

郭素云

653015

陀螺仪

原理及应用

哈尔滨工业大学出版社

陀螺仪 及应用

哈尔滨工业大学出版社

陀螺仪原理及应用

郭素云 编

HK15/23



哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书用控制时域点对陀螺仪及陀螺稳定系统的工作原理、动态和静态品质进行了综合分析。全书共九章，扼要地阐述建立陀螺仪数学模型所必须的力学基本原理；详细的论述了陀螺仪的特性，陀螺仪对几种典型输入信号的瞬态响应；自由陀螺仪，陀螺地平仪，陀螺方向仪及陀螺罗经的工作原理、性能及误差分析；各种类型的陀螺稳定系统的数学模型、受迫运动、综合分析校正；几种新型陀螺仪的工作原理及主要优缺点；陀螺漂移的测试原理等。本书为高等院校自动控制及导航专业用的教材，可供陀螺导航专业师生和有关技术人员参考。

陀螺仪原理及应用

郭素云 编

哈尔滨工业大学出版社出版
北京市新华书店发行
哈尔滨工业大学印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 14.5 字数 335,000

1985年10月第1版 1985年10月第1次印刷

印数 1—5,000

书号 15341.26 定价 2.80元

前 言

本书是根据 1980 年 5 月全国造船类陀螺导航专业教材编审会议上通过的“陀螺仪原理及应用”教学大纲编写的，供高等院校自动控制及导航专业教学使用。

本书首先根据力学基本原理，建立陀螺仪及陀螺稳定系统的数学模型，在此基础上用控制的观点对其工作原理、性能及误差进行综合分析。即针对陀螺仪这个具体对象，将力学的基本原理与自动控制原理真正有机地联系起来。这样，陀螺仪也是一个由某些典型环节组合而成的系统。很容易从其开、闭环传递函数分析出动态和静态的品质，从而避免了大篇幅的力学阐述、烦琐的公式推导及微分方程的直接求解。

全书共九章。第一章扼要地阐述为建立陀螺仪的数学模型所必需的力学基本原理，第二章讨论陀螺仪的特性，建立陀螺仪的运动方程式，以及陀螺仪系统对几种典型输入信号的瞬态响应。第三章给出常用的几种坐标系。第四章着重介绍二自由度陀螺仪在导弹上的应用。第五章主要阐述陀螺地平仪的修正原理及控制规律，系统地分析工作过程的误差。第六章讲述属于开路控制的陀螺方向仪、闭路控制的陀螺罗经系统及工作误差，并对电控二态罗经作较详细的介绍。第七章讨论建立各种类型的陀螺稳定系统的数学模型，并画出伯德图，以具体实例对各类系统进行综合、分析和校正。还较详细地分析受迫运动。第八章介绍目前国内、外的颇有发展前途的几种新型陀螺仪的工作原理及其主要优缺点。为了适应陀螺仪及惯导系统不断发展的需要，第九章阐述陀螺仪漂移的测试原理。

本书由哈尔滨船舶工程学院黄德鸣主审。在编写过程中，哈尔滨工业大学胡恒章同志审阅了全稿。他们都提出了宝贵意见。此外，还得到哈尔滨船舶工程学院罗超和程录等同志的热情帮助和指导。在此一并感谢。

由于作者水平有限，难免有谬误之处，诚恳希望读者批评指正。

编 者

一九八三年十一月

目 录

绪 论	(1)
第一章 力学的基本原理	
§ 1—1 运动	(8)
§ 1—2 速度 动量 加速度	(4)
§ 1—3 绕定点转动的刚体的角速度和线速度	(5)
§ 1—4 动坐标系绕定点转动时速度和加速度合成定理	(10)
§ 1—5 动力学基础定律 达朗贝尔原理	(15)
§ 1—6 绕定点转动的刚体的动量矩	(15)
§ 1—7 动量矩定理	(17)
§ 1—8 刚体绕定点转动的欧拉动力学方程	(18)
第二章 陀螺仪原理	
§ 2—1 陀螺仪的概述	(20)
§ 2—2 二自由度陀螺仪的基本特性	(20)
§ 2—3 单自由度陀螺仪的基本特性	(27)
§ 2—4 二自由度陀螺仪的运动方程	(29)
§ 2—5 二自由度陀螺仪转子轴运动轨迹的描绘	(32)
§ 2—6 二自由度陀螺仪的传递函数及方块图	(33)
§ 2—7 二自由度陀螺仪对几种典型输入的瞬态响应	(36)
§ 2—8 单自由度陀螺仪的运动方程	(45)
§ 2—9 单自由度陀螺仪的方块图及传递函数	(48)
§ 2—10 单自由度陀螺仪对输入为阶跃函数时的瞬态响应	(50)
第三章 坐标系	
§ 3—1 几种常用的坐标系	(53)
§ 3—2 坐标系之间关系	(55)
§ 3—3 地理坐标系相对惯性坐标系运动的角速度	(56)
§ 3—4 动参考坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 相对惯性坐标系运动的角速度	(57)
§ 3—5 二自由度陀螺仪的绝对运动角速度	(58)
第四章 自由陀螺仪	
§ 4—1 自由陀螺仪的运动方程	(60)
§ 4—2 自由陀螺仪的应用	(61)
第五章 陀螺地平仪	
§ 5—1 陀螺地平仪的用途及修正原理	(64)
§ 5—2 陀螺地平仪的测量原理	(70)

§ 5—3	陀螺地平仪的运动方程及方块图	(71)
§ 5—4	陀螺地平仪的控制规律	(75)
§ 5—5	陀螺地平仪的误差分析	(77)
第六章 航向陀螺仪		
§ 6—1	航向陀螺仪的用途 运动方程及方块图	(86)
§ 6—2	陀螺方向仪	(89)
§ 6—3	陀螺罗经的功用 无阻尼摆式陀螺罗经的运动方程及方块图	(92)
§ 6—4	具有水平轴阻尼的摆式陀螺罗经	(99)
§ 6—5	具有垂直轴阻尼的陀螺罗经	(102)
§ 6—6	电控二态罗经	(110)
§ 6—7	运载体运动引起的陀螺罗经的北向速度误差	(118)
§ 6—8	陀螺罗经的冲击误差	(121)
§ 6—9	陀螺罗经的摇摆误差	(134)
第七章 陀螺稳定系统		
§ 7—1	直接式陀螺稳定系统	(138)
§ 7—2	单轴陀螺稳定系统的运动方程	(139)
§ 7—3	单轴单陀螺稳定系统的方块图和各环节的传递函数	(147)
§ 7—4	动力陀螺稳定系统的动态分析与综合校正	(150)
§ 7—5	单轴双陀螺动力稳定系统	(159)
§ 7—6	积分陀螺稳定系统的动态分析与综合校正	(165)
§ 7—7	指示型陀螺稳定系统	(169)
§ 7—8	陀螺稳定系统的控制回路	(179)
§ 7—9	双轴陀螺稳定系统	(180)
§ 7—10	三轴陀螺稳定系统	(181)
第八章 新型陀螺仪		
§ 8—1	静电支承自由转子陀螺仪	(187)
§ 8—2	挠性陀螺仪	(193)
§ 8—3	激光陀螺仪	(200)
第九章 陀螺仪漂移测试原理		
§ 9—1	陀螺仪测试的目的与分类	(203)
§ 9—2	陀螺仪漂移数学模型的建立	(204)
§ 9—3	陀螺漂移测试台的工作原理	(208)
§ 9—4	陀螺仪漂移测试中的数据处理方法	(210)
§ 9—5	陀螺仪漂移测试原理和方法	(216)

绪 论

陀螺仪理论是在生产及科学实践的基础上发展起来的一门科学。

远在十七世纪，牛顿生活的年代，对于高速旋转刚体的力学问题已有了比较深入的研究，并已奠定了机械框架式陀螺仪的理论基础。1852年法国物理学家傅科（Foucault）为了演示地球的自转，制造了最早的傅科陀螺仪，并正式提出了“陀螺”这个术语。但是，当时的制造工艺水平很低，所制造的陀螺仪的误差很大，致使无法验证观察地球的自转。到了十九世纪末和二十世纪初，电动机和滚珠轴承的发明，为制造高性能的陀螺仪提供了有力的物质条件。同时航海事业的发展，使陀螺仪进入了实用阶段。

在航海事业蓬勃发展的二十世纪初，德国探险家安修兹（H. Anschütz-Kaempfe）想乘潜艇到北极去探险，他于1904年制造出了世界上第一个航海陀螺罗经，开辟了陀螺仪表在运动物体上指示方位的道路。与此同时，德国科学家休拉（Schuler）创造了“休拉调谐理论”，后来成为陀螺罗经和某些导航仪器的理论基础。

中国是世界文明发达最早的国家之一，古代科学文化，曾居世界之前列。在陀螺技术方面，我国人民也有很多发明创造。譬如在传统杂技艺术中表演的快速旋转的转碟节目，就是利用了高速旋转的刚体具有稳定的特性。在将高速旋转的刚体支承起来的万向支架的应用方面，西汉末年，就有人创造了与现在万向支架原理完全相同的“卧褥香炉”。这种香炉能“环转四周而炉体常平，可置被褥中”。实际上是把这种香炉放在一个镂空的球内，用两个圆环架起来，利用互相垂直的转轴和香炉本身的重量，在球体做任意滚动时，香炉始终保持平稳，而不会倾洒。

随着航空事业的发展，到了三十年代，已经制造出了航空气动陀螺地平仪、方向仪、转弯仪等。

在第二次世界大战末期，陀螺仪作为敏感元件被用于导弹的制导系统中。

特别是六十年代以来，各国都争先研制各种新式精密陀螺仪，作为导航系统中的敏感元件，精度已经达到了相当高的水平。

陀螺已为人们服务了半个多世纪，至今还继续地为人类工作着。随着科学技术的发展，为了满足现代航空、航海特别是宇宙航行所提出的新要求，相继出现了各种新型陀螺仪。

目前，陀螺正在向着超高精度、高寿命，小体积和低成本等方向发展。科学实践表明，有近百种的物理现象和新的原理可在陀螺技术中得到应用。有利用流体动力及磁性液体动力现象而设计出的流体转子陀螺。这种陀螺是利用旋转的液体来代替习惯的固体转子。还有利用运动的电子、原子和基本粒子做高速转子而构成的核子式陀螺仪。也有利用激光特性设计出的激光陀螺仪和激光光导纤维陀螺仪等。

物理学的新成就，促进了陀螺技术向前发展。而随着仿生学的发展，人们模仿蜻蜓振动而保持虫体稳定的原理，又制成了振动陀螺仪，等等不胜枚举。

今天，陀螺仪已广泛地应用在航空、航海、宇航等军事及国民经济的各个方面。

陀螺仪作为指示仪表，可以用来指示运载体的姿态和方向。在各种飞机的驾驶舱里，陀螺仪表占有很突出的位置。它们包括航空地平仪、陀螺方向仪、转弯指示器等。而在舰船和潜艇里，航海陀螺罗经是不可缺少的导航仪器。在地质勘探、采矿作业中所用的陀螺测斜仪，能使钻井钻进六、七千米深度而不偏斜。

用陀螺等组成的稳定装置，可用来稳定物体。我们知道，坦克上的炮塔应用了陀螺稳定装置，不论坦克怎样颠簸，炮塔能始终保持水平，从而大大提高了火炮射击的命中率。在战斗机上用陀螺稳定装置稳定瞄准具和火炮，可以提高命中精度。在航空摄影和测绘技术中用陀螺稳定装置稳定照相机或者红外线探测器，使它们始终正确地对准被测目标。在各种舰船或潜艇中，陀螺稳定装置可用来稳定天文望远镜，以便实现天文导航。也可用来稳定舰船上的火炮和雷达天线，防止船体的摇摆和颠簸等等。

稳定装置还广泛地应用在火箭、导弹及人造卫星等飞行器上。在人造卫星里，陀螺稳定装置常被用来使望远镜始终对准要观测的天体，使照相机始终对准着地球表面，使太阳能电池板永远向着太阳，接收更多的太阳能。

由陀螺稳定装置组成的自动驾驶仪及惯性导航系统能准确地控制运载体沿正确的航线航行。

所谓惯性导航，是利用惯性元件来实现的一种导航方法。惯性导航系统通常是由加速度计、陀螺稳定平台、计算机及其它控制元件组成的自动控制系统。惯导系统的精度，在很大程度上取决于陀螺的精度，因此人们常称陀螺是惯性导航系统的核心。

近年来，我国在研制与生产陀螺、陀螺稳定装置及惯性导航系统等方面，取得了可喜的成果。但是，在陀螺技术的领域中，还有很多东西未被我们认识，有许多新的课题有待我们去探讨和研究，有许多高峰等待着我们去攀登。为了在我国早日实现四化，尽快地赶上和超过世界先进水平，我们陀螺技术工作者必须继续努力，克服一切困难，解放思想，开拓出更加崭新的局面。

第一章 力学的基本原理

§ 1—1 运 动

运动学是力学的一部份，它是通过位置、速度、加速度等物理量，描述物体的位置随时间变化的规律或在运动过程中所经过的轨迹。任何运动都是在空间和时间中进行的。空间与时间跟物质同样是客观实在，古典力学把空间看成三度欧几里德空间，物体在此空间运动着。

时间在古典力学中是普遍的，即是它被认为对一切参考系都相同，而与这些参考系之间的相对运动无关。从数学的观点来看，时间在运动学中被看成是连续变化的量，它被当作独立变量（自变量），并用字母 t 表示。

关于时间常遇到“瞬时 t ”和“时间间隔 t ”两个概念。瞬时 t 应理解为给定瞬时离开某一初始瞬时（计算时间的起点）的秒数。初始瞬时可取物体运动开始的瞬时或取我们开始观察这运动的瞬时。因此，对于初瞬时变量 t 之值等于零。变量 t 也可以是负值，这表示在初瞬时以前的各瞬时。时间间隔表示某两个顺次瞬时之间所渡过的秒数 t 。两个给定的顺次瞬时 t_1 和 t_2 之间的时间间隔为 $t_2 - t_1$ 。

一、运动的相对性 参考系

宇宙中的任何物质都是处在不停的运动之中，没有绝对静止的东西。平常所说的物体在运动或静止都具有相对意义。也就是说一个物体在空间的位置和位置的变动只能相对另一个物体而言。这样，后一个物体就构成了描述前一个物体运动的基准。我们把后一个物体叫参考系。当物体相对于参考系的位置有了改变时，就说这个物体已经发生了运动。反之，如果一个物体相对于参考系没有任何位置的改变，就说这个物体是静止的。因此，物体的静止和运动都只具有相对的意义。在描述物体的运动时，必须说明所采用的参考系。这样才使所描述的运动具有确切的含义。

二、坐标系

为了有利于用数学来描述物体的运动，即要精确地说明一个物体相对另一个参考系的相对位置，我们采用了坐标系。把坐标原点及三个坐标轴都固定在作为参考系的物体上。当一个物体运动时，该物体相对于坐标系的坐标数值将随时间而变化。这样，就精确地给定了物体的位置。我们用坐标系代替了参考系。

常用的是右手直角坐标系（笛卡尔坐标系）。设 $OXYZ$ 是一直角坐标系，它固连在作为参考系的物体上。在某瞬时，有一个质点位于图1.1.1所示的位置 M 处。连接 OM ，则直线 OM 沿三根坐标轴的投影分别为 x 、 y 及 z 。质点在直角坐标系中 t 瞬时所处位置 M 点的坐标参数是 (x, y, z) 。很明显，如果 M 点的位置固定，则一定会找到一

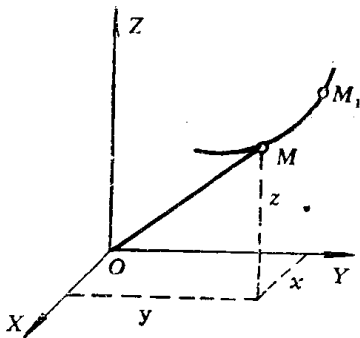


图 1.1.1 质点在直角坐标系上的位置

组与之对应的坐标值。如果 M 点的位置变化了，坐标值 (x, y, z) 也相应的随着变化。

三、自由度 广义坐标

在坐标系中，要确定一个物体的位置所需要独立坐标的数目，称为这个物体运动的自由度。例如，一个质点沿直线 ox 运动，只需要用一个坐标 (x) ，就可以完全确定了它在直线 ox 上的位置，故称这种运动是属于单自由度运动。质点 M 在固定平面内运动，则需要两个坐标 (x, y) 来确定它在平面上的位置。这种质点的运动属于二自由度运动。在空间作任意运动的质点，需要用三个坐标 (x, y, z) 来完全确定它在空间的位置。这质点的运动具有三个自由度。绕定轴转动的刚体是单自由度运动。而一个毫无约束的刚体在空间的位置，需要六个坐标 $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ 来确定。因此，刚体作任意运动时，具有六个运动自由度。例如飞机、舰船及导弹等物体作自由运动时，都属于这种情况。

为了完全确定物体的位置而选定的任意一组彼此独立的坐标参数，称为这个物体的广义坐标。例如，当一个质点在空间作任意运动时，需要三个广义坐标 (x, y, z) （要注意，这里指的是质点）才能完全确定这个质点在空间的位置。

四、运动方程式及运动轨迹

当质点相对坐标系 $OXYZ$ 运动，从 M 位置到 M_1 位置时，其坐标将随时间而改变。假设描述质点运动的三个广义坐标随时间变化的规律为已知，即已知下列三个时间函数：

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

则这三个方程式称为质点在空间运动的方程式。质点在空间运动时，所画出的曲线称为质点运动的轨迹。如果，从上面的参数方程中消去时间变量 t ，就可得到只含有广义坐标的轨迹方程。

§ 1—2 速度 动量 加速度

设质量为 m 的质点 M 在空间沿某曲线运动。 R 是决定质点位置的矢径， $OXYZ$ 是固定在参考系上的坐标系，矢量 $R(t)$ 是时间的函数。质点 M 的矢径在直角坐标系各坐标轴上的投影就是点 M 的坐标，如图 1.2.1 所示，即

$$\left. \begin{aligned} R_x &= x \\ R_y &= y \\ R_z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1.2.1)$$

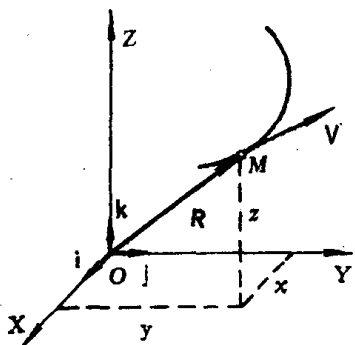


图 1.2.1 质点 M 的坐标图

设 i 、 j 及 k 分别为沿坐标轴 X 、 Y 及 Z 的单位矢量，则 R 可写成：

$$\begin{aligned} R &= R_x i + R_y j + R_z k \\ &= x i + y j + z k \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

设 V 代表质点 M 沿曲线运动的速度。于是可得

$$V = \frac{dR}{dt} \quad (1.2.3)$$

若用 V_x 、 V_y 及 V_z 分别表示速度矢量 V 沿 X 、 Y 及 Z 轴的分量时，则

$$V = V_x i + V_y j + V_z k \quad (1.2.4)$$

矢量 $mV = m \frac{dR}{dt}$ 称为这质点的动量。动量具有与矢量 V 相同的方向。

质点 M 的加速度应表示为速度对时间的矢导数，也就是说不但速度矢量的大小改变时，使质点具有加速度，而且速度矢量的方向改变时，同样也使质点具有加速度，前者称为质点作曲线运动的切向加速度，它指向运动轨迹的切线方向。后者称为质点运动的向心加速度，指向主法线的方向。质点的加速度在直角坐标系中，可表示为

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV_x}{dt} i + \frac{dV_y}{dt} j + \frac{dV_z}{dt} k \quad (1.2.5)$$

§ 1—3 绕定点转动的刚体的角速度和线速度

所谓绕定点转动的刚体，是指刚体在运动中具有一个固定点，并可绕着这点作任意的转动。在工程技术问题中，为了使一个刚体可绕固定点转动，通常采用球面铰链、框架系统等。框架系统是陀螺仪及平台系统中一般所采用的支承方法。

一、绕定点转动的刚体在空间位置的确定及运动方程

通过固定点 O 作两套坐标系，一套是固定在参考系上的固定坐标系 $OXYZ$ ，另一套是与绕定点转动的刚体相固连的坐标系 $ox'y'z'$ 。如果知道了动坐标系 $ox'y'z'$ 相对于固定坐标系 $OXYZ$ 的位置，也就确定了刚体的位置。由解析几何知道，动坐标系 $ox'y'z'$ 相对于固定坐标系 $OXYZ$ 的位置可用三个动坐标轴的九个方向余弦，即三个动轴与三个固定轴夹角的余弦来决定。可是在我们讨论的问题领域中，为了实现刚体绕定点转动，通常采用框架系统。因此，采用框架角坐标确定刚体的位置。图1.3.1示出一个用内、外两个框架所支承的刚体，它通常被称为转子。刚体的自转轴是通过一对轴承安装在内框架上。内框架又通过一对轴承安装在外框架上，外框架又通过一对轴承安装在基座上。基座和运载体固连。这样，转子可以绕自转轴相对于内框架转动，而内框架又可以带动转子绕内框架轴相对于外框架转动。外框架又可以带动内框架和转子绕外框架

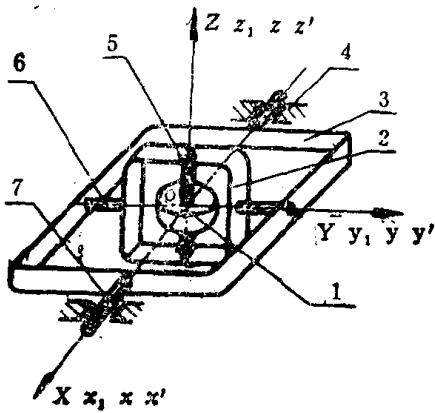


图 1.3.1 框架支承系统

轴相对基座转动。如果这三根轴从结构和加工工艺上保证相交于一点,转子绕本身自转轴转动,内、外框架又各自绕内、外框架轴转动,则转子就绕固定点 O (转子自转轴、内框架轴、外框架轴的交点) 可作任意转动,这样就实现了刚体绕定点转动。刚体具有三个转动自由度,定点 O 称为万向支点。

为了确定转子坐标系 $ox'y'z'$ (即转子) 在空间的方位,选用四套坐标系: 即固定在基座上的坐标系 $OXYZ$; 固连在外框架上的坐标系 $ox_1y_1z_1$, 轴 x_1 与外框架轴重合; 固连在内框架上的坐标系 $oxyz$, 轴 y 与内框架轴重合, 轴 z 与转子轴重合; 固连在转子上的坐标系 $ox'y'z'$, 轴 z' 与转子轴重合。坐标原点 O 相当于转子自转轴 z' 、内框架轴 y 和外框架轴 x_1 的三个坐标轴的交点。

假设在初始位置时,四套坐标系是重合的,如图 1.3.1 所示。

当外框架绕外框架轴 x_1 转过 α 角,这时 y_1 轴带动 y 轴及 y' 轴转过同样角度。

y' 轴与 Y 轴成夹角 α , 同时 z_1 轴带动 z 轴及 z' 轴也转过 α 角,则 z' 轴与 Z 轴成夹角 α , 如图 1.3.2 所示。

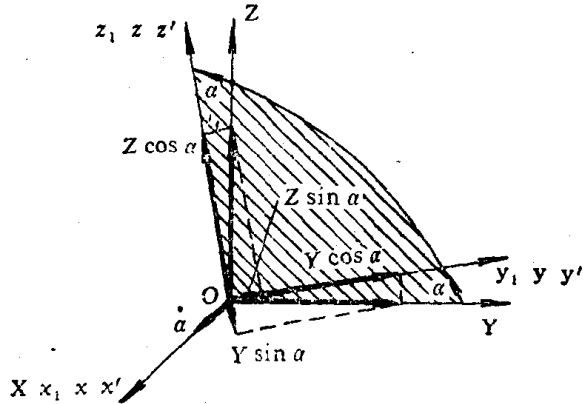


图 1.3.2 绕外框架轴转动图

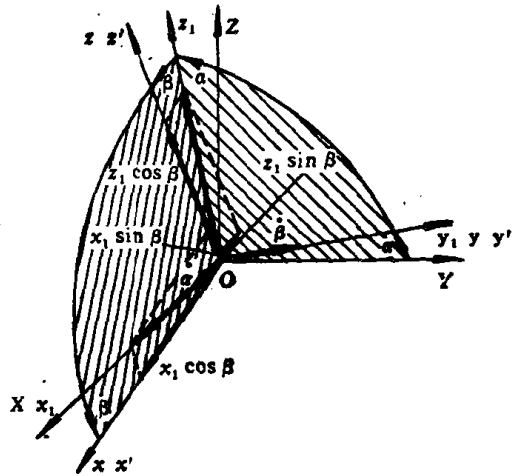


图 1.3.3 绕内框架轴转动图

当内框架绕内框架轴 y 转过 β 角,这时 z 轴带动 z' 轴转过同样角度, z' 轴与 z_1 轴成夹角 β , x 轴带动 x' 轴也转过 β 角,则 x' 轴与 x_1 轴成夹角 β , 如图 1.3.3 所示。

当转子绕自转轴 z' 转过 γ 角,这时 x' 轴转过同样角度。 x' 轴与 x 轴成夹角 γ , y' 轴也转过 γ 角度, y' 轴与 y 轴成夹角 γ , 如图 1.3.4 所示。

通过上面的三次转动得出的三个转角 α 、 β 及 γ , 完全可以确定转子相对于固定坐标系 $OXYZ$ 的位置。这三个角度即是描述转子位置的框架角坐标。

为了确定转子坐标系各轴 x' 、 y' 及 z' 与固定坐标系 $OXYZ$ 的各轴之间的方向

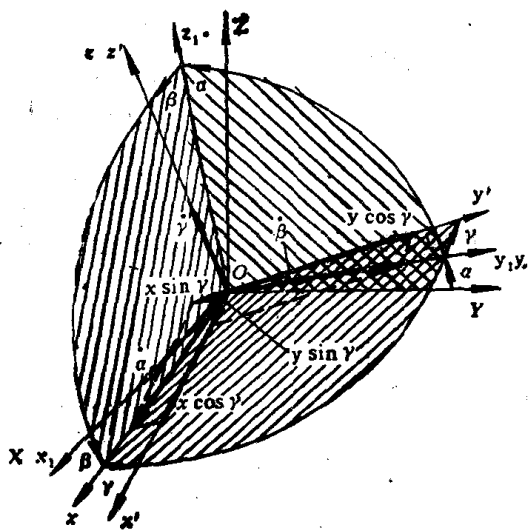


图 1.3.4 绕转子自转轴转动图

余弦，先设 i, j 及 k 分别是沿 X, Y 及 Z 轴的单位矢量， i', j' 及 k' 分别是沿 x', y' 及 z' 各轴的单位矢量，然后只需求出单位矢量 i, j 及 k 在 $ox'y'z'$ 各轴上的投影即可。当两轴不在同一平面时，可利用平面的交线作为中间投影轴。对只转动二次的情况，用这种直接投影法比较方便，但对三次转动时显得麻烦。较简单的方法是先找出两个坐标系各轴之间的方向余弦矩阵，然后乘以坐标列阵，就可以求出两个坐标系的坐标变换式。由固定坐标系 $OXYZ$ 到转子坐标系 $ox'y'z'$ 是经过三次连续转动完成的。每次转动有一个坐标变换矩阵，因此转子坐标系与固定坐标系之间的方向余弦矩阵应为三个矩阵之积。二个

坐标系的坐标变换式即为三个矩阵之积乘以固定坐标系的坐标列阵。

转子坐标系 $ox'y'z'$ 第一次转动是绕外框架的 x_1 轴以 α 角速度转过 α 角。得外框架坐标系 $ox_1y_1z_1$ 与固定坐标系 $OXYZ$ 的坐标变换式，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

转子坐标系 $ox'y'z'$ 第二次转动是绕内框架轴 y 以 β 角速度转过 β 角。得内框架坐标系 $Oxyz$ 与外框架坐标系 $ox_1y_1z_1$ 的坐标变换式，即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (1.3.2)$$

研究陀螺仪的进动运动时，经常要分析内框架的运动。与内框架固连的坐标系只有两个转动自由度，其运动可以用 α 及 β 两个转角来表示。将式 (1.3.1) 代入式 (1.3.2) 中，于是得到内框架坐标系与固定坐标系的坐标变换式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1.3.3) \end{aligned}$$

若 α 及 β 二转角都很小, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\beta \approx \beta$, $\cos\alpha \approx 1$, $\cos\beta \approx 1$, 则忽略二阶小量后, 得到简化的坐标变换式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1.3.4)$$

转子坐标系第三次转动是绕转子自转轴 z' 以 $\dot{\gamma}$ 角速度转动 γ 角。得转子坐标系 $ox'y'z'$ 与内框架坐标系 $oxyz$ 的坐标变换式, 即

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.3.5)$$

将式 (1.3.3) 代入式 (1.3.5) 中得到

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\alpha \cdot \sin\beta & -\cos\alpha \sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & -\sin\alpha \cos\beta & \cos\alpha \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta \cos\gamma & \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\gamma & \sin\alpha \sin\gamma - \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma \\ -\cos\beta \sin\gamma & \cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma & \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + \cos\gamma \sin\alpha \\ \sin\beta & -\sin\alpha \cdot \cos\beta & \cos\alpha \cdot \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1.3.6) \end{aligned}$$

当 γ 角的量值与 α 及 β 角都很小时, 则同时有 $\sin\gamma \approx \gamma$, $\cos\gamma \approx 1$ 。忽略二阶小量后, 得到简化坐标变换式:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (1.3.7)$$

通过上面的叙述可知, 绕固定点转动的刚体, 在空间的位置, 可以由三个框架角坐标完全确定。因此说, 具有一个固定点的刚体有三个转动自由度。当刚体绕定点运动时, 这些角都是时间的单值连续函数, 即

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= F_1(t) \\ \beta &= F_2(t) \\ \gamma &= F_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.8)$$

如果知道函数 $F_1(t)$ 、 $F_2(t)$ 及 $F_3(t)$, 那么对于每一给定的瞬时, 可从方程式 (1.3.8) 中求得角 α , β 及 γ 。因此就确定了刚体在这一瞬时的位置。所以方程式 (1.3.8) 称

为刚体绕定点转动的运动方程。

二、欧拉定理

具有一个固定点的刚体，从一个位置到另一个位置的任何位移，可由绕通过这固定点的某个轴，转过某一角度的转动而得到。

证明：如图 1.3.5 所示，在刚体中，取 A 、 B 两点，它们与固定点 O 的距离是相等的，这两点将在以固定点 O 为球心的球面上运动。假设在某一瞬时 t ，刚体的位置用图中的 O 、 A 和 B 三点来表示，经过时间间隔 Δt 后，即在 $t + \Delta t$ 瞬时，刚体上的 A 、 B 两点分别移动到 A' 和 B' 点位置。此时 A 、 B 、 A' 和 B' 四点均在同一个球面上。作大圆弧 $\widehat{AA'}$ 和 $\widehat{BB'}$ ，并取这两段圆弧的中点 D 和 E ，通过 D 和 E 两点，再分别作大圆弧与 $\widehat{AA'}$ 和 $\widehat{BB'}$ 垂直。这两个新作出的大圆弧相交于 C 点。在两个球面直角三角形 ADC 和 $A'DC$ 中， $\widehat{AD} = \widehat{A'D}$ ， $\angle ADC = \angle A'DC = 90^\circ$ ， CD 是公共边，所以这两个球面三角形全等，则 $\widehat{CA} = \widehat{CA'}$ 。同理可证，在球面直角三角形 BEC 和 $B'EC$ 中 $\widehat{CB} = \widehat{CB'}$ (A' 和 B' 是刚体内的两点 A 和 B 移动到的新位置)。这样，球面三角形 CAB 和 $CA'B'$ 的相对应的边都相等，所以两个球面三角形全等。由此得出 C 点是刚体由初始位置 OAB 移动到 $OA'B'$ 位置的固定不动点。那么当选择 O 、 C 及 A 三点表示刚体的初始位置， O 、 C 及 A' 三点表示刚体移动后的位置时，刚体由初始位置

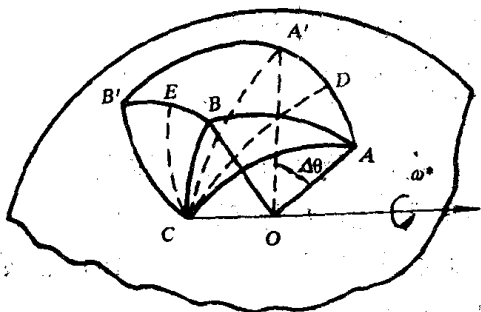


图 1.3.5 刚体绕定点转动的转轴及角位移

移动到新位置， O 点与 C 点都不移动，所以直线 OC 也保持不动。此直线可视为刚体的转动轴，而刚体绕此轴转过的角度等于 OCA 与 OCA' 两个平面之间的夹角 $\Delta\theta$ 。这个转角 $\Delta\theta$ 则被定义为刚体从 t 瞬时到 $t + \Delta t$ 瞬时的角位移。所以刚体角位移的意义与质点的位移的意义有类似的地方，两者都只考虑始末位置，而不计在时间间隔内实际所走过的轨迹。

$$\omega^* = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (1.3.9)$$

当 Δt 趋于零时，转轴 OC 的极限位置称为刚体的瞬时转轴。刚体的瞬时角速度为

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega^* \quad (1.3.10)$$

物体的角速度是矢量，其大小正比于刚体角位移在空间的变化率，其方向按右螺旋法则决定。

对于以角速度 ω 绕通过定点 O 的瞬时轴转动的刚体，如图 1.3.6 所示，刚体

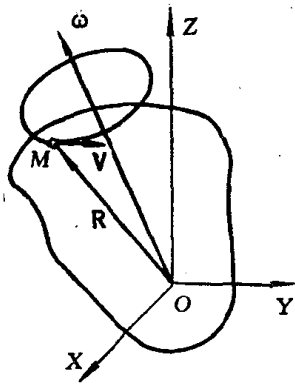


图1.3.6 绕定点转动刚体内质点的速度

内任何一点 M 的速度为

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (1.3.11)$$

也可写成

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (1.3.12)$$

$$= (\omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y)\mathbf{i} + (\omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z)\mathbf{j} + (\omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x)\mathbf{k}$$

因此矢量 \mathbf{V} 在以 O 为原点的直角坐标系 $OXYZ$ 各轴上的投影由下式表示:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ v_y &= \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ v_z &= \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{aligned} \right\} \quad (1.3.13)$$

其中 \mathbf{i} , \mathbf{j} 及 \mathbf{k} 是沿固定坐标系 $OXYZ$ 各轴的单位坐标矢。 ω_x , ω_y 及 ω_z 代表角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在固定坐标系 $OXYZ$ 各轴上的投影, 而 x , y 及 z 是刚体上某一质点 M 的位置矢径 \mathbf{R} 在固定坐标轴上的投影, 也就是点 M 的坐标。

§ 1—4 动坐标系绕定点转动时速度和加速度合成定理

所谓动坐标系绕定点转动, 就是与动坐标系相固连的物体在空间绕定点转动。

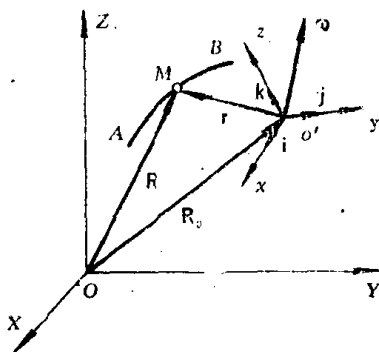


图 1.4.1 动坐标系绕固定点转动

设 $OXYZ$ 是固定坐标系, $o'xyz$ 是动坐标系, 后者可以绕固定点 o' (原点) 作任意转动, 其瞬时角速度为 $\boldsymbol{\omega}$ 。

又设动点 M 在相对运动中, 即相对于动坐标系 $o'xyz$ 的运动中描出某一轨迹 AB 。

一、速度合成定理

如图 1.4.1 所示, \mathbf{r} 代表动点 M 在动坐标系 $o'xyz$ 中的位置矢径, \mathbf{R} 代表动点 M 在固定坐标系中的位置矢径, $\mathbf{R}_{o'}$ 代表动坐标系的固定点 o' 在固定坐标系中的位置矢径, 那么, 从图中有

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{o'} + \mathbf{r} \quad (1.4.1)$$

动点 M 在动坐标系中的坐标用 x , y , z 表示, 动坐标系的单位坐标矢, 用 \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} 表示, 所以有

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.4.2)$$

因此

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0' + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.4.3)$$

点 M 的绝对速度 \mathbf{V} 等于该点的矢径 \mathbf{R} 对时间的导数。由于动坐标系绕定点 o' 转动，所以其单位坐标矢 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 的方向是不断地变化着，单位坐标矢是变矢量。而 \mathbf{R}_0' 是一固定不变矢量，即 $\frac{d\mathbf{R}_0'}{dt} = 0$ 。考虑到上述情况后，对上式进行微分，得

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \\ &+ x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

这公式的前三项是 M 点的相对速度，即

$$\mathbf{V}_r = \frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (1.4.5)$$

而后三项之和是 M 点的牵连速度。所谓牵连速度 \mathbf{V}_e ，是指该瞬时与动点 M 重合的并固连在动坐标系 $o'xyz$ 上的那一点的速度。因此，在决定点 M 的牵连速度时，应该假想把这个点固连在动坐标系 $o'xyz$ 上，也就是把它的坐标 x, y, z 看成是常量。由此得知，点 M 的牵连速度等于该点的矢径 \mathbf{R} 对时间的导数。在取导数时，坐标 x, y, z 应该看成是常量，必须假定 M 点停止相对运动，而只有随同动坐标系 $o'xyz$ 一起相对固定坐标系 $OXYZ$ 的转动。因此得

$$\mathbf{V}_e = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \quad (1.4.6)$$

根据布桑公式可得

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} \quad (1.4.7)$$

$\boldsymbol{\omega}$ 是动坐标系 $o'xyz$ 绕定点 o' 的瞬时角速度，所以式 (1.4.6) 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_e &= x \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) + y \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}) + z \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (x \cdot \mathbf{i}) + \boldsymbol{\omega} \times (y \cdot \mathbf{j}) + \boldsymbol{\omega} \times (z \cdot \mathbf{k}) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

比较式 (1.4.4), (1.4.5), (1.4.8) 可得

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_e$$

即

$$\mathbf{V} = \frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.4.9)$$

式 (1.4.9) 表明动点 M 对固定坐标系的绝对速度，等于相对速度与牵连速度的矢量和。

在上述问题中，既然动坐标系的原点对于固定坐标系没有相对运动，那么，也可以