………………………………………………………v
导言 …………………………………………………………vii

第一篇　有限差分法

第一章　有限差分法……………………………………………1
§1-1　概述 ……………………………………………………1
§1-2　差分运算的基本概念……………………………………1
§1-3　二维场的拉普拉斯方程与泊松方程的差分格式…………3
§1-4　差分方程组的求解………………………………………10
§1-5　场域边界条件与不同媒质分界面处边界条件离散化的差分格式……………………………………………………21
§1-6　圆形域的二维场计算……………………………………28
§1-7　轴对称场计算……………………………………………30
§1-8　场强与电、磁积分量的计算 ……………………………32
§1-9　示例………………………………………………………34
§1-10　时变电磁场中的有限差分法……………………………42
参考文献 ……………………………………………………53

第二篇　有限元法

引言……………………………………………………………54
第二章　有限元法的基本原理和实施…………………………56
§2-1　概述………………………………………………………56
§2-2　线性边值问题的等价变分问题…………………………56
§2-3　函数的分片展开、形状函数 ……………………………68
§2-4　二维拉普拉斯方程的有限元方程………………………73
§2-5　二维泊松方程的有限元方程……………………………82

§ 2-6 非齐次自然边界条件下的有限元方程……84
§ 2-7 轴对称场的有限元方程……87
§ 2-8 有限元方程的求解……95
§ 2-9 迦辽金有限元法……101
§ 2-10 场域的剖分……105
§ 2-11 示例……108
§ 2-12 等位线的绘制与电场强度的计算……119
参考文献……126
第三章 二维等参元有限元法……127
§ 3-1 概述……127
§ 3-2 自然坐标……127
§ 3-3 三角形单元中形状函数的构成……135
§ 3-4 四边形单元中形状函数的构成……140
§ 3-5 等参元、亚参元和超参元……145
§ 3-6 二维等参元有限元方程……148
§ 3-7 高斯积分法……154
§ 3-8 示例……157
参考文献……162
第四章 三维场中的有限元法……163
§ 4-1 概述……163
§ 4-2 三维电场的有限元方程……164
§ 4-3 三维磁场的有限元方程……171
§ 4-4 三维等参元有限元法……175
§ 4-5 示例……189
§ 4-6 有限元素的自动生成……199
参考文献……220
第五章 非线性场中的有限元法……221
§ 5-1 基本方程及其定解条件……221
§ 5-2 非线性边值问题的等价变分问题……224
§ 5-3 非线性磁场的有限元方程……230
§ 5-4 非线性媒质特性的数值逼近方法……236
§ 5-5 非线性代数方程组的求解……241

§ 5-6 示例 ……245
参考文献 ……248
第六章 时变场中的有限元法 ……249
§ 6-1 正弦时变场的基本方程及其定解条件 ……249
§ 6-2 正弦时变场边值问题的等价变分问题 ……254
§ 6-3 波导场的有限元方程 ……258
§ 6-4 二维涡流场的有限元方程 ……264
§ 6-5 示例 ……268
§ 6-6 广义代数特征值问题的求解 ……270
参考文献 ……274

第三篇 矩量法、模拟电荷法

引言 ……275
第七章 矩量法 ……277
§ 7-1 概述 ……277
§ 7-2 矩量法的基本原理 ……277
§ 7-3 静电场(均匀介质)中的矩量法 ……287
§ 7-4 静电场(分层介质)中的矩量法 ……296
§ 7-5 二维电场中系数矩阵的计算 ……298
§ 7-6 坐标变换 ……301
§ 7-7 使用有限元剖分的矩量法 ……307
§ 7-8 二维恒定磁场中的矩量法 ……310
§ 7-9 二维涡流场中的矩量法 ……312
§ 7-10 二维散射场中的矩量法 ……314
§ 7-11 线形天线辐射场中的矩量法 ……322
§ 7-12 矩量方程的求解 ……331
§ 7-13 整域基和分域基的转换 ……335
§ 7-14 示例 ……337
参考文献 ……344
第八章 模拟电荷法 ……346
§ 8-1 概述 ……346

§ 8-2 模拟电荷法 ……347
§ 8-3 常用模拟电荷的类型及计算公式 ……353
§ 8-4 计算示例 ……369
§ 8-5 模拟电荷法应用举例 ……375
§ 8-6 模拟电荷-有限元法 ……384
§ 8-7 模拟电荷-矩量法 ……397
参考文献 ……405

第四篇 数值分析中的最优化方法初步

第九章 无约束最优化方法 ……407
§ 9-1 概述 ……407
§ 9-2 最优化方法的理论基础 ……409
§ 9-3 处理无约束最优化问题的基本思想 ……420
§ 9-4 解无约束最优化问题的解析法 ……423
§ 9-5 变尺度法的计算过程及举例 ……436
§ 9-6 一维搜索法 ……442
§ 9-7 非线性最小二乘法 ……454
§ 9-8 用变尺度法求模拟电荷的最佳位置及其电荷值 ……458
参考文献 ……462
附录 I 有限差分法计算程序(§ 1-9 例 1-1) ……464
附录 II 拉普拉斯场的有限元法通用程序 ……466
(1) 程序语言：ALGOL-60 ……466
(2) 程序语言：FORTRAN IV ……471
(3) 程序语言：BASIC ……477
附录 III 二维等参元有限元法通用程序 ……483
附录 IV 三角元逐次细分法程序 ……490
附录 V 计算带电导板的电荷密度及电容的矩量法程序 ……496
附录 VI 计算棒形电极对地电场的模拟电荷法程序 ……501

第一篇　有限差分法

第一章　有限差分法

§1-1　概　　述

在电磁场数值分析的计算方法中，有限差分法(也称网格法)是应用最早的一种方法．早在本世纪五十年代，有限差分法以其简单、直观的特点，在电磁场数值分析领域内得到了广泛的应用．近代科学的发展，使方法本身经历了由手算到计算机运算的变革，与此相应，方法涉及的方面也由线性场扩展到非线性场；由恒定场扩展到时变场．虽然现阶段电磁场数值计算方法发展很快，即使是在有限差分法与变分法相结合的基础上形成的有限元法日益得到广泛的应用，有限差分法以其固有的特点仍然是一种不可忽视的数值分析方法．

本章从差分运算概念着手介绍有限差分法的基本原理．结合方法的实际应用，重点阐述在正方形网格划分情况下，二维场与轴对称场的泊松和拉普拉斯方程的差分格式，并较全面地介绍各种类型边界条件离散化的差分格式．本章还讨论差分方程组的一般解法，场强、积分量差分处理方法，最后分析时变场中有限差分法的应用．

§1-2　差分运算的基本概念

1．设函数 $f(x)$，其独立变量 x 得一很小的增量 $\Delta x=h$，则相应地函数 $f(x)$ 的增量

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x) \tag{1-1}$$

称为函数 $f(x)$ 的差分(一阶差分). 它与微分不同, 因为差分是有限量的差, 故通常也被称为有限差分. 但是, 只要增量 h 很小, 差分 Δf 与微分 df 之间的差异将很小.

根据差分的定义, 在差分运算中还常使用一阶中心差分

$$\Delta f(x)=f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right) \tag{1-2}$$

而一阶差分 Δf 除以增量 h 的商, 即一阶差商

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1-3}$$

将接近于一阶导数 $\frac{df}{dx}$.

一阶差分仍是独立变量 x 的函数, 相类似地按式(1-1)计算一阶差分的差分, 就得到 $\Delta^2 f(x)$, 称之为原始函数 $f(x)$ 的二阶差分. 同样, 当 h 很小时, 二阶差分 $\Delta^2 f(x)$ 很接近于二阶微分 $d^2 f$.

显然, 二阶差商

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{(\Delta x)^2}=\frac{\Delta f(x+h)-\Delta f(x)}{h^2} \tag{1-4}$$

近似于二阶导数 $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

依同理, 可定义更高阶的差分与差商. 由于高阶差分、差商在电磁场数值分析的有限差分法中没有实际应用, 这里不再予以讨论.

2. 有限差分法是以差分原理为基础的一种数值计算法, 它用各离散点上函数的差商来近似替代该点的偏导数, 把需求解的边值问题转化为一组相应的差分方程问题. 然后, 根据差分方程组(代数方程组), 解出位于各离散点上的待求函数值, 便得所求边值问题的数值解.

有限差分法(以后简称为差分法)是把电、磁场连续场域内的问题变换为离散系统的问题来求解；也就是说，通过网格状离散化模型上各离散点(节点)的数值解来逼近连续场域内的真实解，因此是一种近似的计算方法，但现阶段电子计算机在存贮容量和运算速度方面的发展水平，已能充分保证它的计算精度.

§1-3 二维场的拉普拉斯方程与泊松方程的差分格式

1. 本节以二维泊松场问题为例来具体阐明差分法的应用. 设如图1.1所示，在一由边界C界定的二维场域D内，电位函数φ满足如下的第一类边值问题:

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=P \quad \text{在}D\text{域内} & (1\text{-}5) \\ \varphi|_C=f(p) & (1\text{-}6) \end{cases}$$

上式中$P=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$，在一般情况下，$P$为坐标变量$x$、$y$的函数.

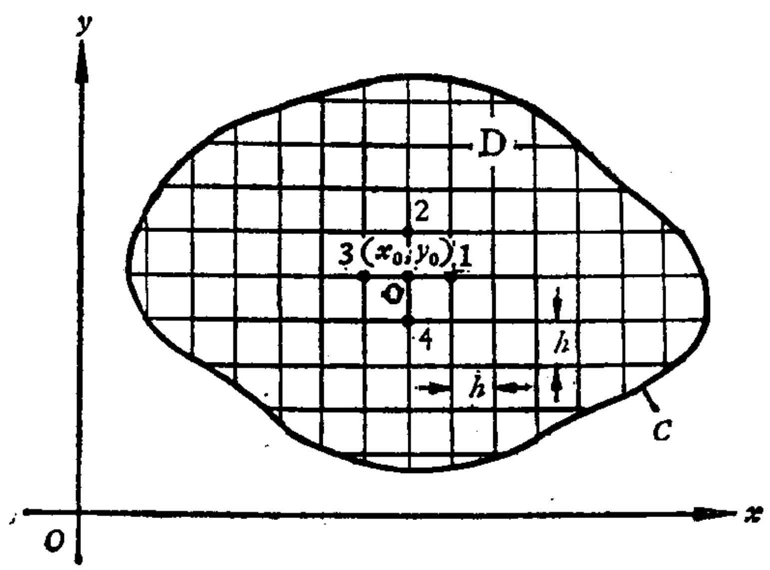

图 1.1