[美] 乔治·波里亚　戈登·拉达　著

复变函数

路见可　余家珉　等译　余家荣　校

高等教育出版社

复变函数

[美] 乔治·波里亚　戈登·拉达　著

路见可　余家珮　林玉波
徐吉华　赵静辉　刘和春　译

余家荣　校

高等教育出版社

内容提要

本书系根据 John Wiley &. Sons, Inc. 1974 年出版的 G. Polya 和 G. Latta 所著的 "Complex variables," 一书. 译出.

全书内容为单复变函数的基础理论和基本方法及一些应用，叙述时力求生动、直观，并且配备有大量的例题和习题、可以作为高等院校理工科各专业的有关课程的教材或教学参考书。

复变函数

[美]乔治·波里亚 戈登·拉达 著

路见可 余家珮 林玉波 徐吉华 赵静辉 刘和春 译

余家荣 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

通县振兴印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张 11 字数 263,000

1985年7月第1版 1985年 月第1次印刷

印数00,001—86,00

书号13010·01014 定价 2.55 元

序　　言

弄清含意，表述自会清晰！

《阿丽丝漫游奇境记》

在给未来的工程师和物理工作者讲了几十年复变函数以后，我对于他们的要求和爱好有了明确的概念，并且我希望这种概念并非是不现实的。

学生毕竟是学生。因为规定要他们学几门课，所以他们学习某些课程可能只是为了考试，而打算在考试后把他们所学的东西忘掉。然而他们也可能(比较聪明和有志向的学生则一定会如此)提出一些与这门课程有关的问题：它有趣吗？我能应用它吗？

这些问题是完全合理的。数学工作者在教一门较深的数学分支——如像复变函数理论——时，应尽力使自己站在学生(即未来的物理工作者和工程师)的立场上。学生在学习复杂的定义和冗长的证明之前，希望了解本课程是怎样有趣和有用，以致值得为这些定义和证明花费时间和精力。

体会到这些以后，我在教一代又一代的学生时，力图使自己的讲课适应他们的观点。我逐渐形成了下列指导原则：

讲课从某种熟悉的、有用的或能激起人们的兴趣的事情出发，从与我们周围世界的联系出发，从某些应用的前景出发，或从某个直观的概念出发。

敢于使用通俗的语言，只要它比传统的准确术语更具启发性。事实上，在学生未能理解专门术语的必要性之前，不引进它们。

不要过早或过深地涉入证明的复杂细节。首先给一个一般思路或只给一个直观的初步证明。

一般而言，要认识到自然的学习方式是分阶段学习．首先要看看课程的轮廓，以便了解其具体来源或可能的用途．然而，当我们能够逐渐看到用途、联系和重要性时，就更愿意去把细节弥补起来．

本书的编写是受到上述想法的影响的．

在书中只要有合适机会，就要插进几句关于具体现象和有关大体思路的话．在引入正式定义以前，我们可以用例子或更通俗的语言先讨论一下那些插入的想法．证明着重于要点，比通常教材往往更多地把中间过程留给学生完成．然而，与通常教材最显著的不同之处还是体现在大多数节和每章后面的“例子与注解”中．当然，本教材中有标准类型的例子，它们向学生提供练习课文中所讲内容的机会．然而也有一点不寻常——就是努力让学生逐步通过自己的工作来学习本课程．有些问题或注解要求学生重新考虑课文中所讲过的定义或证明，指导他们注意更深入细微的地方．另外一些问题介绍了新的内容：与课文中不同的证明；或已经讲过的结果的推广（或类似结果），以鼓励学生进一步进行研究．不仅如此，只要有可能，即使是比较简单的问题也设法使学生有研究各种情况的机会，这样将引起他们的好奇心和创造性．

我希望本书不仅对未来的工程师和物理工作者有用，而且对未来的数学工作者也有用．如果数学的概念和结论能与周围世界和一般观念很好地联系，如果我们是通过自己一步步分阶段的工作（而不是囫囵吞枣地）来得到它们，那么它们就变得是生动和明晰的了．

这个教程，已由我和我的朋友与同事G. E. 拉达在斯坦福教过几次，他同意我的教学思想．由于另外的兴趣和任务，我不可能单独地写成这本书，我感谢他愿意与我合写此书．

在某些地方和某些方面我们所做的可能比我们所期望的少．

然而我们仍认为，在大学应按什么方法进行教学的广泛讨论中，本书是一个小小的具体的贡献。

乔治·波里亚

1974年8月于斯坦福

致 读 者

4.3指的是第4章第3节。

4.3中的子节(b)在该节中简化为(b)，或子节(b)，但在另外各节中出现时则记作4.3(b)。

4.3中的公式(2)在该节中简记为(2)，或公式(2)，但在另外各节中提到时记作4.3(2).（在第一章，基本法则用罗马数字作标号）

我们将两种类型的习题(例子、注释和问题)区别开．其中有一些附属于全章并放在该章末尾；而另一些则附属于一章的某一节，并放在该节的末尾．对这两种类型加上不同的标记：属于第4章的第3个习题记作4.3，且引用时记作习题4.3；而属于4.2的第3个习题则记作4.2.3，且引用时记作习题4.2.3.

一般而言，附属于全章的习题要比附属于某节的要难些；但也有例外，而且这种例外并不少.

在某些附属于节的问题的末尾记有(S)，表示它们的解将在该章末尾给出.

题解可能只给出结果(对于比较简易的问题)，或只给出概述或提示，只是在问题比较重要或比较困难时才给出细节．对解的认真领会需要读者下功夫——如果读者在看解答之前做了大量工作的话，收益也就会更多.

对问题求解的提示位于方括号[ ]内——但不要过早地看提示．彼此关联的问题常编排在一起，因此参看前后的问题对本题求解可能是有帮助的.

大多数问题只有标号，但有些(比较重要或比较有趣的)问题

则有标题.

Iff. 简写记号“iff”代表术语“当且仅当”.

阅读时应该手拿纸和笔. 自己完成推算的中间步骤, 自己作出图形, 并把作出判断的理由写在它的后面.

注意: 最后两章对那些为了应用而学习复变函数的读者是特别有益的. 在第8章将引进物理方面的应用, 在第9章将引进分析方面的应用. 这两章看来是需要的: 读者需要从其他出处更全面地理解物理定理, 而这些定理在本课文中只能提一提.

大学生至少应该学习前面六章, 并且做出附属于每节的问题中的实质性部分(如果不是全部的话). 如果时间允许, 他还应该尽量多地做附属于每章的题目, 并且应有所选择. 他还应该精选那些与他的兴趣和他的专业研究紧密相连的问题. 他可以 (我们希望他会如此) 回过头来学习那些曾漏学的章节和漏作的问题——在以后的学习中他可能需要它们.

教师根据教学时间、学生兴趣和准备情况可以省去某些次要的题目和大部分乃至几乎全部次要的问题.

附属于整章的练习的解答是不给出的(除了少数情形, 那时, 它们放在问题的后面或该章有关问题的解答后面). 教师可以安排时间(如在习题课上)讨论一些解答. 学生可以参考有关复变函数的更为广博的教科书. 有些练习在这些教科书中通常是不处理的, 例如在第一章末尾的那些练习就是如此; 有关的知识能在G. 波里亚和G. 斯塞哥编的“*Problems and Theorems in Analysis*”(*Springer*, Vol. 1, 1972 和 Vol. 2, 1974*) 中找到.

例如, 对本书*p.* 26的练习 1.18, 可参看波里亚-斯塞哥的卷1, *p.* 107上的问题 III22, 它的解答在同书卷1, *p.* 301. 不仅注意这

* 本书付印时, 卷2正在印刷中, 两卷德文本都可找到. (第一卷已有中译本, 上海科学技术出版社1981年10月出版——译者注)

个被引用了的问题，而且还注意邻近的问题可能是有益的。

其他对照情形，如下表：

本书练习	参阅问题(波里亚-斯塞哥)
1.5	VI 1
1.13	II 80
1.15	II 90
1.17	III 18
1.18	III 22
1.19	III 23
1.26	III 14
2.10.1	III 8
2.10.2	III 9
2.24	III 31
2.33	III 34
3.4	III 58
3.5	III 55.4
3.21	III 122
3.22	III 106
3.36	III 124
5.8	III 169
6.7.9	III 230
6.2	III 174
6.30	III 194
6.34	III 192
6.39	III 209
6.42	III 120
6.43	III 175

6.44	III	176
6.45	III	275
7.4.1	III	174
9.4.1	II	202
9.4.2	II	205
9.5.3	II	204

乔治·波里亚

本书是著名数学家G. 波里亚按照他的想法，与G. 拉达合作，根据多年的讲稿写成。书中着重阐明所讲问题的来龙去脉，及其与实际的联系，可使读者较易接受。

本书译者如下：序言及致读者——徐吉华；第一章——赵静辉；第二章——徐吉华；第三章——刘和春；第四至六章——余家珮；第七章——林玉波；第八至九章——路见可，余家荣参加了全书的校订工作。

译者

目　　录

第一章 复 数

在引进复数时，我们着重指出它们与实数类似的地方. 复数在加、减、乘、除运算中和实数一样服从同样的代数运算法则，在描述几何和物理状态中它们有类似的作用.

1.1 实数

我们不想解释什么是实数，而是先回顾一下实数的应用. 我们常常需要某些特殊类型的实数，例如负整数，有理数和无理数，并且认为读者已经知道这些术语的含义.

(a) 我们用字母 $a, b, c, \cdots, x, y, \cdots$ 来表示实数. 利用实数我们能够作加，减，乘，除的运算，并且这些运算服从下列法则

(I) 加法的交换律 $a+b=b+a$.

(II) 乘法的交换律 $ab=ba$.

(III) 加法的结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$.

(IV) 乘法的结合律 $(ab)c=a(bc)$.

(V) 分配律 $(a+b)c=ac+bc$.

(VI) 加法的唯一逆律

给定 a, b, 存在唯一确定的 x, 使得

$$a+x=b.$$

(VII) 乘法的唯一逆律

给定 a, b, 假定 $a\neq 0$, 存在唯一确定的 x, 使得

$$ax=b.$$

数 a 的绝对值用 $|a|$ 来表示；例如 $|2|=2$, $|-2|=2$, 我们提出两个有关绝对值的法则:

(VIII) $|a+b| \leqq |a|+|b|$,

(IX) $|ab| = |a||b|$.

(b) 实数可以看作是直线上的点. 按照通常的作法，我们在水平面上作一条从左到右的无限直线(x轴)，选取一个原点和某个(任意的)长度单位(图 1.1). 这样x就被认为是在直线上离原点$|x|$个单位的点，且如果$x>0$，它就在原点的右方，如果$x<0$，就在原点的左方. 相应地，直线上每一个点给出一个实数x，我们把这条直线叫实直线.

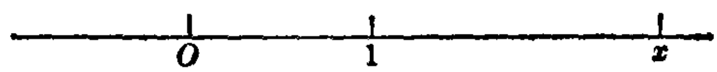

图 1.1

(c) 实数可以用来表示沿一条固定直线（例如实直线）的向量. 这种解释固然有些不自然，但却为复数的一个很有用的解释铺平了道路.

我们回想一下，向量的概念是从位移的概念抽象出来的. 位移是使质点A移动到B的结果. 这样位移有一个大小，一个方向和一个起点(A). 我们认为两个大小相等方向相同的位移是相等的(图 1.2). 如果整个空间作为一个刚体移动而不转动，它上面的所有点就有相等的位移. 我们把这种位置的改变叫做一个向

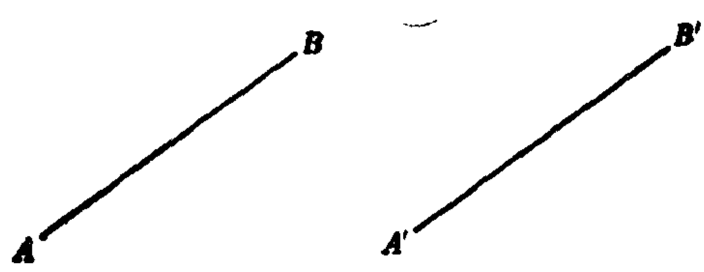

图 1.2

量. 于是，一个向量有一个确定的大小和一个确定的方向，但没有固定的起点. 一个向量用一条有向线段来表示. 两条平行的而且有相同的长度和指向(方向)的线段表示同一个向量. 因此，如果