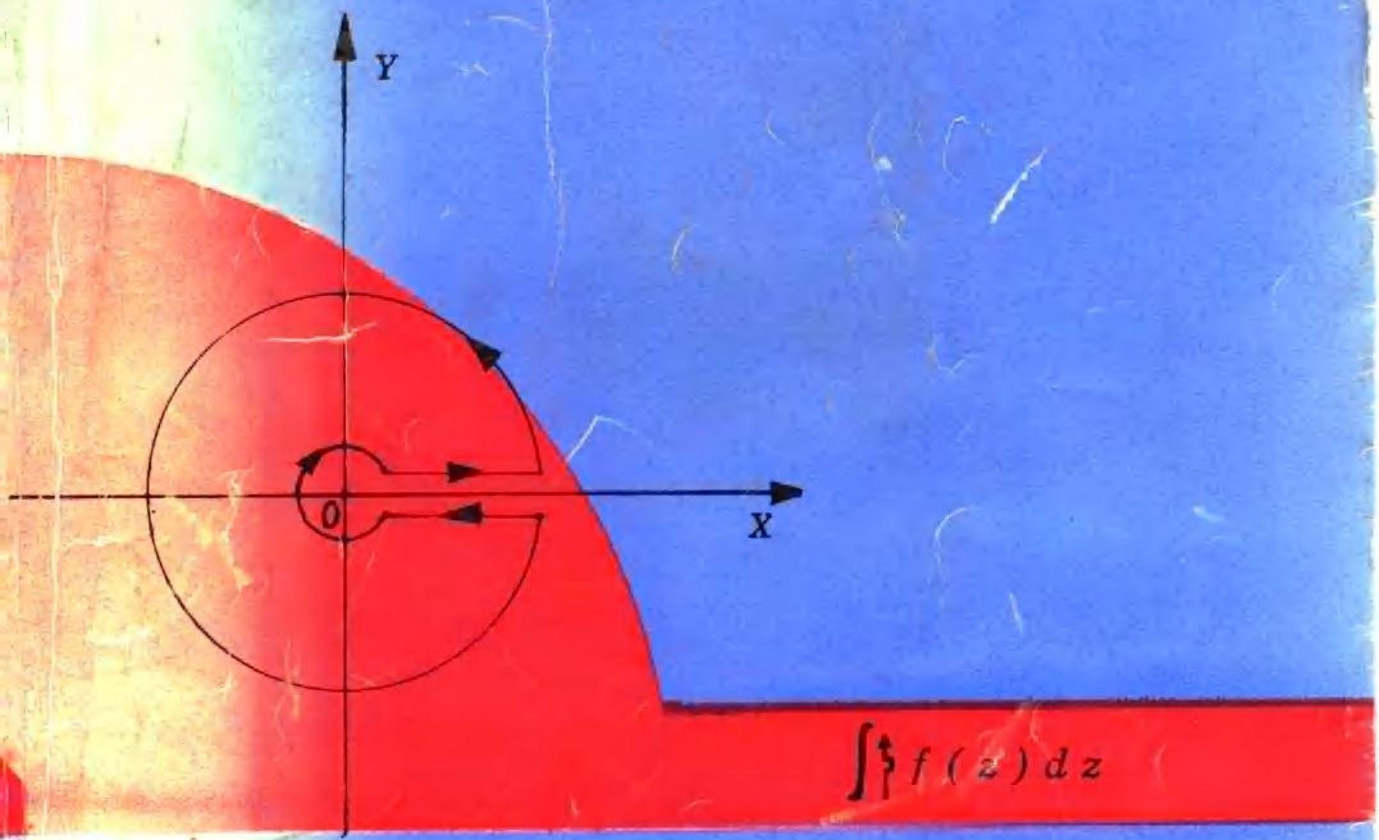
积分表汇编

邹凤梧　刘中柱　周怀春　编

陈庆益　黄念宁　校



宇航出版社

积 分 表 汇 编

邹凤梧
刘中柱　　编
周怀春

陈庆益　黄念宁　　校

宇 航 出 版 社

积分表汇编
邹凤梧　刘中柱　周怀春　编
陈庆益　黄念宁　校
责任编辑：崔素言
*
宇航出版社出版发行
北京和平里滨河路1号　邮政编码 100013
各地新华书店经销
华中理工大学印刷厂印刷
*
开本：787×1092／16　印张:27.5　字数：680 千字
1992 年 9 月第 1 版第 1 次印刷　　　印数：1-5000
ISBN 7-80034-543-2／C·16　定价：21.00 元

内容简介

本书是一本积分公式汇编数学手册，内容包括不定积分和定积分两大部分，其中定积分部分包括了各种特殊函数的定积分.从汇集的公式数量上说，它比 50 年代末期我国高等教育出版社编译的雷日克等的《函数表与积分表》一书要多得多，尤其是关于特殊函数的积分公式约多出一倍.另外，本书与 80 年代初期苏联出版的一同类书《积分表》(普鲁德尼柯夫等，1981 年)比较，在内容和编排上也要丰富、完整许多.

本书适用面很广，其中相当一部分内容是供数学和理论物理研究工作者用的，但也可供理工科大专院校师生在有关数理课程的教学中参考使用；对于从事理论分析和实际设计计算的工程技术人员，本书同样是十分有用和应该必备的数学工具书，因为书中包括了大量的普通积分公式.

序

本书是有关数学计算的重要工具书，是迄今国际上数学计算工具书中较为完善的一本．它有许多特点，首先，内容丰富，除了一些常见的积分公式外，它还包含了大量特殊函数的积分公式．积分公式总数比雷日克等编《函数表与积分表》(有中译本，高等教育出版社，1959 年)一书多 70%，尤其是关于特殊函数的积分公式，更是多出一倍；其次，它不仅给出了积分公式，而且涉及一些有关的基本概念、规则及方法；最后，本书对汇集的全部公式的正确性、适用性给予了特别重视．

自从计算机逐渐普及以来，有一种肤浅看法，似乎计算机可以用于一切计算，因而数学工具书再也无用了．其实这完全是一种误解．诚然，计算机作数值计算，单从这一点讲，如果涉及特殊函数，则计算机就要配以相应的特殊函数数据库．这是一般难以办到的，即使办到了，也难以得到应有的结果．比如，某一含特殊函数的定积分，准确结果是 $\pi e^{-2}(1-e^{-2})^2$，若用计算机算出一个数值，试问如何判断该数值正好是它的近似值呢？如果被积函数再含若干参变量，则计算机就更显得无能为力了．

另一方面，对于做基础理论研究工作的人，有时也确实要利用计算机求数值近似解，但更重要的是要研究规律性结果，这就要求求问题的解析解．因此，一本完善的数学工具书对他们就非常必要了．

一句话，如同计算机，一本好的数学工具书对于从事数理研究和教学工作者，对于广大工程技术人员，同样是重要的和应必备的．

最后，本人对于编者在撰写这本书时所表现出的奉献精神和付出的辛勤劳动致以衷心敬意．

陈庆益

1992 年 9 月于武昌

编者的话

自从 1959 年中国高等教育出版社编译出版了《函数表与积分表》(雷日克等，1951 年，苏联)一书后，时隔三十多年，该书再未重印，早已脱销，而国内也未见一本同类书问世．为了适应当前我国教育、科学技术蓬勃发展形势的迫切需要，我们于 1986 年就开始着手编写此书．由于市场经济的冲击，我们深感写书难，出书更难，本书是历经长时间的困难波折后，今天方能与读者见面，实在不易．

我们期望为数学工作者、物理学工作者、工程设计人员，以及理工科大专院校的广大师生提供一本较为完整的、方便适用的数学工具书，为此特作如下说明：

一、本书汇集的积分公式是目前国内外同类书中最齐全的，它比国外最新出版的一本书《积分表》(普鲁德尼柯夫等，1981 年，苏联)中的公式还要多三分之一．

二、编者对本书汇集的公式的准确性给予了足够的重视：对一部分公式重新进行过计算；对一部分公式用独立方法做过检验，以尽可能避免错误和不准确之处；同时，对有关公式的适用范围也在相应处给出注释．

三、内容编排顺序是按照通常的方式，全书分为不定积分和定积分两大部分，而所有积分公式又分为有理函数、代数无理函数和超越函数三部分．各章节的公式都是连续编号，力图使之成为简明易查的一览表式和辞典式工具书．

四、本书不是一本关于积分和函数计算方法的教科书，因此使用者应具有一定的基础数学知识，否则难以充分利用本工具书．

本书最先是在黄念宁教授、颜家壬教授等人策划和支持下着手编写的；华中理工大学物理系王海生、陈渭珠等同志在校对整理初稿材料过程中做了认真和有益的工作；更值得提及的是北京宇航出版社的编审同志们是有远见卓识的，没有他们对这本有用而无“利”的大部头书给予鼎力支持，我们的初衷和奉献之心是难以实现的．

编者学识和能力有限，因此尽管经过多次校正修改，疏误之处犹恐难免，恳望读者指正．

编　者

1992 年仲夏于东湖之滨

目次

上篇　不定积分

下篇 定积分

0 导引

0.1 部分记号与名称

下列记号用来简化积分表,故特别给出并加以注释:

$[\alpha]$　　小于或等于 α 的最大整数.

$(m;\ d;\ v)=m(m+d)(m+2d)\cdots(m+(v-1)d)$,　m,d为实数,　v为自然数;

$v=0$时,令 $(m;\ d;\ 0)=1$,　特别有:

$$(m;\ 1;\ v)=\frac{(m+v-1)!}{(m-1)!}=\frac{\Gamma(m+v)}{\Gamma(m)};$$

$$(m;\ -1;\ v)=d^{v}\left(\frac{m}{d};\ -1;\ v\right)=d^{v}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{d}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{d}-v+1\right)}$$

$$=(m-(v-1)d;\ d;\ v)$$

$$(m;\ d;\ -v)=\frac{1}{(m-d)(m-2d)\cdots(m-vd)},\qquad v=1,2,\cdots.$$

$$(m;\ -d;\ v)=(m-(v-1)d;\ d;\ v)=(-1)^{v}(-m;\ d;\ v),\quad v=0,1,2,\cdots$$

$$(1;\ 1;\ v)=(v;\ -1;\ v)=v!\qquad v=0,1,2,\cdots$$

$$(m;\ d;\ v)=\frac{d^{v}\Gamma\left(\frac{m}{d}+v\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{d}\right)}.$$

$\Gamma(m)\cdot(m;\ 1;\ v)=\Gamma(m+v)$.

$\sqrt{\quad}$	实数范围内指正根;	
$\ln x$	自然对数;	
$Ei(x)$	积分指数	参看6.11.1,3.2.3;
$li(x)$	积分对数	参看6.11.2,3.4.5;
$si(x)$	积分正弦	参看6.11.4,3.9.5b;
$ci(x)$	积分余弦	参看6.11.3,3.9.5a;
$Si(x)$	双曲积分正弦	参看3.17.5;
$Ci(x)$	双曲积分余弦	参看3.17.5;
$L_2(x)$	二重积分	参看6.7.1,3.5.7;
$\Phi(X)$	误差积分	参看3.3.1;
$S(x)$	FRESNEL正弦积分	参看3.12.1;
$C(x))$	FRESNEL余弦积分	参看3.12.1;
$B(k,\lambda)$	β − 函数或第一类EULER积分	参看7.1.9;
$\Gamma(z)$	Γ − 函数或第二类EULER积分	参看7.1.1;
$\Psi(z)$	Ψ − 函数	参看7.1.6;

$F(\varphi,k)$, $E(\varphi,k)$, $\Pi(\varphi,\rho,k)$ 表示Legendre范式积分所代表的三种完全积分，

参看2.12.1;

$\mathrm{K}(k)=F\left(\frac{\pi}{2},k\right)$, $\mathrm{E}(k)=E\left(\frac{\pi}{2},k\right)$, $\Pi(\rho,k)=\Pi\left(\frac{\pi}{2},\rho,k\right)$, 同上;

$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha;\ 1;\ \nu)(\beta;\ 1;\ \nu)}{\nu!(\gamma;\ 1;\ \nu)}x^{\nu}$, $|x|<1,\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots$ 超几何级数;

$F(\alpha,\gamma;\ x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha;\ 1;\ \nu)}{\nu!(\gamma;\ 1;\ \nu)}x^{\nu}$, $|x|<1,\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots$ 退化超几何级数;

$D_i(\varphi,k)$, 参看2.12.3－4;

$E=0.577215665\cdots$ EULER常数(7.1.10);

$G=0.915965594\cdots$ CATALAN常数(6.7.9b);

B_ν BERNOULLI数(3.6.8b);

$$B_0=1,B_1=-\frac{1}{2},B_2=\frac{1}{6},B_4=-\frac{1}{30},B_6=\frac{1}{42},B_8=-\frac{1}{30},$$

$$B_{10}=\frac{5}{66},B_{12}=-\frac{691}{2730},B_{14}=\frac{7}{6},B_{16}=-\frac{3617}{510},\cdots$$

$$B_3=B_5=_7=\cdots=0.$$

$\mathrm{f}(x)=\mathrm{g}(x)+O(x^{\alpha})$ 表示 $\left|\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{g}(x)}{x^{\alpha}}\right|\leqslant C<\infty$.

$\mathrm{Re}(z)$ 复数Z的实部;

$\arg z$ 复数Z的幅角，(主值：$-\pi\leqslant \arg z\leqslant\pi$);

$P\int_b^a$ 或 $P\int_{-\infty}^{\infty}$ 表示CAUCHY积分主值;

$P\int_b^a \mathrm{f}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{\alpha-\varepsilon}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x+\int_{\alpha+\varepsilon}^{b}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x\right]$, 奇点$\alpha$在$a,b$之间,即$a<\alpha<b$;

$P\int_{+\infty}^{+\infty}\mathrm{f}(x)=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$, 奇点在边界;

$\left(P\int\right)$ 仅对参量的某些取值需要积分主值;

$\int_{-i\infty}^{i\infty}$ 积分路线绕过被积函数相应的奇点.

$$\binom{m}{n}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}.$$

0.2 不定积分一般公式

1) 不定积分的定义:

$\int \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x = F(x)$, 当$F'(x) = \mathrm{f}(x)$时, 不定积分只被确定到一附加常数;

2) $\int \left[\mathrm{f}(x) + g(x)\right] \mathrm{d}x = \int \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x + \int g(x)\ \mathrm{d}x$;

3) $\int c\mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x = c\int \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x$, 当$c$不依赖于$x$时;

4) 分部积分:

$\int \mathrm{f}(x)\ G(x)\ \mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\mathrm{d}x$, 当$F'(x) = \mathrm{f}(x)$,

$G'(x) = g(x)$时;

5) 置换:

$\int \mathrm{f}(x)\ \mathrm{d}x = \int \mathrm{f}\left(g(y)\right)g'(y)\ \mathrm{d}y$, 这里 $x = g(y)$, $y = g_{(-1)}(x)$.;

6) 反函数的积分;

以$x = \mathrm{f}_{(-1)}(y)$ 表示 $y = \mathrm{f}(x)$ 的反函数, 则恒有 $\mathrm{f}[\mathrm{f}_{(-1)}(y)] \equiv y$ 及如下公式;

6a) $\int \mathrm{f}_{(-1)}(y)\ \mathrm{d}y = y\mathrm{f}_{(-1)}(y) - \int \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$, 这里, $x = \mathrm{f}_{(-1)}(y)$;

6b) $\int f_{(-1)}(y)g(y)\mathrm{d}y = \mathrm{f}_{(-1)}(y)G(y) - \int G\left(\mathrm{f}(x)\right)\mathrm{d}x$, 这里,$x = \mathrm{f}_{(-1)}(y)$, $G'(y) = g(y)$;

6c) $\int H\left[\mathrm{f}_{(-1)}(y)\right]g(y)\mathrm{d}y = H\left[\mathrm{f}_{(-1)}(y)\right]G(y) - \int h(x)G\left[\mathrm{f}(x)\right]\mathrm{d}x$,

这里,$x = \mathrm{f}_{(-1)}(y)$, $G'(y) = g(y)$, $H'(y) = h(y)$;

6d) $\int F_1[y,\mathrm{f}_{(-1)}(y)]\mathrm{d}y = F[y,\mathrm{f}_{(-1)}(y)] - \int F_2[\mathrm{f}(x),x]\mathrm{d}x$,

这里,$x = \mathrm{f}_{(-1)}(y)$, $\frac{\partial}{\partial x_1}F(x_1,x_2) = F_1(x_1,x_2)$; $\frac{\partial}{\partial x_2}F(x_1,x_2) = F_2(x_1,x_2)$.

0.3 定积分计算方法.

1) 如果知道不定积分,则有:

$$\int_b^a \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \qquad \text{这里} \quad F'(x) = \mathrm{f}(x).$$

2) 利用定义，定积分是和的极限:

$$\int_b^a \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{v=1}^{n}\mathrm{f}(\xi_v)\triangle x_v .$$

实例:

$$\int_b^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{v=0}^{n-1}\ln\left(1-2\alpha\cos\frac{v\pi}{n}+\alpha^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left[\prod_{v=0}^{n-1}(\alpha-e^{\frac{iv\pi}{n}})(\alpha-e^{-\frac{iv\pi}{n}})\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\ln\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha+1}(\alpha-1)$$

$$= \begin{cases}\pi\ln\alpha^2 & \text{对于 } |\alpha|>1,\\ 0 & \text{对于 } |\alpha|<1,\end{cases} \qquad (3.7.14)\cdot$$

3) 分部积分 (0.4.2)·

4*a*) 变量置换 (0.4.3);

4*b*) 被积函数的代数变换，尤其是部分分式展开.

5) 在积分符号下对参量p求导:

$$J = \int_b^a \mathrm{f}(p,x)\mathrm{d}x, \quad \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}p} = \mathrm{f}(p,a)\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}p} - \mathrm{f}(p,a)\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}p} + \int_b^a\frac{\partial\mathrm{f}(p,x)}{\partial p}\mathrm{d}x,$$

$$= \int_b^a\frac{\partial\mathrm{f}(p,x)}{\partial p}\mathrm{d}x, \qquad \text{当}a,b\text{与}p\text{无关时}\cdot$$

6) 在积分符号下对参量p积分:

$$J = \int_a^b \mathrm{f}(p,x)\mathrm{d}x, \qquad \int_\alpha^\beta J\mathrm{d}p = \int_a^b\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta\mathrm{f}(p,x)\mathrm{d}p.$$

7) 被积函数的级数展开与逐项积分:

实例: $\displaystyle\int_0^1\ln(x+1)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \sum_{v=1}^{\infty}(-1)^{v-1}\int_0^1\frac{x^{v-1}}{v}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}.$

8) 分解积分区间(分为有限个或无限多个分区间):

实例:

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \cdots = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\pi-x}-\frac{1}{\pi+x}\cdots\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

9) 方程的解:

实例:

$$J = \int_0^{\pi} x\sin^m x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}(\pi - x)\sin^m x\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}\sin^m x\mathrm{d}x - J,\ \text{因此}\ J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^m x\mathrm{d}x.$$

10) 微分方程的解:

实例: $J = \int_0^{\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x = a\int_0^{\infty} e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$,

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}a} = -2J, \text{故} J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}.$$

11) 用重积分求单重积分:

a) 为了求 $J = \int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$, 计算 $J^2 = \int_a^b\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, (0.4.16);

b) 用一个定积分替换被积函数的一个因子,然后交换积分顺序进行计算.

12) CAUCHY 留数定理: $\int_C \mathrm{f}(z)dz = 2\pi i\sum R$,

式中$\sum R$表示在C内部$\mathrm{f}(x)$的留数和;特别当$\mathrm{f}(x)$在C内部及在C上正则时,$\int_C \mathrm{f}(z)\mathrm{d}z = 0$.

a) $J = \int_0^{2\pi} F(\sin\varphi,\cos\varphi)d\varphi = \int_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i},\frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}$, ($z = e^{i\varphi}$,$C$ – 单位圆);

实例:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1 - 2p\cos x + p^2} = i\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z - p)(pz - 1)} = \frac{2\pi}{1 - p^2}, |p| < 1,$$

b) $J = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\mathrm{d}x$, $Q(x)$为有理函数,分母无实零点,

分母的方次至少比分子的方次大2,

于是有: $J = 2\pi i\sum_R R$,

这里$\sum R$表示$Q(z)$在实轴上的极点处的留数和.

c) $J = \int_0^{\infty} x^{k-1}Q(x)\mathrm{d}x$ $Q(x)$为有理函数,在正实轴上无极点,

且当$x \to 0$与$x \to \infty$时,$x^kQ(x) \to 0$;

那么 $J=\dfrac{\pi}{\sin k\pi}\sum R$,

这里$\sum R$表示$(-z)^{k-1}Q(z)$的留数和.

若$Q(x)$在正实轴上有单极点,则:

$$P\int x^{k-1}Q(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin k\pi}\sum R-\pi\operatorname{ctg}k\pi\sum R',$$

这里$\sum R'$表示正实轴上$z^{k-1}Q(z)$的留数和.

0.4 定积分一般公式.

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

2) $\displaystyle\int_a^b f(x)G(x)\mathrm{d}x=F(x)G(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x,\qquad F'(x)=f(x),\qquad G'(x)=g(x),$

(0.3.3).

3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y)\mathrm{d}y,\ x=g(y),\quad y=g_{(-1)}(x),\quad \alpha=g_{(-1)}(a),$

$\beta=g_{(-1)}(b);$

$g_{-1}(x)$在$a\leqslant x\leqslant b$内单值,且$g'(y)$在$a\leqslant x\leqslant b$和$\beta\leqslant y\leqslant\alpha$内恒大于零或恒小于零.

(0.3.4a)·

4) $$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.\begin{cases}0, & \text{当} f(-x)=-f(x),\\ 2\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{当} f(-x)=f(x)\cdot\end{cases}$$

5) $$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^a[f(x)+f(a-x)]\mathrm{d}x,\qquad (x\to a-x)\cdot$$

6) $$\int_0^{2a} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(2a-x)]\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{当} f(2a-x)=-f(x),\\ 2\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{当} f(2a-x)=f(x)\cdot\end{cases}$$

7a) $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{h}\int_0^h f\left(a+\frac{b-a}{h}y\right)\mathrm{d}y,\qquad \left(x=a+\frac{b-a}{h}y\right);$$

7b) $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{d-c}\int_c^d f\left(\frac{ad-bc+(b-a)y}{d-c}\right)\mathrm{d}y,\qquad \left(x=\frac{ad-bc+(b-a)y}{d-c}\right);$$