

ZHUANGJICHU DE JISUAN HE FENXI

桩基础的计算和分析

卢世深 林亚超 编译

人 民 交 通 出 版 社

ZHUANGJICHU DE JISUAN HE FENXI

桩基础的计算和分析

卢世深 林亚超 编译

人 民 交 通 出 版 社

内 容 提 要

近年来桩基础的计算和分析有较大的进展,国内外对桩-土相互作用和桩动力性状及电子计算机在桩基结构分析中的应用都进行了深入的研究,为了介绍国外一些资料,本书选择了日本横山幸满著《桩基的计算方法和算例》和澳大利亚 H.G. Poulos 及 E.H. Davis 著《Pile Foundation Analysis and Design》两书的部分章节和悉尼大学有关桩基的三篇研究报告,编成《桩基础的计算和分析》一书,供有关方面参考。

本书主要内容有:横向受力桩、桩基结构物计算的注意事项、平面桩结构计算法、空间桩基的计算方法、膨胀土中的桩、发生横向运动的土中的桩、细长桩的压曲、桩的动力荷载、循环荷载对桩响应的影响、桩群柔度的简化计算、桩的荷载试验和测量误差分析等共12章。

桩基础的计算和分析

卢世深 林亚超 编译

人民交通出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

北京关西庄印刷厂印

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ 印张: 28 插页: 1 字数: 651 千

1987年3月 第1版

1987年3月 第1版 第1次印刷

印数: 0001—6,500册 定价: 5.45元

目 录

第1章 概论

1-1 桩基	(1)
1-1-1 桩功能的演变	(1)
1-1-2 桩基的使用	(1)
1-1-3 桩基的计算步骤	(2)
1-1-4 桩基的破坏性状	(4)
1-1-5 桩基的材料特性	(5)
1-2 基本理论	(6)
1-2-1 梁和桩的微分方程	(6)
1-2-2 荷载函数	(10)

第2章 横向受力桩

2-1 横向受力桩的分析	(14)
2-1-1 分析方法分类	(14)
2-1-2 各种分析方法的特点及其问题	(18)
2-2 极限地基反力法(极限平衡法)	(20)
2-2-1 假定地基反力按二次曲线(抛物线)分布的计算方法	(20)
2-2-2 假定地基反力按直线分布的计算方法	(24)
2-2-3 采用荷载函数的挠度曲线法	(25)
2-3 线弹性地基反力法: 其1—地基反力系数假定为与深度无关的情况	(32)
2-3-1 半无限长桩	(33)
2-3-2 有限长桩	(50)
2-3-3 多层地基中的桩	(62)
2-3-4 横向受力桩的一般性质	(74)
2-3-5 水平地基反力系数 k_h	(75)
2-4 线弹性地基反力法: 其2—地基反力系数为深度 x 的函数的情况	(88)
2-4-1 幂级数解法	(89)
2-4-2 差分近似解法	(104)
2-4-3 反力积分法	(111)
2-4-4 桩顶刚度系数与等效桩顶荷载	(119)
2-5 非线性弹性地基反力法	(122)
2-5-1 港湾研究所方法	(122)
2-5-2 Gleser法的逐步近似解法	(128)
2-5-3 Mc Clelland-Focht 法	(130)

2-6 复合地基反力法(p — y 曲线法)	(132)
2-6-1 全弹塑性法	(132)
2-6-2 Broms法	(135)
2-6-3 API-RP 2A法	(145)
第3章 桩基结构物计算的注意事项	(152)
3-1 桩的轴向承载力	(152)
3-1-1 公路桥下部结构设计规范及条文解释中桩基设计篇的方法[57]	(152)
3-1-2 建筑基础结构设计规范及条文解释中的方法	(155)
3-1-3 API-RP 2A的方法	(156)
3-2 桩轴向弹性系数 K_a	(158)
3-3 负摩擦力	(165)
3-4 群桩效应	(168)
3-4-1 轴向承载力的群桩效应	(168)
3-4-2 轴向弹性系数的群桩效应	(168)
3-4-3 负摩擦力的群桩效应	(172)
3-4-4 桩横向抗力的群桩效应	(173)
3-5 轴向受力桩的弯曲	(178)
3-6 假想弹性支点法的有关注意事项	(181)
第4章 平面桩结构计算法	(185)
4-1 刚性承台的平面桩基	(185)
4-1-1 位移法(刚度法)	(185)
4-1-2 力法求解	(199)
4-1-3 桩身受有荷载作用时的情况	(201)
4-1-4 考虑地基屈伏的计算方法	(208)
4-1-5 位移法(刚度法)的应用	(209)
4-1-6 承台截面内力的计算	(213)
4-1-7 承台刚度的影响	(215)
4-2 一般的平面桩基	(218)
4-2-1 梁单元刚度矩阵	(218)
4-2-2 桩单元刚度矩阵	(226)
4-2-3 整体结构的刚度矩阵	(226)
4-2-4 梁单元剪切变形的影响	(228)
4-2-5 简单的平面桩基	(230)
第5章 空间桩基的计算方法	(236)
5-1 一般的空间桩基	(236)
5-1-1 梁单元刚度矩阵	(236)
5-1-2 桩单元刚度矩阵	(242)
5-1-3 整体结构刚度矩阵及其解法	(244)
5-1-4 补充说明	(247)

5-2	由刚体和桩组成的空间桩基	(249)
5-3	有板单元的空间桩基	(253)
5-3-1	近似解法	(253)
5-3-2	承受轴对称荷载的桩基上的圆板—油罐基础实例	(254)
第6章	膨胀土中的桩	(260)
6-1	导言	(260)
6-2	现用的分析方法	(260)
6-3	弹性理论分析	(261)
6-3-1	基本分析	(261)
6-3-2	桩—土滑移	(262)
6-3-3	桩的受压破坏	(263)
6-3-4	桩的受拉破坏	(263)
6-3-5	非匀质土	(263)
6-3-6	运动随时间的变化	(263)
6-4	桩运动和荷载的典型解法	(263)
6-4-1	纯弹性的桩—土界面	(263)
6-4-2	结合考虑桩—土滑移的解	(265)
6-4-3	桩受拉破坏的影响	(268)
6-4-4	膨胀土中桩和固结土中桩的差异	(268)
6-5	设计用的曲线	(269)
6-6	理论分析在实际问题中的应用	(273)
6-6-1	预测土运动分布	(273)
6-6-2	桩—土界面强度	(274)
6-6-3	土模量	(275)
6-7	观测值与理论值的比较	(275)
第7章	发生横向运动的土中的桩	(278)
7-1	导言	(278)
7-2	分析	(278)
7-3	典型结果	(280)
7-3-1	桩的相对柔度的影响	(280)
7-3-2	边界条件的影响	(280)
7-3-3	土运动分布形式和运动量的影响	(281)
7-3-4	桩直径的影响	(283)
7-3-5	土模量和屈服应力的影响	(283)
7-4	实际应用	(284)
7-5	实测和计算的比较	(284)
第8章	细长桩的压曲	(287)
8-1	导言	(287)
8-2	完全埋置的桩	(287)

8-2-1	地基系数理论	(287)
8-2-2	k_h 随深度不变的解	(288)
8-2-3	k_h 随深度按线性增大的解	(289)
8-3	部分埋置的桩	(290)
8-3-1	理论方法	(290)
8-3-2	k_h 随深度不变的解	(290)
8-3-3	k_h 随深度按线性增加时的解	(291)
8-4	各项复杂因素的影响	(291)
8-4-1	沿桩长有轴向荷载传递	(291)
8-4-2	桩的原有缺陷	(292)
8-4-3	非弹性压曲	(293)
8-4-4	桩群效应	(294)
8-5	弹性理论分析	(294)
8-5-1	分析	(295)
8-5-2	弹性理论解示例	(297)
8-5-3	弹性理论解法同地基系数解法的比较	(298)
8-6	Mindlin方程积分的解	(299)
第9章	桩的动力荷载	(301)
9-1	导言	(301)
9-2	动力荷载的确定	(301)
9-2-1	机器荷载	(302)
9-2-2	波浪力	(303)
9-2-3	地震力	(303)
9-3	桩对轴向荷载的响应	(304)
9-3-1	端支承桩	(304)
9-3-2	摩擦桩或有荷载传递的端支承桩	(305)
9-3-3	桩群	(311)
9-4	桩对于横向荷载的响应	(314)
9-4-1	等代悬臂梁方法	(314)
9-4-2	有限差分法	(315)
9-4-3	Novak方法	(318)
9-5	桩受地震力的响应	(318)
9-5-1	土的动力响应	(318)
9-5-2	结构体系和土的相互作用	(320)
第10章	循环荷载对桩响应的影响	(321)
10-1	循环荷载对桩的轴向响应的影响	(321)
10-1-1	循环荷载引起的降低效应	(321)
10-1-2	加荷速率效应	(323)
10-1-3	理论分析	(323)

10-1-4	幅值变化的循环加荷	(327)
10-2	横向循环荷载对桩响应的影响	(328)
10-2-1	导言	(328)
10-2-2	分析方法	(328)
10-2-3	循环荷载下桩响应的几种理论解	(331)
10-2-4	不规则的循环加荷	(335)
10-2-5	计算示例	(337)
第11章	桩群柔度的简化计算	(340)
11-1	导言	(340)
11-2	分析	(340)
11-3	柔度系数和相互作用系数的估算	(344)
11-3-1	单桩的柔度系数	(344)
11-3-2	相互作用系数	(348)
11-4	简化分析同严密分析法及试验结果的对比	(350)
11-5	斜桩组成的桩群	(353)
第12章	桩的荷载试验和测量误差分析	(354)
12-1	导言	(354)
12-2	维持荷载的试验法	(354)
12-2-1	程序	(354)
12-2-2	荷载试验的解释	(355)
12-3	定速率贯入试验法	(358)
12-4	平衡的试验法	(358)
12-5	桩荷载试验中的沉降误差分析	(359)
12-5-1	采用基准梁时引起的误差	(360)
12-5-2	采用锚桩作反力时引起的误差	(361)
12-5-3	采用地锚作反力时引起的误差	(364)
12-6	横向荷载试验	(365)
12-7	扭转试验	(365)
附录1	符号表(第1~5章)	(368)
附录2	计算曲线及数值表	(371)
附录3	桩基计算程序框图	(388)
附录4	Schleicher的Z函数(YHP 67/97型台式计算机使用程序)	(421)
附录5	桩沉降计算的Mindlin方程积分	(426)
参考文献		(429)

第 1 章 概 论

本章将论述桩基结构的基本概念与其特点以及第2章以后各章中用到的基本理论。

1-1 桩 基

1-1-1 桩功能的演变

以前，桩一般指用于桥梁、房屋建筑等的基础、将作用于上部结构的荷载传递给作为地基的地层并具有安全支承结构物的功能的构件。在此类结构物中，桩联结于刚性承台，大部分的外荷载作为桩的轴力传到地基，或把地震力等水平荷载由承台和桩前方的被动土压来承受，而仅按承受竖向荷载的作用来设计桩。这是像木桩、钢筋混凝土桩等只能使用桩材料的抗压性能的时代的設計法，反过来说，对于桩也只能寄托希望于它的这种机能。因而那时桩基的应用范围也就有限制，一些重要结构物的基础主要采用沉井和沉箱等刚性基础。

但自50年代起，钢管桩、H型钢桩提供应用，由于这些桩具有很大的抗挠刚度和可能造成很大的桩长，这时软弱地基较多的地区的基础工程特别适用。因此，钢桩施工方法得到飞跃的发展。目前，日本每年使用的钢桩达到百万吨以上。

另一方面，随着钢桩的大量使用，钢筋混凝土桩、预应力混凝土桩和现场灌注桩的发展也非常惊人，特别在振动成为公害问题的城市中，现场灌注桩正起主要的作用。

桩基工程的发展，不仅由于其制造材料方面的进展，而受益于打桩机、钻挖机、焊接等有关技术的地方也很多，另外也归因于软地基的改良、耐震措施、劳动条件的改善等社会要求。现在桩基已基本上取代了以往的沉井、沉箱的地位，而成为基础工程的主要施工方法，在其使用量有很大扩展之外，也不能忽视这种质的变化。

于是，第二次世界大战后，以美国为中心的石油钻井平台等海洋结构迅速发展，日本也在向如多柱基础工程、大型海港建筑等方面发展，桩已不仅是支承上部结构的基础桩的概念，而是必须把它作为自身也要承受很大外力的结构物的重要构件来理解。

这样，面对桩可有多种多样使用方法的现实情况，桩的设计方法能充分适应这样广泛应用的应用吗？遗憾的是，在一根桩的承载力究竟多大这一点来说，可认为仍然没有脱离木桩时代的设计方法。

在这个意义上，本书以桩不单是桩基础中的桩而是更广泛的“桩结构物”的主要构造，并抓住它和结构物整个体系中的其他因素的关系作为编写方针。

1-1-2 桩基的使用

本书中所介绍的桩基结构分如下几类（参见图1.1）：

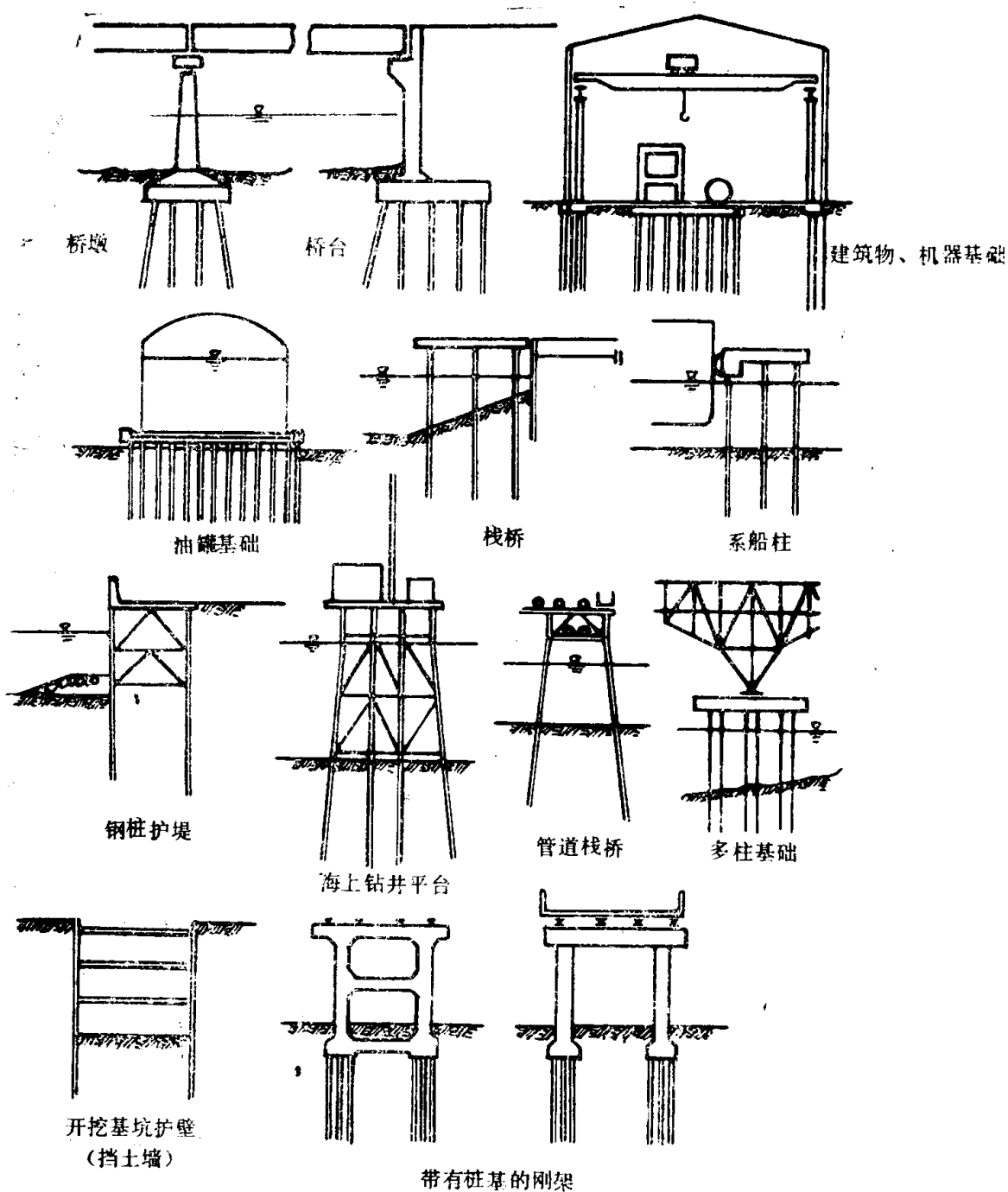


图1.1 桩基结构

- 桩基结构—
- 桩基础——桥墩、桥台、机器基础、房屋基础、油罐基础
 - 港口结构——栈桥、靠船码头、大型钢桩护堤、防波堤
 - 海洋结构——石油钻井平台、管道栈架、多柱基础
 - 特殊结构——海上施工平台、开挖基坑护壁（挡土墙）、有桩基的框架

1-1-3 桩基的计算步骤

所谓“设计”一词通常按结构物的构件计算和应力计算这一狭义来使用，可是其原来却应指那种为了满足对设计对象所要求的机能，实现最低费用-最高效果这一原则的一系列思考过程，例如在桩结构物方面，应包括规划布置、荷载的确定、材料选用和施工应注意事项等等这些颇为广泛的因素。涉及象这样广泛的、多方面的全面设计在一本书里很难谈全，

若一般性地泛泛而谈也无意义。正因如此，在本书中所介绍的“桩基设计方法”主要限于桩基结构的应力和变形的计算。

对于连续梁、刚架（亦称框架）等超静定结构的设计，首先是制订方案（如跨度的决定等）和构件截面的拟定，然后反复进行试算，以确定经济设计方案。实际上所有结构都应这样做。

桩基结构除极个别的情况（如单桩、桩顶和刚性承台全为铰结的竖直桩群等）外，均为超静定结构。特别当合理地评定地基特性时，则其应力和应变为不能叠加的非线性结构。但在实际工作中，总是把地基特性假定为线性的，桩基按线弹性体的方法计算，而结构的超静定特性不变。

这样，除上述特殊情况外，仅由单桩容许承载力来作桩基设计，一般来说是不可能的。这种计算方法是沿用木桩时代的方法，将基础作为绝对不动来作上部结构设计的。

实际的桩基结构，无论对地基还是对桩，把群桩联结在一起的构件或基础受到外力时是要变形的，其结果是使例如连续梁的支点变位、框架的支点转动。在这种桩基结构中，包括桩和地基的结构体系的各构件是按各自的刚度分担荷载；这样，其应力和变位的形成与一般结构的计算并无本质的差别。

但是，也还必须考虑地基同桩的相互作用，这可说是桩基结构的特点吧。

在一般情况下，桩基的计算步骤如图1.2所示。即：

1) 拟定桩基结构的尺寸和桩的布置以及拟定包含桩在内的构件单元的截面尺寸；

2) 求包含地基在内的整个结构各单元的刚度或柔度，由此形成结构整体刚度矩阵或柔度矩阵。用结构刚度矩阵（亦表示柔度指标）的计算法叫做位移法（也称为刚度法）；用柔度矩阵（即是柔度指标）的计算法叫做力法。但不论那一种方法，所得的结果是相同的。关于这些，以后还要详细介绍。一般说来，对于桩基结构用位移法要方便些。

3) 计算拟定的图式中各构件单元上作用的荷载。象作用于海洋结构的波浪力，会由于结构物的变形速度的缘故而使荷载值有所变化，但一般不考虑这种情况。

4) 按各单元的刚度或柔度作相应各单元的荷载分配。用位移法时，首先计算各单元的位移，然后再作力的相应分配；

5) 按分配的荷载计算各单元的应力和变形；

6) 检查各单元的应力和变形以及整体结构的位移是否在容许值范围内，如否，则返回到第1)步重新计算。

上述计算步骤适用于结构各单元符合线弹性体（应力与变形成线性比例，即满足虎克定理的物体），变形很小且可应用叠加原理的情况。对于土，虽然这些假定一般并不成立，但是

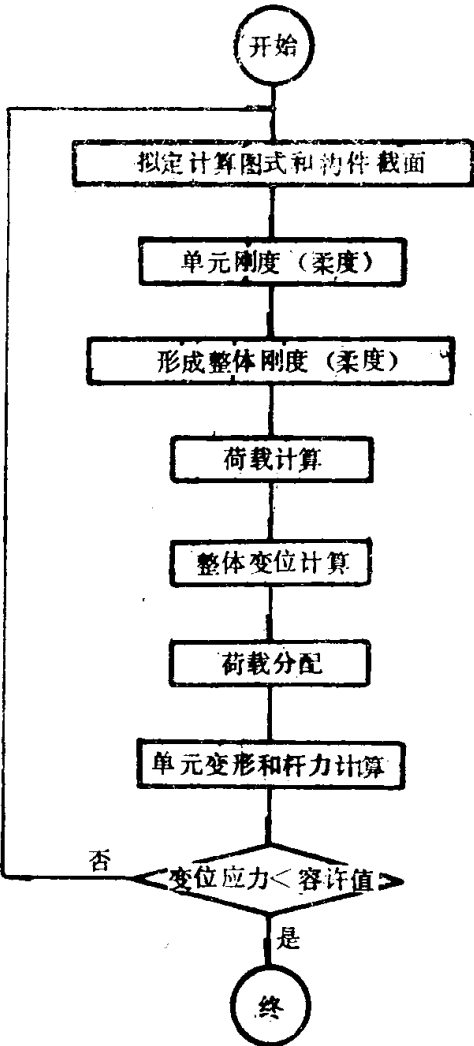


图1.2 桩基结构的计算步骤

为了简化计算，根据某些条件，假定土也是线弹性体，适用上述计算步骤。即使对于土不能作线弹性假定时，亦可按上述步骤采用反复计算直至收敛的方法进行计算。

计算步骤的原则虽如上所述，但是象一般框架计算中可以忽略杆件的轴向变形那样，当连结桩头的承台为刚性时，就不计桩顶的角变形（转角）。对木桩基础，其结构可按静定体系分析。

重要的是，由于有必要搞清楚要满足什么样的条件时假定才能成立，简化是否可能，所以轻易地采用基于众多假定而导得的公式是非常危险的。

基于这个原则，本书中将提出桩基结构计算的注意事项，并特别将地基和桩单元的刚度计算作为重点，另外还介绍桩基整体结构的简化计算，并对计算的有关前提条件的研究和适用范围尽量作出说明。

1-1-4 桩基的破坏性状

在上述的桩基计算步骤中，计算是按容许应力法为前提考虑的。

关于桩和桩材及桩的轴向承载力，按极限强度考虑容许应力或容许承载力时，其安全系数在一般情况下例如可取为3，地震时取为2。对于和桩轴垂直的横向力，由于桩的变形必须和地基反力即极限平衡状态的反力相适应，所以一般不能采用容许应力法。

另外，应用极限设计法计算结构的最终承载力，然后探讨实际荷载的安全度的方法也是可能的，但是由于桩基结构中相应于变形的规定严格，不能只采用极限设计方法。

为认识桩基结构的特点和领会其计算方法的关键，假定桩基结构破坏，那么探讨其属于哪一种破坏形态是非常重要的。

当桩基结构上作用的荷载（对于平面结构为垂直荷载、水平荷载和弯矩）按其各占的比例增加，其破坏性状可按如下考虑：

- 桩基的破坏性状—
- 桩的联结部件（包括承台）的屈服或破坏（A）

—桩材料的屈服或破坏（B）

—桩尖地基的屈服或破坏（C）

—桩前方地基的屈服或破坏（D）

—由于（A）～（D）组合的结构大变形（E）

在这（A）～（C）项中的安全系数一般取值较大，但是因桩基结构一般为超静定结构，可考虑由于这种因素引起的破坏比由于（D）、（E）项引起的破坏更难发生；与之相反，对于（D）项则有能否只用小的安全系数和不能导入安全系数的做法等情形。

为了说明这个问题，必须把桩结构分为入土浅的和入土深的两种情况来考虑。

在桩入土浅的情况，由于水平荷载或弯矩的作用，当桩前面的土产生的地基反力在桩全长范围内超过地基的屈服强度时，结构变位增大，直至上拔力增大到使其倾倒，而相应于地基屈服的安全系数不能像圆弧滑动面计算和板桩入土深度计算那样，只取接近于1的值（参见图1.3(a)）。

对于入土很深的长桩，不出现桩的全长范围内的水平向地基屈服，屈服是由地表逐渐向下发展的，从而在桩和与其相联结的构件内产生很大的应力，终于相继地超过材料的屈服值，以至结构出现大变形。地基的屈服和破坏范围逐渐扩大的这种现象称为进行性的破坏现象是长桩的特征（参见图1.3(b)）。

对于这种破坏性状，不能明确地定义其安全系数和容许强度，这似乎是可以理解的。

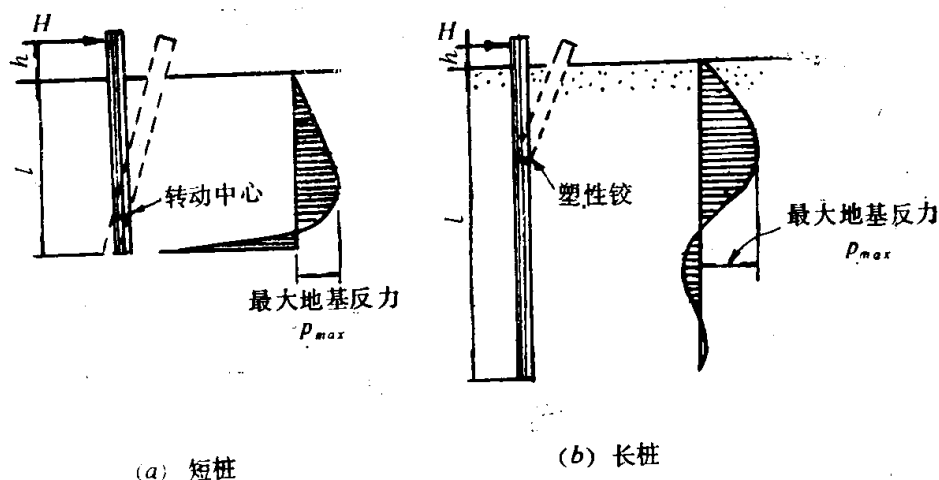


图1.3 桩地基的破坏性状

综上所述，可认为桩结构的破坏是最容易伴随发生桩前方地基屈服和破坏的形态，并可知由此导生的桩端地基屈服和抗拔能力的降低也助长了结构物的倒塌。

另外，对于桩基结构，由于变位增大而在功能方面出现破坏的现象是常见的。如桥梁基础会因为位移过大使梁部塌落。

从桩结构破坏性状的了解，似乎可以说桩结构的特征在于材料安全系数的不相一致，具有必须同时处理安全系数设计和变形问题这一种两重性。

1-1-5 桩基的材料特性

桩基结构是主要由钢、混凝土和土等各种异性材料组成的复合材料结构，且各部分强度特性和变形特性也各不相同，所以它具有在单一材料结构物中所没有的特点。

关于此点，宇都^[1]汇列出钢、混凝土和土的强度和弹性模量值，并按土质情况分别列出最大值和最小值的比（参见表1.1）。

桩基结构的材料特性 表1.1

材料		强 度 特 性		变 形 特 性	
		单轴强度 (kgf/cm ²)	$A \approx \frac{\text{最大值}}{\text{最小值}}$	弹性模量 (kgf/cm ²)	$B \approx \frac{\text{最大值}}{\text{最小值}}$
钢		3400~15000	4~5	2.0×10^6	1
混凝土		150~700	4~5	$(1.5 \sim 5.0) \times 10^5$	3~4
地基	土	0.1~1.0	100	5~500	100
	砂砾	粘着力 $C = 0.02 \sim 0.6$ $\phi = 20^\circ \sim 30^\circ$	30	300~3000	10
	软岩	10~100	10	2000~10000	5

（根据宇都^[1]）

表1.1是常用材料的极限强度，没有考虑压曲和疲劳。从上表，和其他材料是比较匀质这一点相比，土是以多大范围的区域作为对象的材料，是清楚的。

另外，就土来说，在探测、取样和材料试验等方面都存在有其他材料中少见的技术困难，还有怎样处理无法避免离散的数据和设计上选用的参数是否正确等这些解释上的问题。

因此在桩结构物的计算中，不能把土的条件认为是固定的，有必要经常注意参数的变化对整个桩基有怎么样的影响。将来或许要按星谷[2]指的引用概率论的方法。

1-2 基本理论

本节中将介绍第2章以后所用的梁或桩的微分方程及其在求解中所用的荷载函数。

1-2-1 梁和桩的微分方程

(1) 桩入土部分的挠度曲线微分方程

竖直且全长埋入土中的桩在地面处沿桩的主截面平面内受有横向外力（此时为水平力） H_0 及力矩 M_0 的作用，桩身受有水平分布荷载 $\bar{q}(x)$ 的作用（图1.4）。

坐标原点 O 取在沿桩轴线的地面点处， x 轴、 y 轴分别为桩轴线及与其垂直的方向，并分别以向下和水平力 H_0 的作用方向为坐标轴的正方向。

由于荷载的作用，桩发生挠曲，因而在支承它的介质即地基中产生连续分布的反力。关于这个反力将在第2章中作详细讨论。这里，假定桩上任意一点 x 处单位桩长上的反力 $\bar{p}$ 为深度 x 和此点桩的挠度 y 的函数，亦即 $\bar{p} = \bar{p}(x, y)$ 。

受外力的桩发生挠曲时，除引起水平反力外，还在桩与土的接触面上引起有竖直向的力（摩擦力），若不考虑这个竖向力对挠度曲线的影响，则各截面的地基反力就只是水平作用。

现在分析由水平截面*切取分离出的微分单元 dx ，在这个由桩上切割出的单元上受有分布荷载 $\bar{q}(x)$ (tf/m)，单元受力作用的情况如图1.5所示。

单元上截面作用有正剪力 S （与 y 轴反向），其上还相应作用有反时针（作为内力）的正弯矩 M （正 S 的弯矩）。在下面所有公式的推导中，都是按这样的方法来规定 S 和 M 的正方向。因这样规定的符号是要和一般结构力学中的规定相一致。

按图1.5考虑单元平衡，由水平力之和得

$$(S + dS) - S - \bar{p}(x, y)dx + \bar{q}(x)dx = 0 \tag{a}$$

因此

$$\frac{dS}{dx} = \bar{p}(x, y) - \bar{q}(x) \tag{b}$$

将 $S = dM/dx$ 代入则有

• 如果桩的转角比1小许多，把和弹性曲线垂直的截面同水平截面置换是可以的。但在考虑对于桩挠度的轴向力影响时，不能用这样的近似办法（参见本项5）。

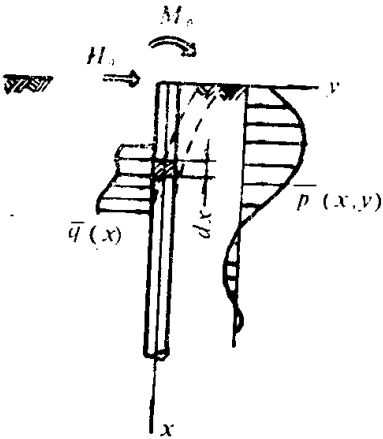


图1.4 桩入土部分的座标和力的正方向

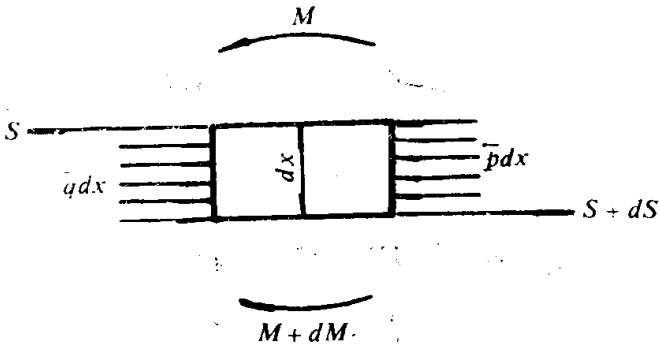


图1.5 微分单元 dx 的力平衡

$$\frac{dS}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = \overline{p}(x, y) - \overline{q}(x) \quad (c)$$

这里, $\overline{p}(x, y)$, $\overline{q}(x)$ 为单位桩长的荷载强度, 其单位为 (tf/m) 或 (kgf/cm)。
另外, 如图1.6, 因 y 的2阶微分 d^2y/dx^2 与弯矩 M 的符号相反, 可写出微分方程

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M \quad (d)$$

这里, E 为桩材弹性模量; I 为桩截面惯性矩; EI 为挠曲刚度, 单位为 (kgf·cm²) 或 (tf·m²)。

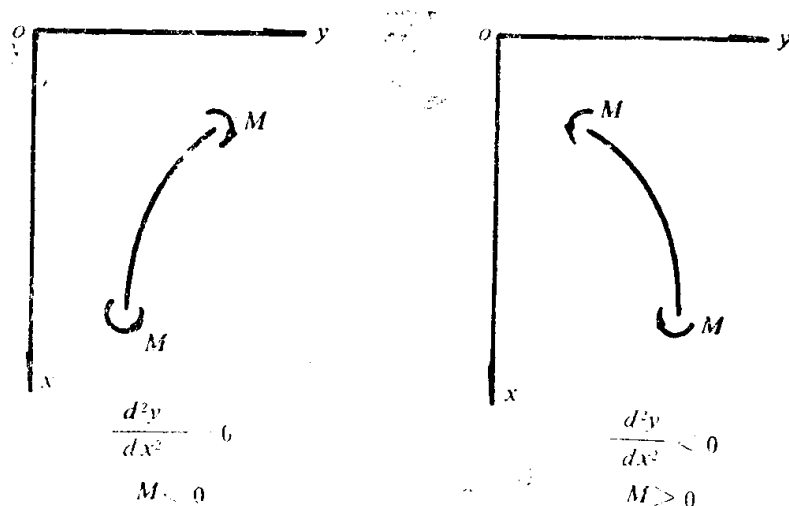


图1.6 挠曲微分方程的符号

假定在所研究的区段内 EI 为常数, 将式(d)2阶微分后代入式(c), 则有

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -\overline{p}(x, y) + \overline{q}(x) \quad (1.2.1)$$

这就是土中桩的挠度曲线微分方程。

分布荷载 $\overline{q}(x)$ 应按板桩的残余水压力和背面土压力情况考虑, 所以对桩结构物一般为 $\overline{q}(x) = 0$, 则上式可写成

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + \overline{p}(x, y) = 0 \quad (1.2.2)$$

$\overline{p}(x, y)$ 的具体函数形式和式 (1.2.2) 的解法将在第2章中详细讨论。不论对弹性地基或非弹性地基, 上式是式 (d) 成立时相应于挠度 y 总要成立的关系。

(2) 桩露出地面部分的挠度曲线微分方程

对桩的地面以上的部分, 坐标原点取在桩顶, x 轴和 y 轴与地面 F 桩的规定相同 (参见图1.7(a))。

对任一水平的梁, 取梁的左端作为坐标原点, 以梁中心轴为 x 轴, y 轴垂直向下, 剪力 S 和弯矩 M 的正向如图1.7(b)所规定。

若在桩或梁的单位长度上作用分布荷载 $\overline{q}(x)$, 由于不象地面以下的桩会产生反力 $\overline{p}(x, y)$, 即在式 (1.2.1) 中可取 $\overline{p}(x, y) = 0$ 。

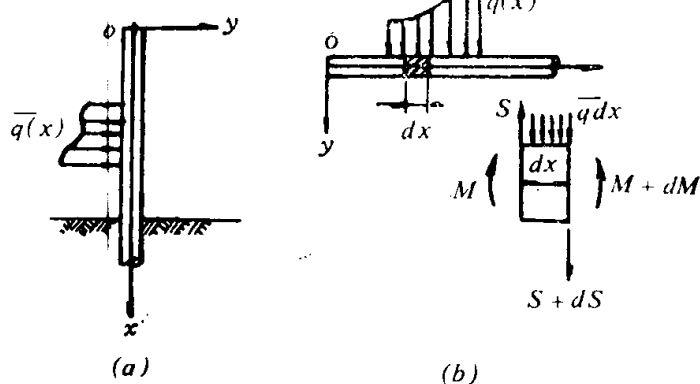


图1.7 地面以上的桩和梁的坐标

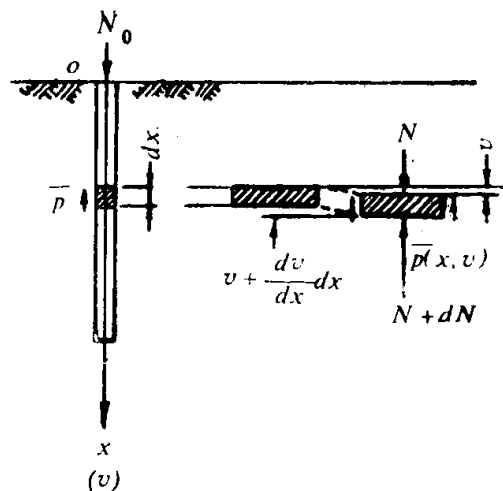


图1.8 地基中的桩的轴向应变

因此，这时挠度曲线的微分方程为

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \bar{q}(x) \quad (1.2.3)$$

这个四阶微分方程的一般解为

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \frac{1}{EI} \iiint \bar{q}(x) dx \quad (1.2.4)$$

式中， a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 为由边界条件确定的积分常数。

若 $\bar{q}(x)$ 为 x 的简单函数，则式(1.2.4)的四重积分可以很容易积出，但对于部分分段荷载、集中荷载就非常复杂，关于荷载函数的形式以后再详细讨论。

(3) 桩入土部分轴向变位的微分方程

桩受轴向荷载时，桩底及桩周均产生反力。首先分析一下任意点处的桩周反力，其值为此点的深度 x 和桩轴向变位 v 的函数，即 $\bar{p} = p(x, v)$ 。若由桩上截取微分单元 dx ，并考虑力的平衡条件，由竖向力平衡得

$$(N + dN) - N + \bar{p}(x, v) = 0 \quad (e)$$

因此，

$$\frac{dN}{dx} = -\bar{p}(x, v) \quad (f)$$

这里， N 为轴向力，以沿 x 轴正向作用者为正， $\bar{p}$ 为单位桩长上作用的反力，以向上者为正。

微分长度 dx 在轴力 N 作用下的变形为 dv ，根据虎克定理，可写出其变形方程为

$$EA \frac{dv}{dx} = -N \quad (g)$$

这里， A 为桩截面净面积， v 为变位，以沿 x 轴正向的变位为正。若在所考察的区段内， EA 为常数，将式(g)对 x 微分后代入式(f)，则有

$$EA \frac{d^2 v}{dx^2} = \bar{p}(x, v) \quad (1.2.5)$$

这就是轴向变位 v 的微分方程。

(4) 地面以上的桩和梁的轴向变位微分方程

当沿轴的正方向单位长度上受有分布荷载 $\overline{q}(x)$ 时, 当 q 的符号按式(12.5)同样考虑时, 满足轴向变位 v 的微分方程为

$$EA \frac{d^2 v}{dx^2} = -\overline{q}(x) \quad (1.2.6)$$

其一般解为
$$v = b_1 + b_2 x - \frac{1}{EA} \iint \overline{q}(x) dx dx \quad (1.2.7)$$

这里, b_1 、 b_2 为积分常数。对应于各种荷载条件下, 公式右边的2重积分作为荷载函数项, 以后再处理。

(5) 受轴力的桩的挠度曲线微分方程——柱梁

理论 (Beam column Theory)

在前面(1)~(4)的公式推导中, 假定桩轴力对桩的横向挠度没有影响, 如前面(c)式下边的脚注所说, 在桩转角很小时, 这样假定是可以的; 但如桩转角大, 轴力的影响也大, 所以要采用考虑轴力的挠度曲线微分方程。

在桩的情况中, 轴向压力占支配地位, 所以分析图1.9所示的微分单元。单元中轴力 N 垂直作用在上、下截面的重心处, 并假定处于平衡状态。而不考虑桩侧的摩擦力。

由相距为 dx 的两水平面切出的微分单元的力矩平衡得

$$(M + dM) - M - N dy - S_v dx = 0$$

即

$$\frac{dM}{dx} - N \frac{dy}{dx} - S_v = 0 \quad (h)$$

这里, S_v 为图中所示水平方向(与轴力 N 垂直)的剪力。由图1.9(b)可知, 在垂直于挠度曲线的截面的法线方向上的剪力 S_n 为

$$S_n = S_v \cos \theta + N \sin \theta$$

一般, 由于 θ 非常小, 可假定: $\cos \theta \approx 1$ 和 $\sin \theta \approx \tan \theta = dy/dx$, 则有

$$S_n = S_v + N \frac{dy}{dx} = \frac{dM}{dx} \quad (i)$$

以后主要用 S_v 而由式(i)求 S_n 。

将 $M = -EI(d^2 y/dx^2)$ 代入式(h)对 x 微分, 并代入式(b)中的 $dS_v/dx = \overline{p}(x, y) - q(x)$, 则有

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left(N \frac{dy}{dx} \right) + \overline{p}(x, y) = \overline{q}(x) \quad (1.2.8)$$

这就是受轴向力的桩的基本方程, 式(1.2.8)就是柱梁理论 (Beam Column Theory) 的展开法, 它可用于柔性的海洋结构和输油管线的分析计算。

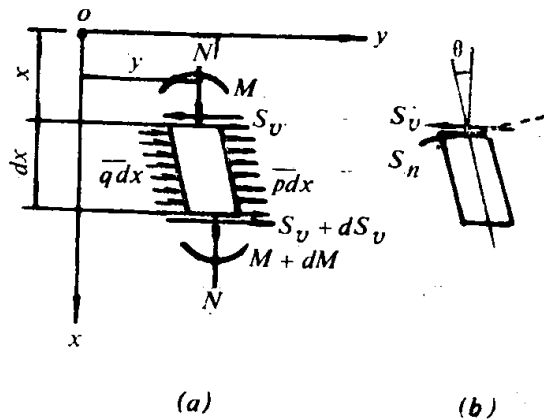


图1.9 受轴力作用桩的挠度