

板的非线性分析

Nonlinear Analysis of Plates

贾春元 著

沈大荣 吴代华 蒋沧如 译

王龙甫 校



科学出版社

1989

板的非线性分析

Nonlinear Analysis of Plates

贾春元 著

沈大荣 吴代华 蒋沧如 译

王龙甫 校

科学出版社

1989

前 言

本书是由作者于 1974—1975 学年间在威斯康辛-曼狄逊 (Wisconsin-Madison) 大学工程力学系所作的一系列学术报告和其后在卡尔加里 (Calgary) 大学土木工程系为高年级研究生开的板的非线性理论课程的讲课笔记发展而成的。本书的材料比通常一学期课程涉及的要多。阅读本书时,需要预先掌握三维非线性弹性理论的某些知识,以便表述现代非线性板的理论;还需要板的线性理论的某些知识,以便更好地理解在此考虑的板的问题。然而,前者可以用如 § 1.5 所提出的有关假设,或某些其他的表达方式避免。

均匀板的经典理论的历史背景可以在某些教科书中找到,如齐拉德 (R. Szilard) 所著的《板的理论和分析》。因此,下面仅对各向异性层合板理论的发展作一概述。

近几年来,层合各向异性复合材料作为结构构件已显著增加。这是由于这种材料利用了材料的各向异性性质和重量轻、强度高的优点,从而可以非常有效地使用材料。它们在各个工业部门都可以见到,如航空、火箭、海洋工程、造船、交通运输和房屋建筑等。预计无机材料将严重短缺,因而复合材料技术将发挥更加重要的作用。因此,关于层合复合材料,特别是薄板的弹性性能,已经进行了大量的研究工作。自从 1961 年赖斯纳 (E. Reissner) 和斯达夫斯基 (Y. Stavsky) 提出考虑弯曲-拉伸耦合效应的层合板静力小挠度理论以来,许多研究工作者已经利用该理论去研究非对称层合板的弯曲和屈曲,并将这些理论扩展到动力情况。此外,某些分析中还包括横向剪切变形。为节省篇幅,请阅本书的参考文献,也可看阿什通 (J. E. Ashton) 和怀特尼 (J. M. Whitney) 合著的《层合板理论》一书。1964 年斯达夫斯基在冯·卡门 (von Kármán) 理论的基

础上提出非均匀各向异性板的静力大挠度理论。1969年怀特尼和拉塞(A. W. Leissa)将惯性项包括在一般各向异性层合板的冯·卡门型大挠度理论中。后来,在文献中发表了由这些理论,得出的此类板的非线性性能的多种解答。本书在每章后给出了完备的参考文献。

本书包含的内容只限于板的弹性范围内的中等大挠度、后屈曲和非线性振动。全书采用冯·卡门意义上的非线性层合板理论。有关夹层结构的问题和横向剪切、转动惯量、温度等对板的弹性性能的影响将在另一书中论及。书中章节的标题明显地表明了总的内容,控制方程的推导在第一章中给出。其它各章,除了与第一章有关外,都无明显的相互关系,而代表全书几乎不同的部分。第二、三、四章研究各向同性板。用不同的方法讨论了别的书中讨论过的有关这些板的静力大挠度的某些课题,并且包括了一些新的结果。在一些参考书中对于各向同性板的后屈曲特性和非线性弯曲振动问题只给出了数值结果,但一般不给出数学推导。本书中强调了解的推演过程,而且给出了有关各向同性板后屈曲和中等大振幅振动的很多补充资料。第五章到第八章论及均匀的和层合的各向异性板的静力和动力的非线性问题,各向同性板作为一特例来处理。这些章节中列出的解答大多数是作者及其合作研究者自1972年以来的研究成果。本书内容可以看成是某些书的扩展,如铁木辛柯(S. Timoshenko)和沃诺斯基-克莱哥(S. Woinowsky-Krieger)所著的《板壳理论》中讨论的各向同性板的弯曲和弹性稳定问题已引伸为各向同性,各向异性和层合板的非线性弯曲和后屈曲问题,阿什通和怀特尼所著的《层合板理论》一书中所论述的层合板弯曲、压曲和振动问题已引伸为这类板的几何非线性性能问题。

尽管有几本关于板的理论和分析的书,但在本书出版时,还没有一本专门论述均匀各向同性和层合各向异性弹性板的几何非线性性的书籍。作者希望这本书能在一定程度上填补这个空白,并希望本书在这个领域中能作为高年级研究生、工程师、设计师、科学

家和应用数学家的有价值的资料。

我对加拿大国家科学研究委员会对于这工作的部分经费资助,对华教授 (M. A. Ward) 和塞赛木西 (M. Sathyamoorthy) 博士的各种帮助,以及我的妻子的鼓励和耐心,表示感谢。

贾春元

符 号 表

A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	由方程(1-53), $i, j = 1, 2, 6$, 定义(layered plate)的拉伸刚度, 耦合刚度和弯曲刚度
$A_{ij}^*, B_{ij}^*, D_{ij}^*$	由方程(1-127), $i, j = 1, 2, 6$, 定义(layered plate)的常数
a, b	矩形板的长度和宽度
a_0, b_0	矩形板的半长度和半宽度
C_{ij}	各向异性板的折算刚度
D	各向同性板的弯曲刚度
D_i	由方程(1-112), $i = 1, 2, 4$, 定义的正交各向异性板的主弯曲刚度和主扭转刚度
E	各向同性板的弹性模量
E_1, E_2	正交各向异性板的主弹性模量
E_L, E_T	一般正交各向异性层合板的主弹性模量
G	各向同性板的剪切模量
G_{Lz}	正交各向异性板的剪切模量
G_{LT}	层合板中正交各向异性层的剪切模量
h	板的厚度
$M_r, M_\theta, M_{r\theta}$	极坐标中每单位长度上的弯矩和扭矩
M_x, M_y, M_{xy}	笛卡尔直角坐标中每单位长度上的弯矩和扭矩
$N_r, N_\theta, N_{r\theta}$	极坐标中每单位长度上的膜力
N_x, N_y, N_{xy}	笛卡尔直角坐标中每单位长度上的膜力
n_{cr}	在 x 方向每单位长度上的临界屈曲载荷
n_x, n_y	分别在 x 和 y 方向每单位长度上的面内边界压力
P	集中载荷或部分载荷的总和
P_x, P_y	分别在 x 和 y 方向上的面内边界载荷的合力

- p_c 在 x 方向上的临界屈曲力
 p_x, p_y 分别在 x 和 y 方向上的面内边界压应力
 Q_r, Q_θ 极坐标中每单位长度上的横向剪力
 Q_x, Q_y 笛卡尔直角坐标中的每单位长度上的横向剪力
 q 横向分布载荷集度
 q_0 横向均布载荷集度
 r, θ, z 柱面坐标
 t 时间
 u, v, w 中面外一点分别在 x, y 和 z 方向上的位移分量
 u^0, v^0, w^0 分别在 x, y, z 方向上中面内的位移分量
 u_r, u_θ, w 分别在 r, θ, z 方向上中面内的位移分量
 x, y, z 笛卡尔直角坐标
 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{r\theta}$ 极坐标中的总应变分量
 $\varepsilon_r^0, \varepsilon_\theta^0, \varepsilon_{r\theta}^0$ 极坐标中的中面应变分量
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ 笛卡尔直角坐标中的总应变分量
 $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0$ 笛卡尔直角坐标中的中面应变分量
 $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ 中面弯曲和扭转曲率的改变
 λ 矩形板的尺寸比 $\left(= \frac{a}{b} \right)$
 ν 各向同性板的泊松比
 ν_{12}, ν_{21} 正交各向异性板的泊松比
 ν_{1L}, ν_{1L} 层合板中正交各向异性层的泊松比
 ρ 板的单位面积的质量
 ρ_0 质量密度
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$ 极坐标中的总应力分量
 $\sigma_r, \sigma_\theta^b, \sigma_{r\theta}^b$ 极坐标中的弯曲应力分量
 $\sigma_r^m, \sigma_\theta^m, \sigma_{r\theta}^m$ 极坐标中的薄膜应力分量
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ 笛卡尔直角坐标中的总应力分量
 $\sigma_x^b, \sigma_y^b, \sigma_{xy}^b$ 笛卡尔直角坐标中的弯曲应力分量
 $\sigma_x^m, \sigma_y^m, \sigma_{xy}^m$ 笛卡尔直角坐标中的薄膜应力分量

目 录

前言	vii
符号表	x
第一章 层合板的非线性理论	1
§ 1.1 应力和应变	1
§ 1.2 非线性弹性力学的基本方程	6
§ 1.3 广义虎克定律	10
§ 1.4 弹性常数的转换方程	13
§ 1.5 一般层合板的非线性运动方程	16
§ 1.6 用三个位移表示的方程	24
§ 1.7 用横向挠度和力函数表示的方程	37
§ 1.8 边界条件和初始条件	44
§ 1.9 求解的方法	45
习题	53
参考文献	56
补充参考文献	59
第二章 各向同性矩形板的中等大挠度	62
§ 2.1 承受横向载荷的可移夹紧板	63
§ 2.2 伽辽金法用于可移夹紧板	68
§ 2.3 在横向载荷作用下的简支板	72
§ 2.4 在横向载荷作用下的固定夹紧板	75
§ 2.5 用摄动法解承受均匀载荷的固定夹紧板	79
§ 2.6 各种边界条件的横向加载板	86
§ 2.7 有加劲边的夹紧板	90
§ 2.8 有限差分法用于承受横向压力和板边压力的板	97
§ 2.9 里兹法用于横向加载板	104

§ 2.10 对于初曲板的玛格瑞方程	109
§ 2.11 承受横向载荷作用的初曲板	113
习题	117
参考文献	120
补充参考文献	121
第三章 各向同性非矩形板的非线性弯曲	123
§ 3.1 柱坐标中各向同性板的运动方程	123
§ 3.2 各种边界条件下均匀加载的圆板	127
§ 3.3 各种边界条件下中心加载的圆板	133
§ 3.4 承受均匀边界力矩的圆板的弯曲	138
§ 3.5 承受组合横向载荷的简支圆板	141
§ 3.6 承受绕中心孔轴对称线载荷的环形板	144
§ 3.7 有各种边界条件的弹性基础上的均匀加载圆板	149
§ 3.8 承受均匀横向载荷的夹紧椭圆板	156
§ 3.9 承受均匀横向压力的斜板	159
习题	165
参考文献	167
补充参考文献	168
第四章 各向同性板的后屈曲特性和非线性弯曲振动	170
§ 4.1 方板和长矩形板的后屈曲	171
§ 4.2 单轴压力下简支矩形板的后屈曲	175
§ 4.3 各种边界条件下初曲矩形板的后屈曲	181
§ 4.4 未加载边对转动弹性约束的矩形板的后屈曲	191
§ 4.5 夹紧圆板的后屈曲	199
§ 4.6 简支和夹紧圆板的后屈曲	201
§ 4.7 铰支矩形板的自由振动	207
§ 4.8 各种边界条件下矩形板由简谐力引起的振动	214
§ 4.9 各种边界条件下矩形板对脉冲激励的响应	221
§ 4.10 各种板边条件下的圆板的振动	229
§ 4.11 夹紧圆板由正弦变化的轴对称载荷引起	

的振动	232
§ 4.12 有初曲率的夹紧斜板的振动	237
习题	246
参考文献	248
补充参考文献	249
第五章 各向异性板的中等大挠度	253
§ 5.1 均匀横向载荷作用下的正交各向异性矩形 夹紧板	253
§ 5.2 弹性基础上均匀加载的简支正交各向异性 矩形板	260
§ 5.3 有对转动弹性支承边界的横向加载的正交 各向异性矩形板	261
§ 5.4 有对转动弹性支承加劲边的正交各向异性 矩形板	269
§ 5.5 横向和中面载荷联合作用下的正交各向异 性矩形板	274
§ 5.6 均匀横向载荷作用下的夹紧正交各向异性 椭圆板	280
§ 5.7 承受均匀横向载荷的正交各向异性三角形板	286
§ 5.8 承受均布载荷的圆柱正交各向异性圆板	290
§ 5.9 均匀横向载荷作用下固定夹紧的各向异性 矩形板	298
§ 5.10 横向载荷作用下可移夹紧边的对称层合和 均匀各向异性矩形板	305
§ 5.11 横向分布载荷下对称层合和均匀各向异性 简支矩形板	310
习题	316
参考文献	317
补充参考文献	317
第六章 各向异性板的后屈曲特性和非线性弯曲振动	319

§ 6.1	正交各向异性简支矩形板的后屈曲·····	320
§ 6.2	全部夹紧和全部简支边的正交各向异性矩形板的后屈曲·····	323
§ 6.3	有加劲边的正交各向异性矩形板的后屈曲·····	327
§ 6.4	圆柱正交各向异性板的非轴对称有限挠度的控制方程·····	329
§ 6.5	外边界压力作用下的圆柱正交各向异性环形板的后屈曲·····	334
§ 6.6	有全部夹紧和全部简支边的对称层合和均匀各向异性矩形板的后屈曲·····	341
§ 6.7	全部夹紧和全部简支边的正交各向异性矩形板的振动·····	347
§ 6.8	全部夹紧和全部简支边的正交各向异性矩形板自由振动的多模式法·····	349
§ 6.9	直线正交各向异性圆板的振动·····	355
§ 6.10	可移夹紧正交各向异性斜板的振动·····	364
§ 6.11	有全部可移夹紧边和全部固定夹紧边的正交各向异性直角和等腰三角形板的振动·····	368
	习题·····	376
	参考文献·····	378
	补充参考文献·····	378
第七章	非对称层合各向异性板的中等大挠度·····	379
§ 7.1	横向和中面载荷作用下的简支非对称角铺设矩形板·····	379
§ 7.2	受横向载荷的简支非对称正交铺设矩形板·····	385
§ 7.3	横向和中面载荷作用下可移夹紧的一般层合各向异性矩形板·····	393
§ 7.4	均匀横向压力作用下可移夹紧的非对称正交铺设和角铺设矩形板的摄动解·····	397
§ 7.5	均匀横向载荷作用下固定夹紧的一般层合各	

向异性矩形板的近似解.....	403
§ 7.6 横向载荷作用下固定夹紧层合各向异性矩形板的较精确解.....	409
§ 7.7 受均匀板边力矩作用而弯曲的非对称角铺设矩形板.....	413
习题.....	415
参考文献.....	416
补充参考文献.....	416
第八章 非对称层合各向异性板的后屈曲特性和非线性弯曲振动	417
§ 8.1 简支非对称角铺设矩形板的后屈曲.....	417
§ 8.2 简支非对称正交铺设矩形板的后屈曲.....	421
§ 8.3 有夹紧边的一般各向异性层合矩形板的后屈曲.....	426
§ 8.4 各种边界条件下非对称角铺设板的振动.....	429
§ 8.5 两对边简支, 其它边夹紧的非对称正交铺设矩形板的振动.....	437
§ 8.6 全部夹紧和全部简支边的非对称正交铺设和角铺设矩形层合板振动的多模式法.....	440
习题.....	450
参考文献.....	451
补充参考文献.....	451
附录 A 方程 (2-80) 至 (2-82) 中的系数值	452
附录 B § 4.3 中的挠度系数值	454

第一章 层合板的非线性理论

非对称层合各向异性弹性板的非线性理论是由三维非线性弹性理论用经典积分法导出的。板的运动、弯矩、膜力、横向剪力的方程是用三个位移分量或横向挠度和应力函数表示的。对非对称角铺设、正交铺设和各向同性层合板、对称各向异性层合板，以及各向异性、正交各向异性和各向同性板的各种情况，分别给出了方程。相应的各向同性板的静力方程就是冯·卡门非线性板理论的方程。另外，板的某些基本知识和解法也将在本章中讨论。

§ 1.1 应力和应变

当一个变形体受外力作用，例如受外加的载荷、体积力、支反力的作用时，此物体将发生变形，且物体单元之间将产生相互作用的内力。在讨论内力时，应力定义为单位面积上的内力。物体内一点处的应力状态至多由九个应力分量来规定。而物体的变形则由线元的伸长和线元之间的角度的改变来表征。在工程中，伸长和剪切应变分量是由线元的单位伸长量和线元之间初始直角的改变量来定义，而一个应变张量的分量是用位移来定义的。可是，变形既可以是有限的，也可以是无限小的。在有限变形理论或非线性理论中，应力和应变可用两种不同的参考坐标系来描述，即按已变形形状来描述质点的欧拉坐标和按原来或未变形形状来描述这些质点的拉格朗日坐标。前者，独立变量是研究时处于变形状态中质点的坐标。后者，所有的量都是用每一个质点的初始位置坐标和后来运动过程的时间来描述。因此，在拉格朗日描述中材料的初始直线和矩形平面就会变形成曲线和曲面。

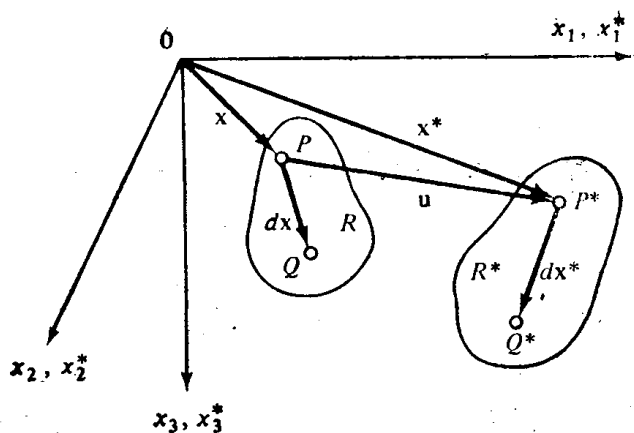


图 1.1 线元的变形

考虑一个占有域 R 的无应变的连续介质中的质点 $P(x_1, x_2, x_3)$, 如图 1.1 所示. 在以后的某一瞬时, 连续介质发生变形而占有域 R^* , 同时该质点也移动到新的位置 $P^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, 用位移矢量 u 表示. 这里我们都采用同一个笛卡尔直角坐标系来描述连续介质的初始和现在的形状. 假定从初始形状到变形后的形状是连续的, 且一一对应的. 由图 1.1 可见两组坐标的关系为

$$x_i^* = x_i + u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1-1)$$

点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 和附近的点 $Q(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ 均位于未变形状态中的线元上, 连接这两点的长度 ds_0 的平方是

$$ds_0^2 = dx_i dx_i \quad (1-2)$$

其中一项中的重复指标是指对该指标的求和. 在变形时, P 点和 Q 点分别移动到 $P^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ 和 $Q^*(x_1^* + dx_1^*, x_2^* + dx_2^*, x_3^* + dx_3^*)$, 新的线元 P^*Q^* 的长度 ds 的平方为

$$ds^2 = dx_i^* dx_i^* \quad (1-3)$$

差值 $(ds^2 - ds_0^2)$ 即为应变的一种量度. 在拉格朗日描述中, 坐标 x_1, x_2, x_3 作为独立变量, 因此, $ds^2 = (\partial x_i^* / \partial x_j)(\partial x_i^* / \partial x_k) dx_j dx_k$. 这样

$$ds^2 - ds_0^2 = dx_i^* dx_i^* - dx_i dx_i = 2\epsilon_{ij} dx_j dx_i \quad (1-4)$$

此处

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1-5)$$

称为格林应变张量或拉格朗日应变分量。在欧拉描述中,坐标 x_1^* , x_2^* , x_3^* 作为独立变量,因此

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ij}^* dx_i^* dx_j^* \quad (1-6)$$

其中

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^*} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i^*} \frac{\partial u_k}{\partial x_j^*} \right) \quad (1-7)$$

称为阿尔曼西 (Almansi) 应变张量或欧拉应变分量。

在无限小变形的情况下,方程 (1-5) 和 (1-7) 中的位移导数的乘积可以略去。因此,也就无需对这两种应变张量加以区别了。

在讨论应力时,自然要用欧拉坐标。然而,应力是与应变有关的,所以既可用欧拉描述,又可用拉格朗日描述。变形状态单位面积的应力张量的分量被定义为欧拉应力张量的分量,而克希霍夫应力张量是参照初始状态来度量的。所有这些应力和应变张量在笛卡尔坐标系中都是对称的。

在下述讨论中,我们采用拉格朗日描述。克希霍夫应力张量沿笛卡尔坐标轴 x, y, z 方向的法向分量分别用 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 来表示,而剪应力分量分别用 $\sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zy}$ 来表示。剪应力分量的第一个下标表示所考虑的那个面的法线方向,而第二个下标表示应力分量的方向。正应力分量的方向如图 1.2 所示。格林应变张量的伸长分量(或工程中应变的伸长分量)在坐标轴 x, y, z 方向用 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 表示,而在工程中应变的剪切分量用 $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zy}$ 来表示。要注意到工程剪应变是相应的应变张量的剪切分量的二倍。

对于一个在笛卡尔坐标系 x, y, z 中所给定的一点的应力状态,在新的直角坐标系 x', y', z' 中的应力分量可用经典的转换公式

$$\sigma' = A\sigma \quad (1-8)$$

来计算。

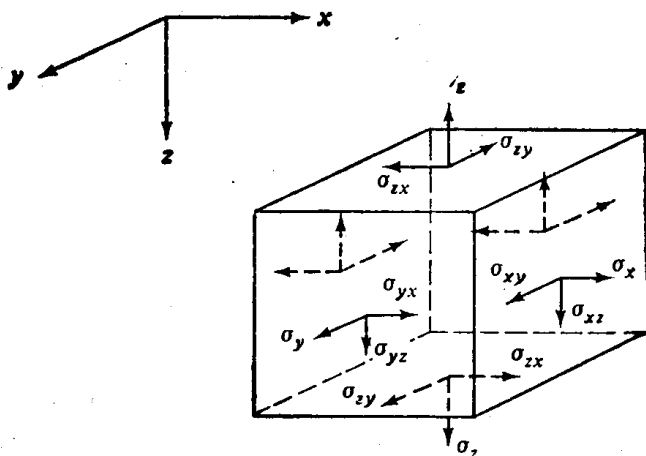


图 1.2 笛卡尔直角坐标系中的应力符号规则

这里

$$\sigma' = [\sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z \sigma'_{yz} \sigma'_{zx} \sigma'_{xy}]^T$$

$$\sigma = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \sigma_{yz} \sigma_{zx} \sigma_{xy}]^T$$

$$\begin{aligned} b_{44} &= a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32} & b_{45} &= a_{23}a_{31} + a_{21}a_{33} \\ b_{46} &= a_{21}a_{32} + a_{23}a_{31} & b_{51} &= a_{12}a_{32} + a_{12}a_{33} \\ b_{55} &= a_{11}a_{33} + a_{13}a_{31} & b_{53} &= a_{12}a_{31} + a_{11}a_{32} \\ b_{64} &= a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22} & b_{65} &= a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23} \\ b_{66} &= a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \end{aligned} \quad (1-9)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & \alpha a_{12}a_{12} & \alpha a_{11}a_{13} & \alpha a_{11}a_{12} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & \alpha a_{22}a_{22} & \alpha a_{21}a_{23} & \alpha a_{21}a_{22} \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & \alpha a_{32}a_{33} & \alpha a_{31}a_{33} & \alpha a_{31}a_{32} \\ \beta a_{21}a_{31} & \beta a_{22}a_{32} & \beta a_{23}a_{33} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ \beta a_{11}a_{31} & \beta a_{12}a_{32} & \beta a_{13}a_{33} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ \beta a_{11}a_{21} & \beta a_{12}a_{22} & \beta a_{13}a_{23} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

在方程 (1-9) 中，上标 T 表示矩阵的转置，而在方阵 (1-10) 中， $\alpha = 2$ ， $\beta = 1$ ， a_{ij} 为表 1.1 中所定义的方向余弦。同样地，应变分量的转换方程也可以写成矩阵的形式

表 1.1 方向余弦

	x	y	z
x'	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y'	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z'	a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$\epsilon' = A\epsilon \quad (1-11)$$

其中 A 由式 (1-10) 给定, 但 $\alpha = 1$, $\beta = 2$, 而

$$\begin{aligned} \epsilon' &= [\epsilon'_x \epsilon'_y \epsilon'_z \epsilon'_{xx} \epsilon'_{xy}]^T \\ \epsilon &= [\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \epsilon_{xx} \epsilon_{xy}]^T \end{aligned} \quad (1-12)$$

在板的情况下, 往往只需要坐标 x 和 y 绕厚度方向 z 轴的旋转. 这样, 转换矩阵 (1-10) 可简化为

$$A = \begin{bmatrix} c' & s' & 0 & 0 & 0 & \alpha cs \\ s' & c' & 0 & 0 & 0 & -\alpha cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -\beta cs & \beta cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

其中对应应力分量的转换, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, 而对应应变分量的转换, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, 同时

$$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta \quad (1-14)$$

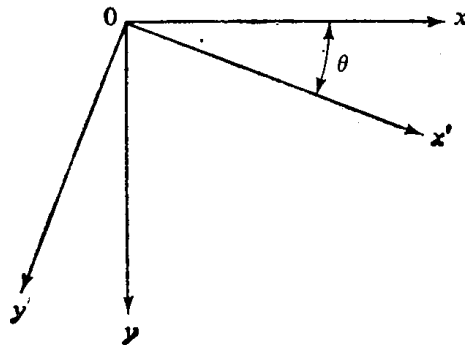


图 1.5 坐标系统 z 轴 θ 角的旋转