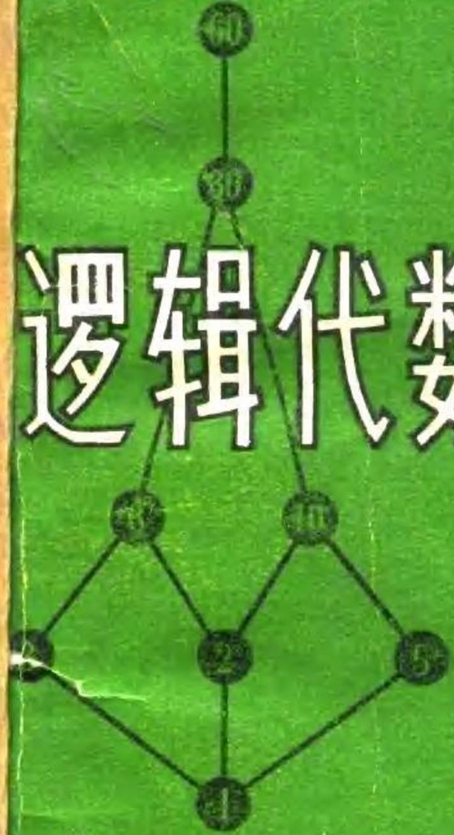
LUOJI DAISHU
CHUBU



逻辑代数初步

张德荣 编

陕西科学技术出版社

逻辑代数初步

张德荣 编
魏庚人 校

陕西科学技术出版社

出 版 说 明

为了提高教学质量，根据教育部教学大纲的要求和现行教材，我们组织编写了一套中学数、理、化参考读物，陆续出版。

逻辑代数初步
张 德 荣 编
魏 庚 人 校
陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）
陕西省新华书店发行 乾县印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 6 字数 126,000
1980年9月第1版 1980年9月第1次印刷
印数 1—4,000
统一书号：13202·18 定价：0.50元

前　言

用代数方法研究逻辑命题及其关系的学科称为逻辑代数。逻辑代数也叫布尔代数。它是十九世纪中叶形成的一支代数理论，至本世纪三十年代渐趋完备。由于逻辑代数中求“交”“并”两种运算和开关网络中的“串联”及“并联”之间有着密切的关系，因此，利用逻辑代数设计执行指定功能的逻辑电路非常方便。目前，逻辑代数已用于自动化技术、电子数字计算机设计及其他学科。

为了适应四个现代化的要求，教育部颁布的中学数学大纲中，增设了逻辑代数基础知识等内容。对于不少中学数学教师来说，逻辑代数还是一个比较陌生的数学分支，都还需要有一个重新学习的过程。本书就是应这种需要而编写的。从中学数学教学的实际出发，书中内容的编排由浅入深，概念的叙述和定理的证明尽可能通俗详细，并注意介绍了逻辑代数基本理论在中学数学等方面的应用。习题一般都附有解答或提示。有个别章节内容编深一些，标有*号，初读时可以跳过去。

由于编者水平所限，实践经验不足，缺点、错误在所难免，欢迎同志们批评指正。

编　者

1980年3月

目　录

第一章 基本概念

本章第一节介绍代数学的一些基本概念，这些概念是后面各章节的基础。第二节介绍集合代数的基本概念。第三节叙述一般布尔代数的定义及其基本性质。第四节讨论开关网络及复合命题，归纳其共同规律，导出一般布尔代数的重要特例。

第一节 代数结构

1．代数符号

代数可以看作符号操作。根据代数发展的历史可以把它分为两大部分：主要在十九世纪以前完成的称为**古典代数**，此后完成的大部分内容称为**近世代数**或**抽象代数**。

符号仅仅表示数（整数，有理数，实数，复数）是古典代数的特征。直到今天，古典代数仍然是解决许多现代科学问题的强有力的工具，是学习近世代数的基础。

从十九世纪起，由于实践的需要，人们逐渐认识到，数学符号可以不代表数，甚至可以不代表任何确定的事物。近世代数（也称为抽象代数）就是一种比较抽象的数学分支，其中的符号，一般表示抽象的事物。

2．集合

把具有某种属性的一些对象看做一个整体，便形成一个

集合．集合里的各个对象叫做集合的元素．一些重要的数学集合有：所有整数（正整数，负整数及零）的集合Z，所有有理数集合Q，所有实数集合R，所有正实数集合R^+，所有复数集合C．这些熟知的集合的每一个都有无限个元素，它们都是**无限集**．

由有限个元素a_1，a_2，…，a_n组成的集合称为**有限集**．一般用花括号“{ }”包括有限集的元素来表示此有限集，例如$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$表示由元素$a_1$，$a_2$，…，$a_n$组成的集合．又如大于或等于20而小于或等于40的质数的集合是{23，29，31，37}，所有能整除8的正整数的集合是{1，2，4，8}．将一集合的元素重新排列不改变此集合，所以集合{1，2，4，8}和集合{8，4，2，1}是同一个集合．用等号“=”表示两个集合的元素完全相同，如

$$\{1, 2, 4, 8\}=\{8, 4, 2, 1\}.$$

有些无限集（可数集）可用一无限序列来说明此集合包含哪些元素，如所有正整数的集合Z^+可用记号

$$Z^+=\{1, 2, 3, \cdots\}$$

来表示．类似地，所有整数的集合可用

$$Z=\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

来表示．用这种方法表示时，要列出足够多的项以明显表示出此集合包含哪些元素．

所有实数的集合和所有复数的集合都不是可数集，不能用上述方法来描述它们．

为了定义一个集合S，必须说明：任给一元素a，a是集合S的元素或者不是集合S的元素．当a是集合S的元素时，就

说a**属于**S，记作$a \in S$；当a不是集合S的元素时，就说a**不属于**S，记作$a \overline{\in} S$。

注意，集合的元素可能是数，也可能不是数。阅读本书时，不能把符号全当作数来看待，必须突破古典代数观点的局限。

3．子集

设已给集合S和T，如果集合T的每一个元素也是集合S的元素，就说集合T是集合S的**子集**。集合S和T之间的这种关系用符号

$T \subseteq S$（或 $S \supseteq T$）

来表示；读作"T被S所包含"或者"S包含T"。

显然，$T \subseteq S$ 的充要条件是："若$a \in T$，则$a \in S$"对任何元素a都成立。

若$T \subseteq S$ 并且至少有一个元素a，使得$a \in S$但$a \overline{\in} T$，就说T是S的**真子集**，记作$T \subset S$。

上述包含关系$\subseteq$（注意，不是$\subset$）有一些明显的性质：

1°．对任何集合S，都有 $S \subseteq S$；　　（自反律）

2°．若$S \subseteq T$并且$T \subseteq S$，则$S = T$；　　（反对称律）

3°．若$S \subseteq T$并且$T \subseteq U$，则$S \subseteq U$。　　（传递律）

如果用s，t，u表示实数，用符号"$\leqslant$"表示小于或等于，那末此关系也具有下列性质：

1°．对任何实数s，都有$s \leqslant s$；

2°．若$s \leqslant t$，并且$t \leqslant s$，则$s = t$；

3°．若$s \leqslant t$，并且$t \leqslant u$，则$s \leqslant u$。

由此可见，集合之间的"$\subseteq$"关系和实数之间的"$\leqslant$"关系

有一些类似的性质。

一个集合由它的元素完全确定，当集合S和T恰好有完全相同的元素时，就说这两个集合相等。根据反对称性，为了证明两集合相等可以证明下列两命题：

1°．若$a\in S$，则$a\in T$；

2°．若$a\in T$，则$a\in S$。

下面介绍集合的子集的一种表示法。

设U表示一已知集合，x是集合U的元素，$x\in U$，$P(x)$表示关于x的某一命题，那末集合U的具有性质$P(x)$的子集记作

$$S=\{x\in U\mid P(x)\},$$

读作"集合S由集合U的满足条件$P(x)$的元素x所组成"。如果由上下文可以明确看出所说的是集合U的子集时，则也可以简记作

$$S=\{x\mid P(x)\}.$$

例如，Z表示所有整数的集合，公式

$E=\{x\in Z\mid 存在y\in Z使x=2y\}$表示所有偶整数的集合（把零也当作偶整数）。

又如，

$$Z^+=\{x\in Z\mid x>0\}$$

表示Z^+是所有正整数的集合。

当然，上述二集合也可以分别记作

$$E=\{0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \cdots\};$$

$$Z^+=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}.$$

为了方便起见，引进空集这个概念：不含任何元素的集合叫做空集，用符号$\varnothing$表示。

用R和C分别表示实数集和复数集，那末

$$\{x\in R \mid x^2=-1\}=\varnothing,$$

$$\{x\in C \mid x^2=-1\}=\{i,\ -i\},$$

其中i是满足条件 $i^2=1$ 的复数。

规定空集是任何集合的子集。也就是说对于任何集合A，

$$\varnothing\subseteq A.$$

如果A是集合X的子集，根据子集的定义可知

$$A\subseteq X.$$

由以上二式可见：在集合X的一切子集中，空集“最小”，集合X本身“最大”。

4．直积集合

假设S和T是两个集合，并且

$$s\in S, \qquad t\in T,$$

则一切满足上列条件的元素s和t的有序对（s，t）组成的集合称为集合S和T的**直积集合**，记作S×T。

特别地，当集合T等于集合S时，如果

$$s_1\in S, \qquad s_2\in S,$$

则由元素 s_1，s_2 组成的所有有序对（s_1，s_2）也称为**直积集合**，记作S×S，或 S^2。

例 1 设Z是所有整数的集合。把平面上横坐标m和纵坐标n都是整数的点称为**格点**。那末直积集合Z×Z就是平面上一切格点的集合.

注意，因为Z×Z的元素是有序对，所以当 $m\neq n$ 时，（m，n）和（n，m）是直积集合Z×Z中不同的元素．换

句话说，直积集合中的元素(m_1, n_1)和(m_2, n_2)当且仅当"$m_1=m_2$并且$n_1=n_2$"时，才是同一个元素.

现将上述直积集合的概念推广。设S是已知集合，并且

$s_1 \in S$, $s_2 \in S$, …, $s_n \in S$.

那末一切形如$(s_1, s_2, \cdots, s_n)$的有序组组成的集合称为**直积集合**S^n.

5. 映射

设S和T是两个已知集合，如果有一种规则f，使得对于集合S的每个元素s，按此规则都能得出并且仅能得出集合T的一个元素t，就把这种规则叫做**由集合S到集合T的映射**，记作

$f: S \to T$.

由集合S的元素s按映射规则f得出集合T的元素t，称为映射f在s的**象**（或**值**）。"映射f在s的象"记作$f(s)$，而"映射f在s的象是t"则记作

$f(s)=t$，或 $s \xrightarrow{f} t$.

这时，s称为t的**原象**。

对于所有$s \in S$，映射

$f: S \to T$

的象$f(s)$的集合是集合T的子集，将此子集记作$f(S)$，并称为映射f的**象**。

在映射

$f: S \to T$

中，有两个集合S和T，第一个集合S称为映射f的**定义域**，第二个集合T称为映射f的**陪域**，而映射f的象的集合$f(S)$又

称为映射f的**值域**，映射的值域一定是此映射的陪域的子集。

例 2 设$S=\{a, b, c\}$，而$T=\{a, b, c, d\}$，因为集合S是有限集，所以由集合S到集合S的映射规则可由逐一列举集合S中元素的象而定义。设映射

$$f: \{a, b, c\}\to\{a, b, c, d\}$$

的映射规则是

$$f(a)=a, \quad f(b)=a, \quad f(c)=b.$$

则此映射的象$f(S)$是集合$\{a, b\}$，即映射f的值域是集合$\{a, b\}$。

上述映射用符号

$$a\xrightarrow{f}a, \quad b\xrightarrow{f}a, \quad c\xrightarrow{f}b$$

表示，有时也用符号

$$f: a\mapsto a, \quad b\mapsto a, \quad c\mapsto b$$

表示。

例 3 设映射f的定义域和陪域都是自然数的集合Z^+，映射规则为

$$f(n)=n+1, \text{ 或 } n\xrightarrow{f}n+1.$$

上述映射规则定义了由Z^+到Z^+的映射

$$f: Z^+\to Z^+.$$

显然，这时映射f的值域是

$$f(Z^+)=\{2, 3, 4, \cdots\},$$

而陪域Z^+中的元素1没有原象。

为了定义一个映射，必须列举出此映射的定义域、陪域，并说明对于定义域中每一元素的象是陪域中哪一个唯一

确定的元素。

两个映射

$f: S \to T$,

$g: S_1 \to T_1$

当且仅当它们的定义域和陪域分别相等，即

$$S = S_1, \qquad T = T_1,$$

并且它们在任何$x \in S$的象也相等，即

对于任何$x \in S$, $\quad f(x) = g(x)$

时，才认为这两个映射相等。两个相等的映射f, g，记作$f = g$。

例 4 设Z^+是所有自然数的集合，$Z_2 = \{2, 3, 4, \cdots\}$。映射

$g: Z^+ \to Z_2$

由规则

$$g(n) = n + 1 \quad 或 \quad n \xrightarrow{g} n + 1$$

确定。

映射g和例 3 中的映射f的定义域相同，映射规则相同，甚至这两个映射的值域也相同，都是集合Z_2。但是这两个映射的陪域不同，根据以上关于映射相等的约定，不能说这两个映射相等。

设S为任意集合，若映射

$$1_S: S \to S$$

的映射规则为：

对于任何$s \in S$, $1_S(s) = s \ (s \xrightarrow{1_S} s)$,

则称映射1_S为恒等映射。根据以上约定，不同集合的恒等映射互不相等，即

当$S\neq T$时，$1_S\neq 1_T$。

6．内射，全射，双射

在例2中，集合$\{a, b, c\}$中两个不同的元素a，b的象都是a；在例3和例4中，任何两个不同元素的象也不同。为了说明这两种不同的映射，引入下列定义：

若映射

$$f: S\to T$$

使得定义域S中的两个不同元素的象也不同，就把此映射称为**内射**。换句话说，若$s_1\in S$，$s_2\in S$，且$s_1\neq s_2$时，$f(s_1)\neq f(s_2)$，映射f称为**内射**。

由此可知，例2中的映射不是内射，例3和例4中的映射都是内射。

在例3中，映射f的象$f(Z^+)$是陪域的真子集，陪域Z^+中的元素1没有原象。而在例4中，陪域Z_2中的任何元素都有原象。为了区别这两种映射，引入下列定义：

如果映射

$$f: S\to T$$

的值域$f(S)$是整个陪域T，$f(S)=T$，就说映射f是由S到T的**全射**。换句话说，如果陪域T中任何一个元素t都是定义域S中某一个元素s的象，$f(s)=t$，就说映射f是全射。

例3中的映射不是全射，例4中的映射是全射。例4中的映射既是内射，又是全射。

如果映射

$$f:S\to T$$

既是内射又是全射，则称此映射为**双射**。