

TONGSU SHUXUE MINGZHU YICONG



通俗数学名著译丛

SHUXUE XINDE HUANGJIN SHIDAI

基斯·德夫林著

李文林 袁向东 李家宏 包芳勋等译

上海教育出版社

数学： 新的黄金时代

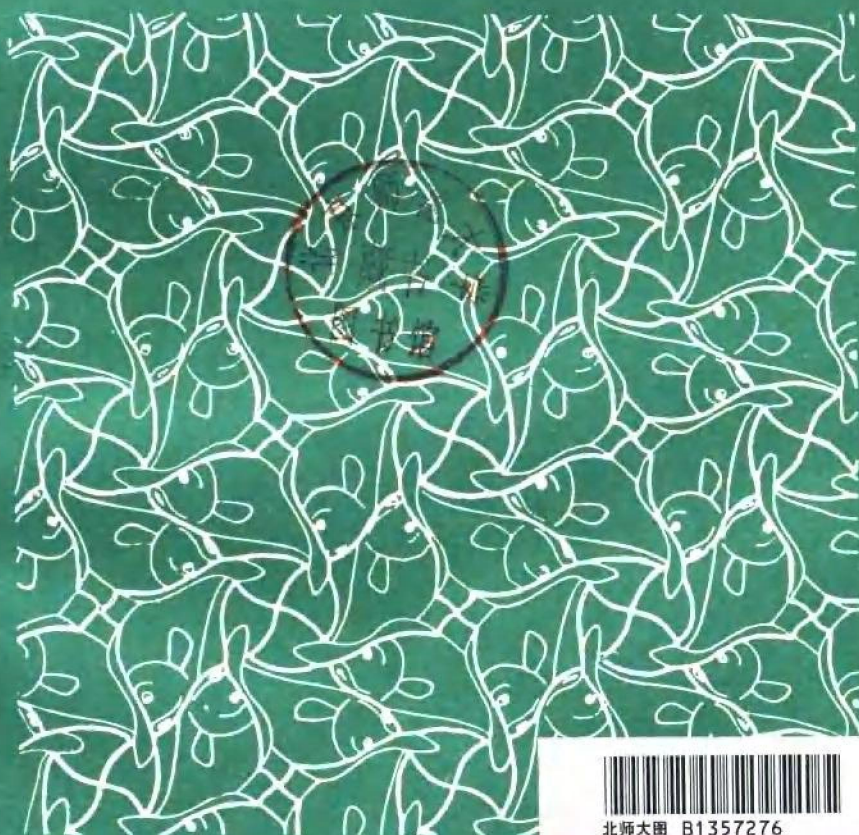
01-1

2

1744927

数学： 新的黄金时代

基斯·德夫林著 李文林 袁向东 李家宏 包芳勋等译 • 上海教育出版社



北师大图书馆 B1357276

Keith Devlin

Mathematics: The New Golden Age

Penguin Books

© Keith Devlin 1988

根据企鹅出版社 1988 年第 1 版译出，
本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

数学：新的黄金时代

基斯·德夫林 著

李文林 袁向东 李家宏 包芳勋 等译

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

(邮政编码：200031)

各地新华书店经销 上海市印刷六厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 9 插页 4 字数 230,000

1997 年 12 月第 1 版 1997 年 12 月第 1 次印刷

印数 1 - 3,200 本

ISBN 7 - 5320 - 5259 - 1/G·5501 定价：(软精)12.50 元

7/11/59/08

译丛序言

数学,这门古老而又常新的科学,正阔步迈向 21 世纪.

回顾即将过去的世纪,数学科学的巨大发展,比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志.因此,对于当今社会每一个有文化的人士而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学,了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要,在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面,20 世纪数学思想的深刻变革,已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法,门外汉往往只好望而却步.这样,提高数学的可接受度,成为一种当务之急.尤其是当世纪转折之际,世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作,国际数学联盟(IMU)还专门将 2000 年定为“**世界数学年**”,其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解,特别是被普通公众所了解”.

一般说来,一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步,数学普及工作在我国也受到重视.早在 60 年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物,激发了一代青少年学习数学的兴趣,影响绵延至今.改革开放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说,我国的数学普及工作与

发达国家相比尚有差距.我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平,数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在外国已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;……等等,试图为人们提供全新的视察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气,有关选题逐年减少,品种数量不断下降.在这样的情况下,上海教育出版社以迎接 2000 世界数学年为契机,按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作,使

《通俗数学名著译丛》出版成功。

让我们举手迎接 2000 世界数学年,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

1997 年 8 月

前 言

20 世纪是数学的新的黄金时代.那么什么是过去的黄金时代呢?是公元前 300 年左右古希腊几何学家的时代,还是 17 世纪牛顿与莱布尼茨发展无穷小算法以及费马从事其重要的数论研究的时代?抑或只有高斯的数学生涯(1777~1855)才堪称为黄金时代?或者更晚些,是涌现黎曼、彭加莱、希尔伯特和其他人的工作的时代——就是说唯有 19 世纪中至第二次世界大战初这段时期所产生的数学才是真正伟大的成就?

正如人类所从事的任何其他知识领域一样,要指出数学发展的“最伟大的时期”实际上是不可能的.每一代新的数学家都是在前人工作的基础上前进.我们只能说当今时代所进行的数学研究的规模是空前的.《国际数学家名录》收录了全世界约 25500 名职业数学家的名字,而这仅仅是代表了数学家总体的一小部分.还有大量的业余数学家(其中有些人已经作出了某些重大的发现!),对他们来说,数学只不过是一种业余的消遣.如果把这些人都算进来,那么数学家的总数就非常庞大了.单从数量上看(一般认为这样分析并不可靠,因为数量与质量并不总是密切相关的,在数学上尤其如此),当前我们是处在一个新的黄金时代中.这大概就是我选用现在这个书名的理由,反正每本书都应该有一个名字.

本书的目的是向那些对数学有兴趣的门外汉介绍最近发生的一些最重大的进展.如果要对每个称得上是“重要”的进展都有论及,恐怕要写好几本书而不只是一本.因此我必须有所选择,而且是十分严

格的选择.首先,我把时间范围限制在从 1960 年到 1985 年的二十五年间,并侧重于这一时期的后半阶段.其次我只介绍那些已经受到普遍关注的、并且能够进行通俗解释的课题.当然,我个人的兴趣和爱好在选材方面也起了一定作用.

为了能看懂本书的大部分内容,读者只需要对数学有开卷求知的兴趣,加上足够的耐心就行.(理解数学需要时间,即使是肤浅的理解也是这样.)书中难免有一些章节,如果读者受过良好的大学数学教育,就可能更好地理解我的介绍.不过我尽量将这部分内容减到最少程度.(读者不妨跳过那些感到困难的段落,往下读会变得“容易”些.)虽然各章内容基本上相互独立,但在编排次序上还是考虑了使前面的内容有助于理解后面的章节.

尽管有上述种种限制,加上篇幅也有限,我始终力求通过本书充分展示现代数学的丰富多采.不过读者看到的恐怕仍然只是一座冰山的尖顶.一本像这样性质的书是很难达到目的的,我只希望结果不要太坏.

基思·德夫林
于英格兰,兰卡斯特
1986 年 5 月

致 谢

像今天所有的数学家一样,面对广阔而迅速发展的数学科学,我本人只能在一个很窄的领域里被称之为专家.因此为了尽可能全面地介绍这门科学,我不得不依靠别人的帮助来消除初稿中必然存在的错误.为此我谨感谢:

Sir Michael Atiyah, Amanda Chetwynd,

David Nelson, Stephen Power, Hermann te Riele,

Morwen Thistlethwaite, David Towers.

他们每个人都阅读了全部或部分手稿并提出了有益的意见.我还要感谢企鹅出版社,该社从一开始就表现了巨大的热情来支持这样一个似乎是不可能完成的任务——试图对人类的最深奥的知识领域作通俗的介绍.当然,本书的一切缺点、错误概由作者本人负责.

K.D.

下列出版社允许本书作者复制使用有关的图片资料,特此衷心致谢:

图 8 和 17-23 取自 *The Beauty of Fractals*(1986), H.O. Peitgen 和 P.H. Richter 著, Springer-Verlag 提供;

图 9 和 10 取自 *Fractals: Form, Chance and Dimension* (1977), Benoit Mandelbrot 著, W.H. Freeman and Co. 提供;

图 14 取自 *Studies in Geometry* (1970), L.M. Blumenthal 和 K. Menger 著, W.H. Freeman and Co. 提供;

图 31 和 34 取自 Scientific American, W.H. Freeman and Co. 提供;

图 57 由 Cordon Art BV 提供.

目 录

前言
致谢

第 1 章	素数,因子分解和密码	1
第 2 章	集合,无限和不可判定性	27
第 3 章	数系和类数问题	49
第 4 章	混沌之美	69
第 5 章	单群	93
第 6 章	希尔伯特第十问题	120
第 7 章	四色问题	138
第 8 章	费马最后定理	166
第 9 章	复数领域的难题	190
第 10 章	纽结与其他拓扑问题	215
第 11 章	算法有效性	247

第1章 素数,因子分解和密码

世界上最大的素数

目前所知的世上最大的素数^①硕大无比,用标准的十进位数表示,它有 65050 位.用指数(或者说幂)的记号写比较简便:

$$2^{216091} - 1.$$

即,先用 2 自乘 216091 次,然后从中减去 1,才得到我们所说的那个素数^②.

指数记号容易引起误解.为了对大数的幂表示在脑子里有个较明确的概念,不妨想象一个普通的有 8×8 个方格的棋盘,并按如下规则往方格里摆放 2 毫米厚的筹码(如英国 10 便士的硬币).先将方格编号,如图 1 所示从 1 到 64.在第一格里放 2 枚筹码,在第二格里放 4 枚,第三格里放 8 枚.依此类推,下一格里放的筹码数恰为前一格里的两倍.于是,在第 n 个方格里摆有 2^n 个筹码.特别在最后一格里摆着 2^{64} 个筹码.你能想象这摆筹码会有多高吗? 1 米? 100 米? 1 千米? 肯定不对! 好,不管你信不信,你的这摆筹码将直冲云天,
[1] 超过月亮(它只不过 400 000 千米远),超过太阳(1.5 亿千米远),几乎直达(除太阳外)最近的恒星半人马座的 α 星,离地球大约 4 光

① “素数”这个术语将在下面解释.——原注.

② 这一纪录目前已被三次更新.1996 年 9 月 4 日,美国威斯康星州克雷研究所的科学家宣布,他们发现了目前已知的最大素数 $2^{1257787} - 1$,它共有 378632 位.——译者注.

年.用十进位数表示, 2^{64} 为

18 446 744 073 709 551 616.

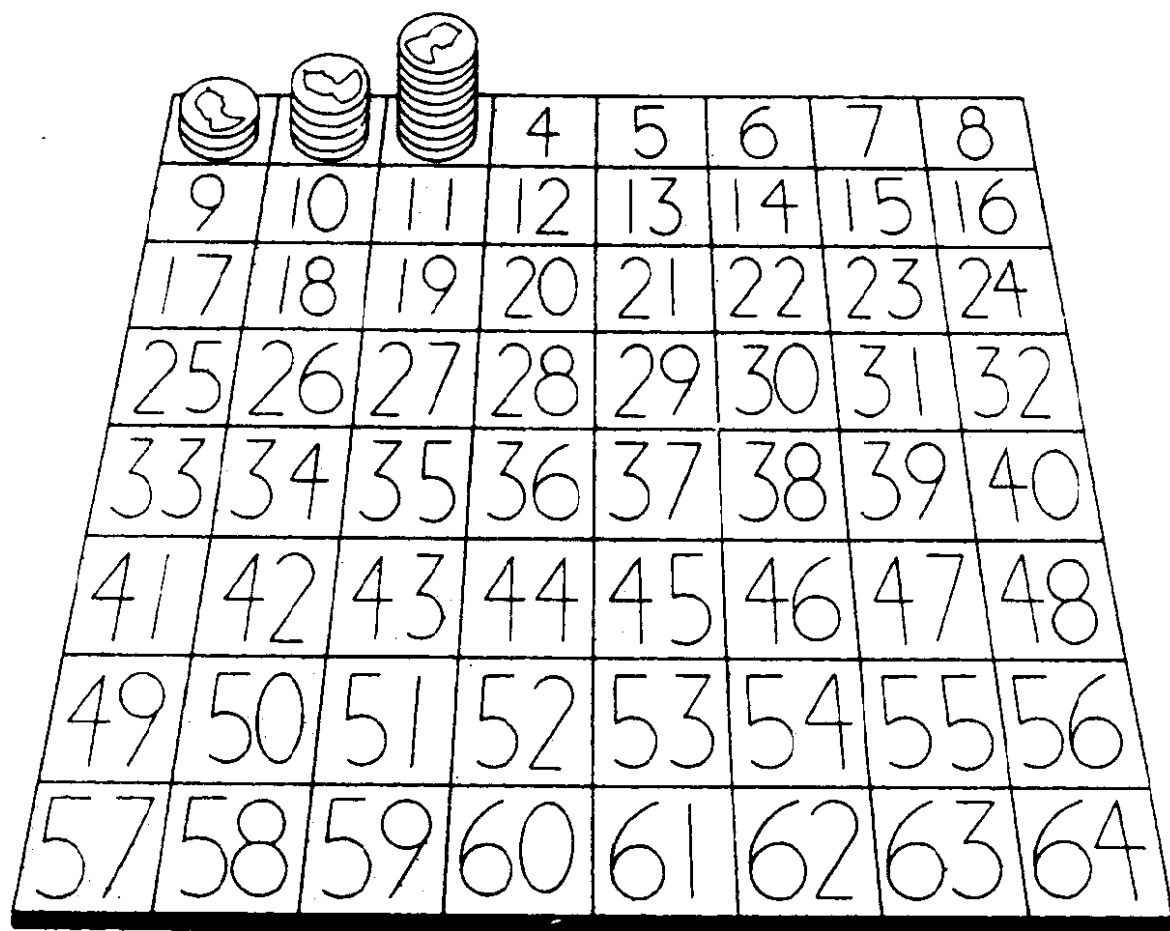


图1 达到天文数字的棋盘数.第一格里放2枚2毫米厚的硬币,接下去每一格中摞起的硬币高度都是前一格的两倍,第64个方格里摞起的硬币几乎伸展到最近的恒星半人马座的 α 星,大约4光年远.

2^{64} 就那么可观.为了得到出现在目前最大的素数中的 2^{216091} ,你需要一张有216 091个方格的棋盘,即在 465×465 个方格的盘上玩上面的把戏!

如何来研究这么大的数呢?首先,你可以使用计算机,但不是随便拿来一台就合用的.上面提到的最大素数是靠世界上最强大的计算机中的一台得到的,这台计算机每秒钟能进行2000亿次算术运[2]

算,它花了3个多小时才完成全部计算.但是单靠机器本身的能力还不够;还需要数学家的技巧.本章的其余部分将讨论这种技巧是如何发展起来的,它还有哪些其他方面的应用.

素 数

“寻找那些最伟大的数是最了不起的行为,从中能获得最大的愉快”,弗朗西斯·哈奇森(Francis Hutcheson)在1725年这样写道(《追寻关于善和美的观念的起源》;专论II,第3.8节).他心中想的数大概不是数学意义下的当时所知的最大素数,但是他的话用来描述人类对最基本的数学对象——自然数(或者说用于数(shǔ)数(shù)的数)1,2,3,⋯——的永无止境的迷恋,倒相当贴切.这些抽象的数学对象不仅对我们的日常生活必不可少,而且对几乎所有的数学都是十分重要的,难怪19世纪的数学家L·克罗内克(Kronecker)在谈论数学时说道:“自然数是上帝创造的,其余的一切是人的工作.”

适用于自然数的许多性质,都能把它们分成两类(一类具有某个性质,另一类则不具备这个性质).例如,偶性把自然数分成偶数(2,4,6,8,⋯)和非偶数(即奇数:1,3,5,7,⋯).再如能被3整除的性质亦然(在本书中凡说到一个数整除另一个数,即指正好除得尽,没有余数.所以,3,6,9,12都能被3整除,而1,2,4,5,7等都不能被3整除).奇-偶的分类既自然又很重要(按能否被3整除所作的分类就不那么自然,也不十分重要).另一种自然而重要的分类是根据完全平方性作出的,像 $1=1^2$, $4=2^2$, $9=3^2$,16,25,36,⋯.还有许多其他的分类法,而至今最重要的分类是将自然数分成素数和非素数.

称一个自然数 n 是素数,如果只有1和 n 本身能整除它(在这里,1属于特殊情形,习惯上不把1当作素数).

于是,2,3,5,7,11,13,17,19都是素数;1,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20都不是素数.(有时,我们称那些不是素数的数为合数.)例如,7是素数,因为2,3,4,5,6都不能整除它.

素数之所以重要的主要理由,希腊数学家欧几里得(Euclid,约公元前 350 ~ 公元前 300)就已知晓,他在其《原本》(集中了当时可得到的所有数学知识的 13 卷本巨著)的第Ⅸ卷中,证明了现在所谓的算术基本定理:每一个大于 1 的自然数,或者是素数,或者可表示为若干素数的乘积,这种表示若不计素数排列的次序则是唯一的.

例如,75900 是 7 个素因子(其中两个各重复出现两次)的乘积:

$$75900 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11 \times 23.$$

此式中等号右边的部分称为 75900 这个数的素因子分解.

算术基本定理告诉我们,素数是构作自然数的基本的建材,所有的自然数都是由它们建造的.素数很像化学家的元素或物理学家的基本粒子.掌握了任一个数的素因子分解,数学家就获得了有关这个数的几乎全部信息,在本章的后一部分将对此作出明晰的说明(见“密码”一节).现在,我们先来了解素数本身.

关于素数,你能问的最基本的问题是它们到底有多少.比如问有没有最大的素数,或素数是不是无止境的,因而有越来越大的素数?粗粗一看,它们确实非常普遍.1 之后的前 10 个数(即 2 至 11)中,有 5 个素数,即 2,3,5,7,11,占了总数的一半.在其后的 10 个数(12 至 21)中,有 3 个素数(13,17,19),占 0.3 的比例.在 22 至 31 中,素数占的比例仍为 0.3.但在接下去的两组(每组 10 个数)中,比例降至 0.2.看来,顺着自然数的序列,越往后素数越“稀少”.表 1 说明,小于 n 的素数的个数(记作 $\pi(n)$),如何随所选的 n 而变化,并给出了其“密度” $\pi(n)/n$.

n	$\pi(n)$	$\pi(n)/n$
1000	168	0.168
10000	1229	0.123
100000	9592	0.096
1000000	78498	0.078

表 1 素数的分布.对各个 n 值,给出小于 n 的素数的个数 $\pi(n)$.

可见,顺着数的序列往前走,素数变得稀少了.但是它们最终会
 [4] 完全枯竭吗?回答是否定的.欧几里得已证明了这一结论,他使用的优美的数学推理方法至今仍不失为光辉的典范.首先,想象所有的素数按大小列成表:

$$p_1, p_2, p_3, \dots$$

所以, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, 等等.目标是证明这张表必定会永远继续下去.换句话说,我们必须证明对任一个 n , 已知有素数 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, 则在 p_n 之后必然还有不同的素数出现.证明的诀窍是看下面这个数

$$N = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1.$$

它是由所有的素数 p_1, p_2, p_3 , 直至 p_n 的乘积加上 1 得到的.显然 N 比 p_n 大,若 N 恰为素数,则我们知道 p_n 之后确实还有一个素数,这正是我们想证明的.另一方面,如果 N 不是素数,则它必能被某个素数整除,不妨把此素数记作 p .可是你用 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中的任何一个素数去除 N , 皆得余数 1 (就是上面我们得出 N 时加的那个 1), 因此我们的 p 一定是另一个不同的素数,这样就已经证明了所需的结论.无论如何,总存在一个比 p_n 大的素数,所以我们可以得出结论,素数表将无限延续下去.

注意,我们并不知道上述形式的 N 是不是素数.如果你试算几个例子,你会发现这种形式的数往往是素数.例如,

$$N_1 = 2 + 1 = 3,$$

$$N_2 = 2 \times 3 + 1 = 7,$$

$$N_3 = 2 \times 3 \times 5 + 1 = 31,$$

$$N_4 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211,$$

$$N_5 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 = 2311$$

就都是素数.但接下去的 3 个数不是:

$$\begin{aligned} N_6 &= 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 \\ &= 30031 = 59 \times 509, \end{aligned}$$

$$N_7 = 19 \times 97 \times 277,$$

$$N_8 = 347 \times 27953.$$

事实上,无人知晓是否有无穷多个形如

$$N_n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$$

的数是素数,同样也不知是否有无穷多个这样的数是合数(当然,这两种尚不确定的情形中必有一种是真实的).这只是有关素数的许多陈述简明的的问题之一,它们至今都未解决.

涉及素数的最著名的未解决问题之一是哥德巴赫猜想(Goldbach's conjecture).在1742年给L·欧拉(Euler)的信中,C·哥德巴赫提出猜想:每一个大于2的偶数皆为两个素数之和.例如,

$$4 = 2 + 2,$$

$$6 = 3 + 3,$$

$$8 = 3 + 5,$$

$$10 = 5 + 5,$$

$$12 = 5 + 7.$$

[6]

计算机已对100 000 000以下的所有偶数作了验算,证明对于这些数哥德巴赫猜想成立;但是时至今日,还没有适当的办法证明整个猜想的正确性.

素 性 检 验

虽然有关素数的大部分经典问题尚未解决,但检验一个数是否素数的方法,在最近几年有了巨大进步.“检验素性的方法?”你一定会大声地问,“那不是很显然的吗?”确实,看一个数是或不是素数,有一种非常自然而直接的方法.给你一个数,比如说 n ,你首先看2是否能整除它.若能,则 n 不是素数,任务完成;若不能,你再用3试.若3能整除 n ,则 n 不是素数,事情了结;若仍不能,试用5去除 n .(你可以跳过4,因为你已试过2不能整除 n ,所以4也不能整除 n .)若5不能整除 n ,再试7.(这回你可以跳过6,因为2和3都不能整