邮电中专函授试用教材

数学

下册

北京邮电函授学院编

人民邮电出版社

邮 电 中 专 函 授 试 用 教 材

数　　学

下　册

北京邮电函授学院　编

人 民 邮 电 出 版 社

内 容 提 要

本书是在1960年人民教育出版社出版的中等专业学校函授教材《代数》、《几何与三角》和《解析几何与微积分》的基础上进行修订的，并增编了《专业数学基础》部分。现作为邮电中等专业学校函授试用教材，分上、下册出版。

下册内容包括《平面解析几何基础》、《微积分学初步》和《专业数学基础》三部分。为便于自学，书中重点比较突出，对难点内容有较清楚的解释，有启发性的问题，文字叙述比较通俗，每章前面有学习的目的和要求，每章末有小结。

本书也可供其他中等专业学校的学生和具有初中文化程度的职工自学参考。

邮电中专函授试用教材

数　学

下　册

北京邮电函授学院　编

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

开本：787×1092　1/32　1982年2月第　一　版

印张：15 8/32页数：244　1982年2月河北第一次印刷

字数：348 千字　　印数：1—21,500册

统一书号：15045·总2545—有5230

定价：1.20元

目　　录

第一篇　平面解析几何学基础

第二篇　微积分学初步

第三篇 专业数学基础

第一篇　平面解析几何学基础

第一章　平面上点的坐标的应用[①]

学习本章的目的与要求

目的　掌握解析几何的两个基本问题为以后学习打基础。

要求　熟记并会运用求两点间的距离的公式和两点连线的分点的求法公式。

§1.　前言

我们在代数里已经学过利用直角坐标系可以把平面上点的位置用一对实数（即坐标）表示出来，并且平面上的每一个点都对应着确定的一对实数，反过来，任何一对实数都对应着平面上的唯一的一点。

例如图 1-1 中的点A因为它的横坐标为-2，纵坐标为$+3$，所以这点对应着一对数（-2，3）。又如点B对应着一对数（4，0），反过来，一对数（$\sqrt{2}$，-3）决定了一点C。

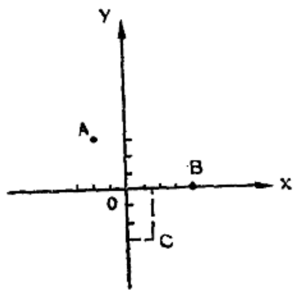

图　1-1

引用这个坐标概念，就将“形”与“数”联系起来了，从

① 在学习本章之前希望学者复习一下数学上册第一篇代数第五章§4。

而提供了我们用代数方法来研究几何的新工具。现在我们利用坐标法来解决解析几何中两个最基本的问题——两点间的距离和线段的定比分点。这两个基本问题今后我们常常要应用它们。

注 在解析几何里所谓"已知一点"就是说已知这个点在已知坐标系的坐标。同样，如果说"求一个点"，就是求它的坐标，因为知道点的坐标，点就确定了。

§2. 两点间的距离

1. 已知两个点 $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$ 试计算它们之间的距离。

设 AB 的距离是 d。由点 A 与点 B 分别作 Ox 轴的垂线 AP 与 BQ，并经过点 A 引平行于 Ox 轴的直线 AC 交 BQ 于 C。则得直角三角形 ABC（如图1-2）。

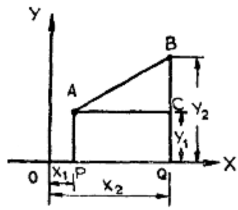

图 1-2

由勾股定理得

$$d^2 = AB^2 = AC^2 + CB^2 \qquad (1)$$

但

$$AC = PQ = OQ - OP = x_2 - x_1,$$
$$CB = QB - QC = QB - PA = y_2 - y_1,$$

将 AC 与 CB 这两个值代入等式（1），得

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

由此，得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2)$$

在根号前面取正号（+），因为两点间的距离永远是正的。

应当注意：

（1） 因为$(x_2-x_1)^2$，与$(x_1-x_2)^2$相等，$(y_2-y_1)^2$与$(y_1-y_2)^2$相等所以距离d也可写为

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

这就是说，两点间的距离与两个点的次序无关，也就是说与谁是第一点谁是第二点无关系。

（2）在上面推演公式（2）的时候，我们是假设点A与点B在第一象限里。如果A与B两点在任何其他一个象限或者分别在两个象限时，也可得出同样的公式。

这样上述公式用言语叙述出来，就是：两点间的距离等于这两个点的横坐标差的平方及纵坐标差的平方之和的平方根。

2． 如果两点中有一点是坐标原点，即（0，0），另一点的坐标是（x，y），那末，这一点到原点的距离公式是

$$d=\sqrt{x^2+y^2}。\tag{3}$$

例1． 试求A（-3，5）和B（1，2）两点之间的距离。

解 已知$x_1=-3$，$y_1=5$，$x_2=1$，$y_2=2$。设距离是d。那末把这些坐标代入公式（2），得

$$\begin{aligned}d&=\sqrt{[1-(-3)]^2+(2-5)^2}\\&=\sqrt{4^2+(-3)^2}\\&=\sqrt{25}=5。\end{aligned}$$

例2． 求与已知点$M_1(1,2)$；$M_2(-1,-2)$；$M_3(2,-5)$等距离的一点。

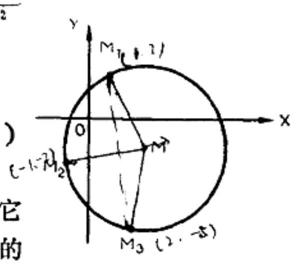

图 1-3

解 我们已经知道求点就是求它的坐标，所以设（x，y）为所求的点的坐标。

由已知条件，得

$$M_1M=M_2M,\quad M_2M=M_3M.$$

按公式（2）

$$M_1M=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2},$$
$$M_2M=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2},$$
$$M_3M=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}。$$

$$\therefore\quad \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$$
$$\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+5)^2}$$

解之，得 $\quad x=\frac{8}{3},\ y=-\frac{4}{3}$。

∴ 所求的点是$M\left(\frac{8}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$。

注 因为过此三点的圆的中心与此三点等距离，又与三点等距离的点只有一点。所以求得的这点就是过此三点M_1，M_2，M_3的圆的中心（见图1-3）。

例3. 求在Ox轴上的与点A（3，4）相距为5个单位的点的坐标。

解 按题意，所求的点在Ox轴上，所以这个点的纵标是0。

设所求点的坐标为（x，0），则由公式(2)有，

$$5=\sqrt{(x-3)^2+(0-4)^2}$$

解之，得$x=0$或6。

因此，所求的点有两个，一个是（0，0）即原点，一个是（6，0）。

§3. 线段的定比分点

1. 如果一点将一线段分为两个部分，并使这两部分的比为一已知数，那末这一点叫做该线段的定比分点。在图1.4中，

如果定比为$\frac{2}{3}$，那末点C便是这样的一个点。

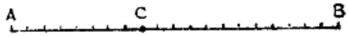

图 1-4

2. 现在我们来研究这样的点的求法：设已知一线段AB的两个端点分别为$A(x_1, y_1)$和$B(x_2, y_2)$（图1-5），且已知AB内的一点C，将AB分为两部分的比$\frac{AC}{CB}$等于已知数λ（字母“λ”读做“兰母达”），求C点的坐标。

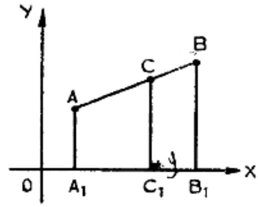

图 1-5

由点A，B与C各作Ox轴的垂线AA_1，BB_1与CC_1，从初等几何学中，我们知道线段AC，CB，A_1C_1和C_1B_1成比例，即

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB}$$

根据已知条件，得

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB}=\lambda \tag{4}$$

由图1—5知，

$$A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1$$
$$C_1B_1=OB_1-OC_1=x_2-x$$

将这两式代入公式(4)，得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda \tag{5}$$

$$\therefore \quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};$$

再由点A，B与C各作Oy轴的垂线，同样可得

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。$$

因此，按定比λ，分割线段AB的点$C(x, y)$的坐标，用下列公式来确定

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

不要忘记，这里定比λ的前项（或分子）是从第一点A到分点C的一部分AC，后项（或分母）是从分点C到第二点B的一部分CB，即$\lambda=\frac{AC}{CB}$。

至于第一点和第二点是根据什么来确定的呢？这个问题的回答是：在一般的情况下是按照题中写两点的先后次序来确定的。

应当注意，在推演公式(6)的时候，我们假设点A与点B是在第一象限的。同样可以证明，公式(6)对于A和B在坐标平面上任意的位置都是正确的。

例1. 点C把$A(2, 3)$及$B(3, -3)$两点的连线分为2:5的两段，求点$C(x, y)$的坐标。

解 因为A点写在B点之前，所以我们把A点当做第一点，B点当做第二点，这样，$x_1=2$，$y_1=3$，$x_2=3$，$y_2=-3$又

$$\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{2}{5}。$$

根据公式(6)得

$$x=\frac{2+\frac{2}{5}\times 3}{1+\frac{2}{5}}=\frac{16}{7},$$

$$y=\frac{3+\frac{2}{5}\times(-3)}{1+\frac{2}{5}}=\frac{9}{7}。$$

所以，所求的C点是$\left(\frac{16}{7},\ \frac{9}{7}\right)$。

3． 如果点C平分线段AB．那末$AC=CB$．因此

$$\lambda=\frac{AC}{CB}=1$$

公式(6)便取得下列形式

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{x_1+x_2}{2};\\ y&=\frac{y_1+y_2}{2}。\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

这就是说，线段中点的坐标等于两端点对应坐标之和的一半。

例2. 求点$A(3,2)$及点$B(-1,-2)$连线的中点C的坐标。

解 $x_1=3$，$y_1=2$，$x_2=-1$，$y_2=-2$。

依题意，根据公式(7)得

$$x=\frac{3+(-1)}{2}=1,\quad y=\frac{2+(-2)}{2}=0$$

所求的中点C是$(1,0)$。

例3. 某线段，中点是$(-1,2)$，一端点是$(2,5)$，求另一端点的坐标。

解 现在$x_1=2$，$y_1=5$，及$x=-1$，$y=2$。

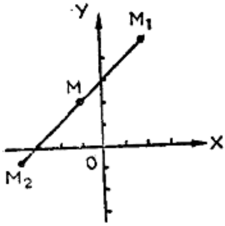

图 1-6

依题意，根据公式(7)得

$$-1=\frac{2+x_2}{2},\qquad \therefore\quad x_2=-4,$$

$$2=\frac{5+y_2}{2},\qquad \therefore\quad y_2=-1。$$

所以，所求第二端点的坐标是(-4，-1)。

例4. 试证：三角形两边中点的连线平行于第三边。

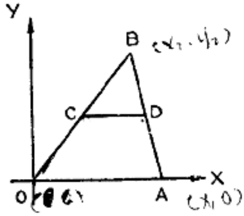

图 1-7

证 要用解析法证明这个定理，就得取坐标轴。由于图形的性质和坐标轴的选择没有关系。因此对于这个问题如果坐标轴选择得适当，计算便会很简单，否则就复杂了。所以我们这样来选坐标轴：使原点和三角形的一顶点重合，又使Ox轴与这顶点的一条邻边重合(图1-7)。这样，三角形的三个顶点便是$O(0，0)$，$A(x_1，0)$，$B(x_2，y_2)$。

设CD线是OB及AB两边的中点的连线。我们要证明的CD与OA平行(即与Ox轴平行)现在只要证明C和D两点的纵标相等就行了。

按公式(7)，C及D两点的纵标y_C及y_D各是：

$$y_C=\frac{0+y_2}{2}=\frac{y_2}{2},\qquad y_D=\frac{0+y_2}{2}=\frac{y_2}{2}。$$

因此，$y_C=y_D$。即CD线与OA线平行。

§4. 小结

1. 两点间的距离等于这两个点的横坐标差的平方及纵坐

标差的平方之和的平方根——公式（2）。

2． 坐标原点与任意点间的距离等于这个点的两个坐标平方和的平方根——公式（3）。

3． 线段AB被点C分成定比λ $\left(\lambda=\dfrac{AC}{CB}\right)$时，$C$点的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

习　　题

1． 什么叫做点的坐标？

2． 在平面为坐标轴所分割成的四个象限中，每一象限里的点的直角坐标的符号怎样？

3． 两点如对称于：（1）横轴，（2）纵轴，它们的直角坐标间有什么关系？

4． 两点如对称于原点，它们的直角坐标之间有什么关系？

以上四个问题需要先复习数学上册第一篇代数第五章§4，然后再答。

5． 已知四边形的顶点为（$-a$，0），（0，b），（a，0），（0，$-b$），求它的周长。

6． 试证顶点为（-3，-2），（1，4），（-5，0）的三角形是一等腰三角形。

7． 试在纵轴上找一点并与点A（10，8）和点B（-6，4）等距离。

8． 试求经过点（0，0），（4，2），（6，4）的圆的中心。

9． 动点从点A（3，2）沿直线方向移动12个单位至B点，其运动方向向右上方与Ox轴成60°角；求B点的坐标。

10． 已知一线段的中点是（-1，2），而它的一个端点是(2,5)，