

中国科学院测量与地球物理研究所编辑

测量与地球物理集刊

ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA

5

科学出版社

测量与地球物理集刊 第5号

(1984)

目 录

论自由网平差中的确定函数·····	周江文 (1)
单站确定多普勒极坐标的数学模式·····	宋文尧 (3)
积分多普勒计数中相对论效应的影响·····	宋成骅、李毓麟 (13)
拟稳平差法的若干应用·····	陶本藻 (27)
皖北水准监测网的平差问题·····	庄昆元、叶 刚 (37)
卫星源射电干涉测地系统数据的相关分析及其模拟·····	王广运 (53)
水平温度梯度引起的反常折射·····	胡宁生、高布锡 (63)
激光卫星白天测距的预报和搜索·····	朱文耀、许华冠、林钦畅 (67)
固体潮对精密水准测量的影响·····	方 俊 (75)
天文重力水准计算公式的改化·····	许厚泽 (79)
局部地区扰动位协方差的一种形式·····	张赤军、刘燕平 (85)
负荷勒夫数的理论计算·····	毛伟建 (91)
覆盖层法计算高空扰动重力·····	蒋福珍、蔡少华、宋明、管晓蓉 (105)
一种新的平均时刻记时仪·····	谢亮云 (113)
锁相放大器在相对重力测量中的应用·····	梁础坚 (119)
CHZ海洋重力仪恒温槽设计·····	叶 斌 (125)
固体潮重力定时自动打印记录仪·····	陶国祥、苏炳权 (135)
固体潮数字穿孔纸带自动接口电路·····	林丙华 (141)
论圆锥投影及其在中国全图的应用·····	孟嘉春 (147)

ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA, No. 5

(1984)

CONTENTS

Estmable Parameters in Free Net Adjustment	Zhou Jiangwen (2)
The Determination of Mathematical Model of Doppler Polar Coordinates from a Single Station	Song wenyao (11)
The Relativistic Effect on the Integrated Doppler Counts	 Song Chenghua Li Yulin (26)
Applications of Quasi-Stable Adjustment	Tao Benzao (35)
An Adjustment of Monitoring Levelling Net in North Anhui	 Zhuang Kunyuan Ye Gang (45)
Data Correlation Analysis and Simulation of Satellite Emission Radio Interferometric Earth Surveying System	Wang Guangyun (61)
On the Anomalous Refraction Caused by Horizontal Gradient of the Temperature...	 Hu Ningsheng Gao Buxi (66)
Satellite Prediction and Scan for Laser Ranging in the Daytime	 Zhu Wenyao Xu Huaguang Lin Qinchang (74)
Effect of Solid Earth Tides On Precision Levelling Measurements	 Fang Tsüu (78)
Modification on Formula of Astro-gravimetric Levelling Computation	 Hsu Houtze (84)
A Form of Local Covariance Function of Disturbing Potential	 Zhang Chijun Lin Yanping (90)
Theoretical Calculation of Load Love Numbers	Mao Weijian (104)
Determination of Disturbing Gravity Field Outside the Earth by using Coating Method	Jiang Fuzhen Cai Shachua Song Ming Guan Xiaorong (112)
A New Averaging Timer	Xie Liangyun (118)
Application of Lock-in Amplifier (LIA) to Relative Gravity Measurements	 Liang Chujian (124)
Design of Thermostate for CHZ Seagravimeter	Yie Bin (134)
A Timed Autoprinting Recorder for Earth Tides and Gravity Measurements	 Tao Guoxiang Su Bingquan (140)
Design of Self-checking Interface for Digital Punched Tape used in Earth Tides Measurement	Lin Binghua (145)
On Conical Projection and Its Application to the general Map of China	 Meng Jiachun (160)

论自由网平差中的确定函数*

周 江 文

自由网平差的解是不定的,必须输入某些附加条件才有确定解。随着附加条件不同,平差结果也不同。但有某些函数,它们的估值在所有解中不变,称为确定函数。有不少学者,如 W. Baarda, J. Bossler, E. Grafarend, B. Schaffrin, K. R. Koch 等从不同角度研究了这个问题。我们这里只在平差范围内研究它。

下面将给出确定函数的一个完全组的显式,并进一步指明它们估值的性质。

$$\underset{n \times m}{A} \underset{m \times 1}{X} = L + V \quad \text{权 } P \quad (1)$$

r 是 A 的秩,记在 A 之上,设 $r < m$, P 正定。

将 A, X 作如下分块

$$\left(\underset{n \times r}{A_1} \underset{n \times (m-r)}{A_2} \right) \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = L + V \quad (2)$$

$$\text{令 } A = A_1 \begin{pmatrix} I_r & D \end{pmatrix}, \text{ 其中 } A_1 D = A_2 \quad (3)$$

以 $A_1'P$ 左乘,得

$$N_{11}D = N_{12} \quad (4)$$

$N_{11} = A_1'PA_1$ 正定, $N_{12} = A_1'PA_2$, 由是得

$$D = N_{11}^{-1}N_{12} \quad (5)$$

而观测方程可写成

$$AX = A_1(X_1 + N_{11}^{-1}N_{12}X_2) = \underset{n \times r}{A_1} \underset{r \times 1}{\bar{X}_1} = L + V \quad (6)$$

(6) 式就 $\bar{X}_1$ 而言是常规观测方程,由它作法方程得

$$N_{11}\bar{X}_1 = A_1'PL$$

于是得

$$\bar{X}_1 = N_{11}^{-1}A_1'PL \quad (7)$$

$\bar{X}_1$ 的权逆

$$Q_{\bar{X}_1} = N_{11}^{-1} \quad (8)$$

$\bar{X}_1$ 直接由观测方程求定,与附加条件无关,因此是不变的。而 $\bar{X}_1$ 是一组确定函数。按照常规误差理论, $\bar{X}_1$ 及其任意线性函数估值无偏且方差极小。从已有的研究容易证明无关确定函数只能有 r 个,因此 $\bar{X}_1$ 构成确定函数空间的基底。

[例] 水准网如图 1。数字请参看 [4] 的算例。此例

* 1982 年 4 月收稿。

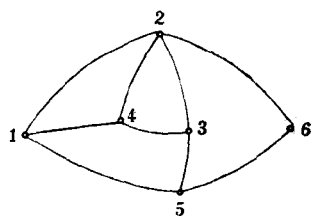


图 1

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = x_1$$

误差方程式系数之和为 0,

由是 $N_{11}^{-1}N_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$

而

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_5 - x_1 \\ x_6 - x_1 \end{bmatrix}$$

即诸点相对 1 的高差,由这些高差组合的函数都是确定函数。

参 考 文 献

- [1] Grafarend, E., Schaffrin, B. (1974) Unbiased Free Net Adjustment, *Survey Review*, XXII, 171.
- [2] Grafarend, E., Schaffrin, B. (1976) Estimable Quantities in Geodetic Networks, *ZfV* 101, 11.
- [3] Koch, K. R. (1975) Herleitung der Methode der Kleinsten Quadrate mit Hilfe Generalisierter Matrix Inversen, *ZfV* 100, 12.
- [4] 周江文: 监测网的拟稳平差,中国科学院测量与地球物理研究所专刊,第 2 号,1980 年。

ESTMABLE PARAMETERS IN FREE NET ADJUSTMENT

Zhou Jiangwen

(Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences)

ABSTRACT

The problem of estimable parameters in a free net adjustment has been well studied. This paper gives out an explicit formulation of a complete set of estimables, together with their estimate properties.

单站确定多普勒极坐标的数学模式*

宋文尧

摘 要

本文推导了利用积分型和微分型接收机单站确定极坐标的两种数学模式,着重指出:由轨道坐标系的卫星位置变换至地心坐标系后,必须引进极坐标概略值,再转至准瞬时轴上,这样才能推算出相对于 CIO 原点的极坐标 (x_p, y_p) 。其次我们推导并解释了日本水泽纬度站利用多普勒观测确定测站地心坐标研究经纬度变化的计算公式。

目前利用 NNSS Transit 卫星确定极移有两种方法,即综合解和单站解。所谓综合解是指利用台网的观测数据,按一定的数学模型,把定轨、定站、定极坐标以及其他参数同时解出^{[1][2]},这是 DPMS 和 MEDOC 试验所采用的方法。所谓单站解是在顾及外力摄动的前提下,由于坐标系变化所引起卫星轨道在空间位置的变化,反映出极移附加摄动。因此在研究这个问题时有两个要点,即

- (1) 必须具备卫星的精密星历,
- (2) 坐标系的变化是指由地心坐标系转换到惯性坐标系,或者逆运算,其简式为

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{惯性系}} = R[A]R[B]R[C]R[D] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{地心坐标系}}$$

式中 $R[A]$ 、 $R[B]$ 、 $R[C]$ 、 $R[D]$ 分别为岁差、章动、恒星时角、极移的旋转阵。假设在坐标系的变换过程中,不考虑极移,或者以极移分量的概略值代入,那么多普勒理论计算值(即多普勒计数,视向速度 ρ 等)与实际观测值之间引进系统误差,统称多普勒残差,分析这些残差并推算出卫星轨道的极移摄动量 Δi 、 $\Delta \omega$ 、 Δf ,从而确定极坐标 x_p, y_p ,或者确定对极坐标概略值的修正。

本文推导了积分型和微分型多普勒观测的两种数学模式,同时介绍日本水泽纬度站利用多普勒观测研究纬度变化的方法。

一、极坐标与极移摄动量 Δi 、 $\Delta \omega$ 、 Δf 的关系

瞬时轴相对于协议原点(CIO)而运动并产生极移。以 CIO 所定义的赤道称为 CIO 赤道,以瞬时轴所定义的赤道称为瞬时赤道。极移分量反映了两种赤道之间的轨道根数 i 、 ω 、 f 和 Q 的变化,这种变化量可以计算出极的振幅 ϕ 和相位 A ,从而反演为极坐标

* 1982 年 1 月收稿。

x_p, y_p

Lambeck^[3] 最先论述了这个问题并给出非极轨道的关系式, 接着 Melchior^[4] 给出了 NNSS 卫星极轨道关系式, 后者是前者的特例(即 i 角接近 90°) 如图 1 所示。

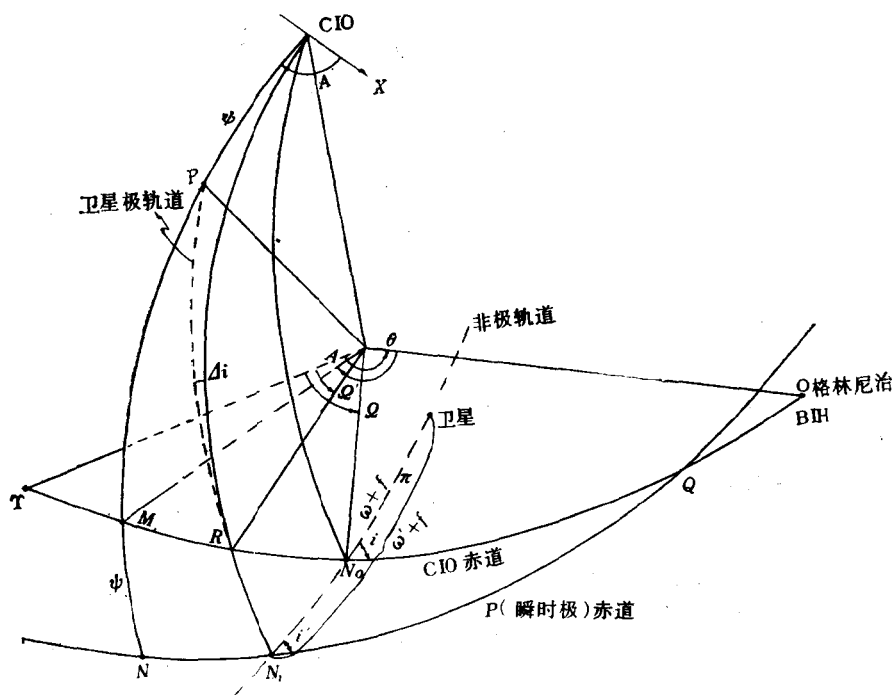


图 1

i 为倾角 $u = \omega + f$ 为升交角距 Q 为升交点赤经

图中 P_c 为原点 CIO, P 为瞬时极, A' 实际上是从格林尼治子午线所起算的 P 轴的方位角, Q 为 CIO 赤道与瞬时赤道的交点, θ' 为格林尼治恒星时角。

对于 NNSS 卫星来说, 其公式为

$$\Delta i = i' - i = -\psi \sin(Q' - \theta' - A') \quad (1)$$

$$\Delta u = u' - u = \psi \cos(Q' - \theta' - A') \quad (2)$$

求出 ψ, A' , 可以反演为极坐标

$$x_p = \psi \cos A' \quad (3)$$

$$y_p = \psi \sin A' \quad (4)$$

公式(1)(2)(3)(4)是推算极坐标的基本方程式。从上述公式可见, Δi 和 Δu 具有正弦和余弦变化, 两者相位差为 90° , Q 和 A' 在一天内变化不大, 而恒星时角 θ' 具有周日周期, 因此极移摄动量具有近周日周期。

二、从多普勒残差中求 $\Delta i, \Delta \omega, \Delta f$

在演算之前, 提出几个前提, 即①必须采用精密星历, 而精密星历已经顾及外力摄动

2005.6.6

和极移影响,因此本文着重指出: 在将卫星轨道坐标系 U, V, W 转换为地心坐标系后,必须有意引进极坐标概略值 x_{0p}, y_{0p} , 再转置为准瞬时自转轴上,即

$$\begin{bmatrix} x_{0s} \\ y_{0s} \\ z_{0s} \end{bmatrix} = R_1(y_{0p})R_2(x_{0p})R_3(-\beta)R_1(-i)R_3(-\omega) \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (5)$$

②测站坐标必须十分精确,为此 DPMS 和 MEDOC 做了大量工作,③多普勒数据经过取舍和电离层,对流层改正。

模式 I 由积分型多普勒计数残差确定 $\Delta i, \Delta u$ 。

积分多普勒计数公式为

$$N = \int_{t_i + \rho_1/c}^{t_{i+1} + \rho_2/c} (f_g - f_r) dt \quad (6)$$

令 $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ (积分时间间隔)

$$\rho_2 - \rho_1 = \Delta \rho$$

(6)式为

$$N = (f_g - f_r)\Delta t + \frac{f_g}{c} \Delta \rho \quad (7)$$

$$\rho_i = [(x_{0s,i} - x_g)^2 + (y_{0s,i} - y_g)^2 + (z_{0s,i} - z_g)^2]^{1/2} \quad (8)$$

式中 f_g 为接收机本振频率, f_r 为接收频率, f_s 为卫星发射频率, ρ_i 为时刻 i 测站至卫星距离, c 为光速。测站坐标误差为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, f_g 和 f_s 存在频偏 ($\Delta f'_g$ 和 $\Delta f'_s$) 以及频漂 ($\Delta f''_g$ 和 $\Delta f''_s$), 这些代入多普勒的理论计算值 N_c 中,则

$$f_g = f_{g0} + \Delta f'_g + \Delta f''_g$$

$$f_s = f_{s0} + \Delta f'_s + \Delta f''_s$$

式中 f_{g0} 和 f_{s0} 为本振频率和卫星发射频率的采用值。

$$N_0 = (f_{g0} - f_{s0})\Delta t + \frac{f_g}{c} \Delta \rho_0 \quad (9)$$

$\Delta \rho_0$ 为距离差,根据卫星坐标和站坐标采用值所计算的。

多普勒的理论计算值为

$$N_c = N_0 + (\Delta f''_g - \Delta f''_s)\Delta t$$

多普勒计数残差为

$$\Delta N_i = N_{c,i} - N_{obs,i} \quad (10)$$

残差 ΔN_i 主要是由于站坐标误差、观测误差以及极移摄动所引起的轨道根数变化所致,即

$$\begin{aligned} \Delta N_i = & \frac{f_g}{c} \frac{\partial \Delta \rho_i}{\partial x_g} \Delta x + \frac{f_g}{c} \frac{\partial \Delta \rho_i}{\partial y_g} \Delta y + \frac{f_g}{c} \frac{\partial \Delta \rho_i}{\partial z_g} \Delta z \\ & + \frac{\partial N_{c,i}}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial N_{c,i}}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial N_{c,i}}{\partial i} \Delta i + \frac{\partial N_{c,i}}{\partial \Omega} \Delta \Omega \\ & + \frac{\partial N_{c,i}}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial N_{c,i}}{\partial f} \Delta f \end{aligned} \quad (11)$$

组成误差方程式为

$$v_i = (\Delta f''_g - \Delta f''_s)\Delta t$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f_g}{c} \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x_g} \Delta x + \frac{f_g}{c} \frac{\partial \Delta \rho}{\partial y_g} \Delta y + \frac{f_g}{c} \frac{\partial \Delta \rho}{\partial z_g} \Delta z \\
& + \frac{\partial N_c}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial N_c}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial N_c}{\partial i} \Delta i + \frac{\partial N_c}{\partial \Omega} \Delta \Omega + \frac{\partial N_c}{\partial \omega} \Delta \omega \\
& + \frac{\partial N_c}{\partial f} \Delta f + (N_{obs,i} - N_0)
\end{aligned} \quad (12)$$

上述方程式系数都与测站到卫星的距离差的偏导数有关,下面列出误差方程式系数。

令

$$\begin{aligned}
X_G &= [x_{0g}, y_{0g}, z_{0g}] \\
R_i(X_G) &= \frac{\partial \rho_i}{\partial X_G} = \left[-\frac{x_{0s,i} - x_{0g}}{\rho_i}, -\frac{y_{0s,i} - y_{0g}}{\rho_i}, -\frac{z_{0s,i} - z_{0g}}{\rho_i} \right]
\end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial X_G} = R_i^T(X_G) - R_{i+1}^T(X_G) \quad (14)$$

再令

$$\begin{aligned}
X_s &= [x_{0s}, y_{0s}, z_{0s}] \\
R_i(X_s) &= \frac{\partial \rho_i}{\partial X_s} = \left[\frac{x_{0s,i} - x_{0g}}{\rho_i}, \frac{y_{0s,i} - y_{0g}}{\rho_i}, \frac{z_{0s,i} - z_{0g}}{\rho_i} \right]
\end{aligned} \quad (15)$$

轨道坐标系的卫星坐标为

$$R_i(S) = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a \sin E \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos f / (1 + e \cos f) \\ a \sin f / (1 + e \cos f) \\ \eta \end{bmatrix}$$

上式把偏近点角 E , 化算为真近点角 f , 略去了 e^2 项所得^[5]。

$$R_3(-\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$R_1(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$R_3(-\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$\beta = \Omega - \theta$, θ 为恒星时

$$R_2(x_{0p}) = \begin{bmatrix} \cos x_{0p} & 0 & -\sin x_{0p} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin x_{0p} & 0 & \cos x_{0p} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$R_1(y_{0p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_{0p} & \sin y_{0p} \\ 0 & -\sin y_{0p} & \cos y_{0p} \end{bmatrix} \quad (20)$$

将(19)(20)公式合并,写成极移旋转阵为

$$R(p) = R_1(y_{0p})R_2(x_{0p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_{0p} \\ 0 & 1 & y_{0p} \\ x_{0p} & -y_{0p} & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

公式(5)可写成

$$X_s^T = R(p)R_3(-\beta)R_1(-i)R_3(-\omega)R(S) \quad (22)$$

根据(22)式对六个轨道根数求偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial a} &= \frac{\partial \rho_i}{\partial X_s} \cdot \frac{\partial X_s}{\partial a} = R_i(X_s)R(p)R_3(-\beta)R_1(-i)R_3(-\omega) \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} \cos f/(1 + e \cos f) \\ \sin f/(1 + e \cos f) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial e} &= \frac{\partial \rho_i}{\partial X_s} \frac{\partial X_s}{\partial e} = R_i(X_s)R(p)R_3(-\beta)R_1(-i)R_3(-\omega) \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} -a \cos^3 f/(1 + e \cos f)^2 \\ -a \sin f \cos f/(1 + e \cos f)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial i} &= \frac{\partial \rho_i}{\partial X_s} \cdot \frac{\partial X_s}{\partial i} = R_i(X_s)R(p)R_3(-\beta) \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin i & -\cos i \\ 0 & \cos i & -\sin i \end{bmatrix} \cdot R_3(-\omega)R(s) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Omega} &= \frac{\partial \rho_i}{\partial X_s} \cdot \frac{\partial X_s}{\partial \Omega} = R_i(X_s)R(p) \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} -\sin \beta & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot R_1(-i)R_3(-\omega)R(s) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial \omega} &= \frac{\partial \rho_i}{\partial X_s} \cdot \frac{\partial X_s}{\partial \omega} = R_i(X_s)R(p)R_3(-\beta)R_1(-i) \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} -\sin \omega & -\cos \omega & 0 \\ \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot R(s) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial f} &= \frac{\partial \rho_i}{\partial X_s} \frac{\partial X_s}{\partial f} = R_i(X_s)R(p)R_3(-\beta)R_1(-i)R_3(-\omega) \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} -a \sin f/(1 + e \cos f)^2 \\ a(\cos f + e)/(1 + e \sin f)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

令 $K = [a, e, i, \Omega, \omega, f]$

$$R_i(K) = \left[\frac{\partial \rho_i}{\partial a}, \frac{\partial \rho_i}{\partial e}, \frac{\partial \rho_i}{\partial i}, \frac{\partial \rho_i}{\partial \Omega}, \frac{\partial \rho_i}{\partial \omega}, \frac{\partial \rho_i}{\partial f} \right] \quad (29)$$

$$\frac{\partial N_c}{\partial K} = \frac{f_s}{c} \frac{\partial \Delta \rho_i}{\partial K} = \frac{f_s}{c} [R_{i+1}^T(K) - R_i^T(K)] \quad (29')$$

根据误差方程式组成法方程式,解出 Δi , $\Delta \omega$, Δf , 而 $\Delta u = \Delta \omega + \Delta f$ 。

模式 II 由视向速度残差确定 Δi , Δu 。

按微分型多普勒观测,其多普勒频移公式为

$$f_r = f_s \left(1 - \frac{1}{c} \dot{\rho}(t) \right)$$

$$N_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f_s - f_r) dt = (f_s - f_s) \Delta t + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f_s - f_r) dt$$

上式中 $\dot{\rho}(t)$ 为时刻 t 的测站到卫星的距离 $\rho(t)$ 的变率, Δt 为微分多普勒接收机的计数时间间隔,取计数间隔的中央时刻 $\bar{t}_i = \frac{1}{2} (t_{i+1} + t_i)$,

$$\dot{\rho}_{obs}(t) = \frac{c}{f_s} \frac{N_i}{\Delta t} - \frac{c}{f_s} (f_s - f_r) \quad (30)$$

上式为微分多普勒的基本公式,按公式(30)所计算的视向速度,称为观测值,另外通过卫星轨道和时标信息,求出卫星坐标和速度,并引进准确的站坐标,可以计算出视向速度的理论计算值 $\dot{\rho}_c$,下面叙述推导过程。

从公式(22)可以求出卫星的瞬时坐标为

$$X_s = [x_{0s}, y_{0s}, z_{0s}]$$

$$X_s^T = R(p)R_3(-\beta)R_1(-i)R_3(-\omega)R(S)$$

令

$$R(p)R_3(-\beta)R_1(-i)R_3(-\omega) = R(T) \quad (31)$$

卫星的速度 $(\dot{x}_{0s}, \dot{y}_{0s}, \dot{z}_{0s})$ 的公式为

$$X_s^T = R(T)R(S)$$

$$\dot{X}_s^T = R(T)\dot{R}(S) + \dot{R}(T)R(S) \quad (32)$$

根据公式(15)可求得

$$\dot{R}(S) = \begin{bmatrix} \dot{a}(\cos E - e) - \dot{E}a \sin E \\ \dot{a} \sin E + \dot{E}a \cos E \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} \quad (33)$$

(33)式中

$$\dot{a} = \Delta \dot{a}$$

$$\dot{E} = \dot{M}(1 + e \cos M) + \Delta \dot{E}$$

$$\dot{M} = n$$

$$\dot{R}(T) = R(p)\dot{R}_3(-\beta)R_1(-i)R_3(-\omega) + R(p)R_3(-\beta)R_1(-i)\dot{R}_3(-\omega) \quad (34)$$

在(34)式中

$$\dot{R}_3(-\beta) = (\dot{\beta} - \dot{\theta}) \begin{bmatrix} -\sin \beta & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\dot{R}_3(-\omega) = -\dot{\omega} \begin{bmatrix} \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ -\cos \omega & \sin \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

根据公式(8)可求得视向速度的理论计算值为

$$\dot{\rho}_c = \frac{1}{\rho_i} [\dot{x}_{0s,i}(x_{0s,i} - x_g) + \dot{y}_{0s,i}(y_{0s,i} - y_g) + \dot{z}_{0s,i}(z_{0s,i} - z_g)] \quad (37)$$

组成多普勒残差为

$$\Delta \dot{\rho}_i = \dot{\rho}_{c,i} - \dot{\rho}_{obs,i} \quad (38)$$

上述残差是由于测站坐标误差,频漂和极移摄动所引起卫星轨道根数变化所致。

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\rho}_i = & \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial x_g} \Delta x + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial y_g} \Delta y + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial z_g} \Delta z \\ & + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial i} \Delta i + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial \Omega} \Delta \Omega + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial \omega} \Delta \omega \\ & + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial f} \Delta f + \frac{c}{f_s} (\Delta f_g'' - \Delta f_s'') \end{aligned} \quad (39)$$

上式中:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial x_g} &= -\frac{1}{\rho_i} \left[\dot{x}_{0s,i} - \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} (x_{0s,i} - x_g) \right] \\ \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial y_g} &= -\frac{1}{\rho_i} \left[\dot{y}_{0s,i} - \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} (y_{0s,i} - y_g) \right] \\ \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial z_g} &= -\frac{1}{\rho_i} \left[\dot{z}_{0s,i} - \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} (z_{0s,i} - z_g) \right] \\ \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial K} &= \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial \rho_i} R_i^T(K) \end{aligned}$$

其误差方程式为

$$\begin{aligned} v_i = & \frac{c}{f_s} (\Delta f_g'' - \Delta f_s'') + (\dot{\rho}_{obs,i} - \dot{\rho}_{c,i}) \\ & + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial x_g} \Delta x + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial y_g} \Delta y + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial z_g} \Delta z \\ & + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial i} \Delta i + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial \Omega} \Delta \Omega + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial \dot{\rho}_c}{\partial f} \Delta f \end{aligned} \quad (40)$$

组成法方程式后求解 Δi 、 $\Delta \omega$ 、 Δf 。而 $\Delta u = \Delta \omega + \Delta f$ 。

综上所述,单站计算多普勒极坐标分三个步骤,即第一求订 Δi 、 Δu ,第二求订 ϕ 、 A' ,第三求订极坐标 x_p 、 y_p 。在此着重强调:在利用以 CIO 为极原点的精密星历单站解时,必须在轨道坐标系转换为地心坐标系后,引进极坐标概略值,转置成准确瞬时极再进行解算。忽视这个问题所解出的值不是瞬时自转轴相对于 CIO 的 x_p 、 y_p ,而是对精密星历所采用的极坐标的修正,这就是本文所阐述的观点。

三、单站利用多普勒定位来研究纬度变化

日本水泽纬度站利用美国国防制图局所提供的多普勒极坐标和精密星历来研究纬度变化。在文献[7]中,说明了求定纬度变化的步骤,但没有推导出公式和说明方法的理论

依据,本文试图来解释这种方法并提出应注意的问题。

文献^[7]指出:“多普勒观测的经纬度变化获自 DMATC 所提供的数据:

(极移)
 +(观测定位地心位置的五天平均值)
 +(30190 号卫星每次经过的定位残差)
 -(所采用的经纬度)”。

首先根据 DMATC 所提供的极坐标和依据精密星历所测定的测站地心坐标,将测站地心坐标测定值 (x_g, y_g, z_g) , 由 CIO 原点转置为瞬间极即

$$\begin{bmatrix} x'_g \\ y'_g \\ z'_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_p \\ 0 & 1 & y_p \\ x_p & -y_p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_g - x_p z_g \\ y_g + y_p z_g \\ x_p x_g - y_p y_g + z_g \end{bmatrix} \quad (41)$$

其次反求大地经度 L 、大地纬度 B 和大地高 h , 其公式为

$$\operatorname{tg} L = y'_g / x'_g \quad (42)$$

$$\operatorname{tg} B = (z'_g + e^2 N \sin B) / (x'^2_g + y'^2_g)^{1/2} \quad (43)$$

$$h = \{x'_g / (\cos B \cos L)\} - N \quad (44)$$

公式(43)(44)中 N 为卯酉圈曲率半径, e 为偏心率,该两公式需要迭代计算,这一步骤可利用 MX-1502 多普勒接收机中的微处理机运算,或者在 HP 计算机上进行计算。

第三,台站固定经纬度采用值为 λ, φ , 一般为天文经纬度,则

$$B - \varphi = -\xi + \Delta\varphi \quad (45)$$

$$L - \lambda = -\eta \sec B + \Delta\lambda \quad (46)$$

此处 ξ, η 为垂线偏差的子午分量和卯酉分量,对于固定台站来说,可把 $-\xi, -\eta \sec B$ 视为常数。 $\Delta\varphi, \Delta\lambda$ 不仅反映了极移所引起的纬度变化和经度变化,还包括多普勒观测误差,精密星历误差以及所给的极坐标误差,用此种办法求订张德勒周期与经典方法相比较,相差 3—4 天。

参 考 文 献

- [1] Anderle, R. J., Polar Motion Determined by Doppler Satellite Observations, *Bulletin Géodésique*, 50(1976), 377—390.
- [2] Gambis, D., Noël, F., Determination of Polar Motion by Doppler Tracking of Artificial Satellite, *Bulletin Géodésique*, 54(1980), 103—118.
- [3] Lambeck, K., Polar Motion from Tracking of Close Earth Satellites, Rotation of the Earth, *International Astronomical Union Symposium*, No. 48, Printed in Netherlands by D. Reidel, Dordrecht, 1972, 123—127.
- [4] Melchior, P., Introduction to the Workshop on Polar Motion, *Satellite Doppler Positioning* (Proceedings International Geodetic Symposium), U. S. Defense Mapping Agency, National Ocean Survey, NoAA, (1976), 747—753.
- [5] 易照华等编著:天体力学引论,科学出版社,1978 年,第 39 页。
- [6] 天文地球动力学专集,测绘出版社 1981 年 第 118 页。
- [7] Shigeru Yumi, Comparison Between the Results with the Doppler Positioning and with the Astronomical Observations of Time and Latitude, *Proceedings of the Second International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning*, Cosponsors Defense Mapping Agency, National Ocean Survey, Austin, Texas, January 22—26, 1979, 767—782.
- [8] 朱文耀,许华冠等:利用卫星多普勒测定观站地心坐标,天文学报,第 21 卷,第 4 期,1980 年,第 399—403 页。

THE DETERMINATION OF MATHEMATICAL MODEL OF DOPPLER POLAR COORDINATES FROM A SINGLE STATION

Song Wen Yao

(Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences)

ABSTRACT

In this paper, two kinds of mathematical models are deduced, in which polar coordinates are determined from a single station with integrating and differential receivers. It is stressed to point out that, after transforming from the satellite position of orbital coordinate system into the geocentric coordinate system, we have to introduce in the probable value and the change it on the quasi-instantaneous axis. In this way can we deduce the polar coordinate (x_p, y_p) relative to the original point of CIO. Then, we deduce and explain the calculation formula used by the International Latitude Observatory, Mizusawa, Japan, to investigate the change of latitude and longitude by utilizing Doppler Observation to determine the geocentric coordinate of stations.

积分多普勒计数中相对论效应的影响*

宋成骅 李毓麟
(武汉测绘学院)

提 要

本文讨论了积分多普勒计数中相对论效应的影响,指出了采用卫星时标计数时同样存在相对论效应的影响。对某些文献所论述的狭义相对论效应和广义相对论效应,提出了商榷性见解。本文第二部分推导了积分多普勒计数中相对论效应的计算公式。

一、相对论效应

在经典的牛顿力学中,时间和空间是绝对不变的东西。对于任意坐标系而言,时间间隔和空间间隔不会由于物体的运动而有所变化,物体运动的速度没有任何限制,可以无限增大。对于各个坐标系而言,时间和空间的意义完全相同。

以上观点,从理论上来说是不够精确的,它们仅能够适用于低速、宏观物体的运动。对于高速、微观物体的运动,对于更高精度的量测,上述理论将显示出它们的局限性和缺陷。爱因斯坦在其具有划时代意义的著作中,论证了物质运动的极限速度为光速,在任意惯性坐标系中真空光速值不变,空间尺度和时间尺度与坐标系间的相对运动有密切关系。因此,对一个坐标系看来是同时发生的事件,而对另一坐标系看来就不见得是同时发生。“每一个坐标系都有它本身特殊的时间”。因此,当我们讲到时间时,必须同时说明是那个坐标系的,否则关于“一个事件的时间”的话就变得毫无意义了。对于长度而言也是如此,同一物体在不同坐标系中量测到的数值将有所不同。

为讨论方便起见,我们首先扼要回顾洛伦兹变换公式,然后论证和分析狭义相对论效应和广义相对论效应的影响。

1. 洛伦兹变换,时间、长度与运动的关系

设有二个相对运动速度 v 的坐标系,它们相应的轴互相平行,并沿 x 轴相对运动。当 $t_0 = t'_0 = 0$ 时,二坐标系原点重合,即 $x_0 = x'_0 = 0$ 。某一事件在固定坐标系 K 中的位置和时间为 x, y, z, t , 该事件在运动坐标系 K' 中的位置和时间为 x', y', z', t' (见图1),则它们之间的关系式可按洛伦兹变换方程给出^[4]

* 1982年8月收稿。

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' &= y, & y &= y' \\ z' &= z, & z &= z' \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

设在运动坐标系 K' 的原点 ($x'_0 = 0$) 有一发射机,并在 $t'_0 = 0$ 和 $t' = \tau$ 时刻发射了二个脉冲,这二个脉冲在 K 坐标系中量测的位置和时间(根据洛伦兹变换方程(1))将是

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= 0, & t_0 &= 0 \\ x &= v\gamma\tau, & t &= \gamma\tau \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

由此可见,在运动坐标系 K' 中量测的时间间隔 τ , 在静止坐标系 K 中量测值将是 $\gamma\tau > \tau$, 这就是时间膨胀效应。

同理,如果在 K' 坐标系中有一米尺,设置于 $x'_0 = 0$ 和 $x'_1 = 1$ 处,则在 K 坐标系中量测到的长度将是

$$x_0 = 0, \quad x = \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (3)$$

由此可见,在 K 坐标系中量测到的长度小于 1 米,米尺因运动而缩短。

从以上分析可见,“一事件”在不同坐标系中量测到的位置和时间将有所不同。不同坐标系之间的空-时不变量为 s^2 , 即

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2$$

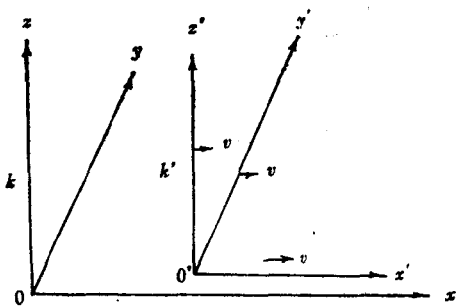


图 1

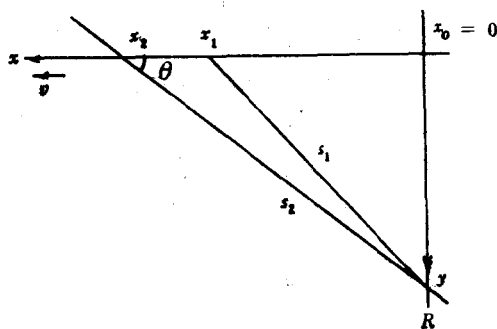


图 2

2. 狭义相对论效应的影响

设 x, y, z 为地面坐标系三个轴,卫星沿 x 轴运动,相对运动速度为 v , R 为接收机(或测站点),运动坐标系 K' 的三个轴与地面坐标系相应轴平行,卫星位于 K' 坐标系的原点 ($X_0 = 0, X_0$ 为卫星坐标系原点)处,在 K' 坐标系 t_1 和 t_2 时刻连续发射二个脉冲,