

LUOJI DAISHU
CHUBU

60

30

逻辑代数初步

张德荣 编

40

10

20

5

1

陕西科学技术出版社

逻辑代数初步

张 德 荣 编
魏 庚 人 校

陕西科学技术出版社

出版说明

为了提高教学质量，根据教育部教学大纲的要求和现行教材，我们组织编写了一套中学数、理、化参考读物，陆续出版。

逻辑代数初步

张德荣 编

魏庚人 校

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街131号)

陕西省新华书店发行 乾县印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6 字数 126,000

1980年9月第1版 1980年9月第1次印刷

印数 1—4,000

统一书号: 13202·18 定价: 0.50 元

前 言

用代数方法研究逻辑命题及其关系的学科称为逻辑代数。逻辑代数也叫布尔代数。它是十九世纪中叶形成的一支代数理论，至本世纪三十年代渐趋完备。由于逻辑代数中求“交”“并”两种运算和开关网络中的“串联”及“并联”之间有着密切的关系，因此，利用逻辑代数设计执行指定功能的逻辑电路非常方便。目前，逻辑代数已用于自动化技术、电子数字计算机设计及其他学科。

为了适应四个现代化的要求，教育部颁布的中学教学大纲中，增设了逻辑代数基础知识等内容。对于不少中学数学教师来说，逻辑代数还是一个比较陌生的数学分支，都还需要有一个重新学习的过程。本书就是应这种需要而编写的。从中学数学教学的实际出发，书中内容的编排由浅入深，概念的叙述和定理的证明尽可能通俗详细，并注意介绍了逻辑代数基本理论在中学数学等方面的应用。习题一般都附有解答或提示。有个别章节内容编深一些，标有*号，初读时可以跳过去。

由于编者水平所限，实践经验不足，缺点、错误在所难免，欢迎同志们批评指正。

编 者

1980年3月

目 录

第一章 基本概念	(1)
第一节 代数结构	(1)
1. 代数符号.....	(1)
2. 集合.....	(1)
3. 子集.....	(3)
4. 直积集合.....	(5)
5. 映射.....	(6)
6. 内射, 全射, 双射.....	(9)
7. 二元运算.....	(10)
8. 一元运算.....	(12)
9. 代数结构.....	(13)
*10. 二阶矩阵.....	(17)
*11. 复数.....	(20)
第二节 集合代数	(23)
1. 幂集.....	(23)
2. 幂集上的运算.....	(23)
3. 基本公式.....	(25)
4. 运算的优先规则.....	(30)
5. 幂集的二进数表示.....	(32)
6. 差, 对称差.....	(33)
7. 有限集中元素的个数.....	(36)
第三节 布尔代数	(37)
1. 布尔代数的定义.....	(37)
2. 单位元唯一.....	(38)

3. 对合律	(38)
4. 泛界律和等幂律	(40)
5. 吸收律	(41)
6. 对偶原则	(42)
7. 证明两元素相等的方法	(43)
8. 结合律	(44)
9. 德·摩根律 (反演律)	(46)
10. 一些常用公式	(47)
11. 布尔代数 $(\{0, 1\}^n, \cdot, +, ^-)$	(48)
12. 正整数因数的集合	(49)
第四节 真值函数	(52)
1. 开关网络	(52)
2. 等效网络	(55)
3. 复合命题	(56)
4. 等价命题	(58)
5. 真值函数的定义	(59)
6. 真值函数的运算	(63)
7. 逻辑代数 $(F_n, \cdot, +, ^-)$	(65)
8. 常用符号	(65)
9. 门电路	(66)
10. 真值函数的类型	(67)

习题一

第二章 析取范式	(73)
-----------------	------

第一节 蕴含	(73)
---------------	------

1. 包含关系	(73)
2. 条件命题	(74)
3. 双条件命题	(76)
4. 布尔代数中的等价命题	(77)

5. 布尔代数中的“小于或等于”关系	(79)
6. 半序集	(84)
7. 小结	(85)
第二节 析取范式	(86)
1. F_2 中的原子	(86)
2. F_n 中的原子	(88)
3. 析取范式	(89)
4. 合取范式	(94)
5. 用文氏图化简真值函数	(95)
•第三节 析取范式(续)	(96)
1. 原子的定义	(96)
2. 原子的基本性质	(97)
3. 析取范式定理	(100)
4. 同构	(102)
5. 表示定理	(105)
•第四节 应用举例	(108)
1. 逻辑电路	(108)
2. 全加器	(110)
3. “或—非”门组成的全加器	(112)
4. 逻辑电路测试	(115)
第五节 数学证明	(117)
1. 等式代换原则	(117)
2. 树形图	(118)
3. 推理格式	(121)
4. 全称命题和特称命题	(122)
5. 直接数学证明	(129)
6. 间接数学证明	(131)

习题二

第三章 最简与或式	(137)
第一节 化简的实践意义及其标准	(137)
1. 化简的实践意义.....	(137)
2. 与或式的多余加项和多余因子.....	(133)
3. 最简与或式.....	(141)
第二节 最简与或式的必要条件	(141)
1. 质项的定义.....	(141)
2. 最简与或式的必要条件.....	(142)
第三节 分组化简法	(145)
1. 质项与原子的关系.....	(145)
2. 由原子求所有质项的方法.....	(147)
3. 分组化简法.....	(148)
4. 由全体质项求最简与或式.....	(152)
习题三	
附录 数的进位制	(158)
第一节 记数法	(158)
1. 十进数.....	(158)
2. 二进数和八进数.....	(158)
3. r 进数.....	(160)
4. r 进数的运算.....	(161)
第二节 数制的转换	(163)
1. r 进数转换为十进数.....	(163)
2. 十进整数转换为八进整数.....	(163)
3. 十进小数转换为 r 进小数.....	(165)
部分习题答案或提示	(167)
符号表	(181)
名词索引	(182)
参考书	(184)

第一章 基本概念

本章第一节介绍代数学的一些基本概念，这些概念是后面各章节的基础。第二节介绍集合代数的基本概念。第三节叙述一般布尔代数的定义及其基本性质，第四节讨论开关网络及复合命题，归纳其共同规律，导出一般布尔代数的重要特例。

第一节 代数结构

1. 代数符号

代数可以看作符号操作。根据代数发展的历史可以把它分为两大部分：主要在十九世纪以前完成的称为古典代数，此后完成的大部分内容称为近世代数或抽象代数。

符号仅仅表示数（整数，有理数，实数，复数）是古典代数的特征。直到今天，古典代数仍然是解决许多现代科学问题的强有力的工具，是学习近世代数的基础。

从十九世纪起，由于实践的需要，人们逐渐认识到，数学符号可以不代表数，甚至可以不代表任何确定的事物。近世代数（也称为抽象代数）就是一种比较抽象的数学分支，其中的符号，一般表示抽象的事物。

2. 集合

把具有某种属性的一些对象看做一个整体，便形成一个

集合。集合里的各个对象叫做集合的元素。一些重要的数学集合有：所有整数（正整数，负整数及零）的集合 Z ，所有有理数集合 Q ，所有实数集合 R ，所有正实数集合 R^+ ，所有复数集合 C 。这些熟知的集合的每一个都有无限个元素，它们都是**无限集**。

由有限个元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合称为**有限集**。一般用花括号“ $\{ \}$ ”包括有限集的元素来表示此有限集，例如 $\{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ 表示由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合。又如大于或等于20而小于或等于40的质数的集合是 $\{ 23, 29, 31, 37 \}$ ，所有能整除8的正整数的集合是 $\{ 1, 2, 4, 8 \}$ 。将一集合的元素重新排列不改变此集合，所以集合 $\{ 1, 2, 4, 8 \}$ 和集合 $\{ 8, 4, 2, 1 \}$ 是同一个集合。用等号“ $=$ ”表示两个集合的元素完全相同，如

$$\{ 1, 2, 4, 8 \} = \{ 8, 4, 2, 1 \}.$$

有些无限集（可数集）可用一无限序列来说明此集合包含哪些元素，如所有正整数的集合 Z^+ 可用记号

$$Z^+ = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

来表示。类似地，所有整数的集合可用

$$Z = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}$$

来表示。用这种方法表示时，要列出足够多的项以明显表示出此集合包含哪些元素。

所有实数的集合和所有复数的集合都不是可数集，不能用上述方法来描述它们。

为了定义一个集合 S ，必须说明：任给一元素 a ， a 是集合 S 的元素或者不是集合 S 的元素。当 a 是集合 S 的元素时，就

说 a 属于 S ，记作 $a \in S$ ；当 a 不是集合 S 的元素时，就说 a 不属于 S ，记作 $a \notin S$ 。

注意，集合的元素可能是数，也可能不是数。阅读本书时，不能把符号全当作数来看待，必须突破古典代数观点的局限。

3. 子集

设已给集合 S 和 T ，如果集合 T 的每一个元素也是集合 S 的元素，就说集合 T 是集合 S 的子集。集合 S 和 T 之间的这种关系用符号

$$T \subseteq S \text{ (或 } S \supseteq T)$$

来表示；读作“ T 被 S 所包含”或者“ S 包含 T ”。

显然， $T \subseteq S$ 的充要条件是：“若 $a \in T$ ，则 $a \in S$ ”对任何元素 a 都成立。

若 $T \subseteq S$ 并且至少有一个元素 a ，使得 $a \in S$ 但 $a \notin T$ ，就说 T 是 S 的真子集，记作 $T \subset S$ 。

上述包含关系 $\subseteq$ （注意，不是 $\subset$ ）有一些明显的性质：

- 1°. 对任何集合 S ，都有 $S \subseteq S$ ； （自反律）
- 2°. 若 $S \subseteq T$ 并且 $T \subseteq S$ ，则 $S = T$ ； （反对称律）
- 3°. 若 $S \subseteq T$ 并且 $T \subseteq U$ ，则 $S \subseteq U$ 。 （传递律）

如果用 s, t, u 表示实数，用符号“ $\leq$ ”表示小于或等于，那末此关系也具有下列性质：

- 1°. 对任何实数 s ，都有 $s \leq s$ ；
- 2°. 若 $s \leq t$ ，并且 $t \leq s$ ，则 $s = t$ ；
- 3°. 若 $s \leq t$ ，并且 $t \leq u$ ，则 $s \leq u$ 。

由此可见，集合之间的“ $\subseteq$ ”关系和实数之间的“ $\leq$ ”关系

有一些类似的性质。

一个集合由它的元素完全确定，当集合S和T恰好有完全相同的元素时，就说这两个集合相等。根据反对称性，为了证明两集合相等可以证明下列两命题：

1°. 若 $a \in S$ ，则 $a \in T$ ；

2°. 若 $a \in T$ ，则 $a \in S$ 。

下面介绍集合的子集的一种表示法。

设U表示一已知集合，x是集合U的元素， $x \in U$ ， $P(x)$ 表示关于x的某一命题，那末集合U的具有性质 $P(x)$ 的子集记作

$$S = \{ x \in U \mid P(x) \},$$

读作“集合S由集合U的满足条件 $P(x)$ 的元素x所组成”。如果由上下文可以明确看出所说的是集合U的子集时，则也可以简记作

$$S = \{ x \mid P(x) \}.$$

例如，Z表示所有整数的集合，公式

$E = \{ x \in Z \mid \text{存在 } y \in Z \text{ 使 } x = 2y \}$ 表示所有偶整数的集合（把零也当作偶整数）。

又如，

$$Z^+ = \{ x \in Z \mid x > 0 \}$$

表示 Z^+ 是所有正整数的集合。

当然，上述二集合也可以分别记作

$$E = \{ 0, \pm 2, \pm 4, \dots \};$$

$$Z^+ = \{ 1, 2, 3, \dots \}.$$

为了方便起见，引进空集这个概念：不含任何元素的集合叫做空集，用符号 $\emptyset$ 表示。

用 R 和 C 分别表示实数集和复数集，那末

$$\{x \in R \mid x^2 = -1\} = \emptyset,$$

$$\{x \in C \mid x^2 = -1\} = \{i, -i\},$$

其中 i 是满足条件 $i^2 = -1$ 的复数。

规定空集是任何集合的子集。也就是说对于任何集合 A ,

$$\emptyset \subseteq A.$$

如果 A 是集合 X 的子集，根据子集的定义可知

$$A \subseteq X.$$

由以上二式可见：在集合 X 的一切子集中，空集“最小”，集合 X 本身“最大”。

4. 直积集合

假设 S 和 T 是两个集合，并且

$$s \in S, \quad t \in T,$$

则一切满足上列条件的元素 s 和 t 的有序对 (s, t) 组成的集合称为集合 S 和 T 的**直积集合**，记作 $S \times T$ 。

特别地，当集合 T 等于集合 S 时，如果

$$s_1 \in S, \quad s_2 \in S,$$

则由元素 s_1, s_2 组成的所有有序对 (s_1, s_2) 也称为**直积集合**，记作 $S \times S$ ，或 S^2 。

例 1 设 Z 是所有整数的集合。把平面上横坐标 m 和纵坐标 n 都是整数的点称为**格点**。那末直积集合 $Z \times Z$ 就是平面上一切格点的集合。

注意，因为 $Z \times Z$ 的元素是有序对，所以当 $m \neq n$ 时， (m, n) 和 (n, m) 是直积集合 $Z \times Z$ 中不同的元素。换

句话说，直积集合中的元素 (m_1, n_1) 和 (m_2, n_2) 当且仅当 “ $m_1 = m_2$ 并且 $n_1 = n_2$ ” 时，才是同一个元素。

现将上述直积集合的概念推广。设 S 是已知集合，并且

$$s_1 \in S, s_2 \in S, \dots, s_n \in S.$$

那末一切形如 $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ 的有序组组成的集合称为直积集合 S^n 。

5. 映射

设 S 和 T 是两个已知集合，如果有一种规则 f ，使得对于集合 S 的每个元素 s ，按此规则都能得出并且仅能得出集合 T 的一个元素 t ，就把这种规则叫做由集合 S 到集合 T 的映射，记作

$$f: S \rightarrow T.$$

由集合 S 的元素 s 按映射规则 f 得出集合 T 的元素 t ，称为映射 f 在 s 的象（或值）。“映射 f 在 s 的象”记作 $f(s)$ ，而“映射 f 在 s 的象是 t ”则记作

$$f(s) = t, \text{ 或 } s \xrightarrow{f} t.$$

这时， s 称为 t 的原象。

对于所有 $s \in S$ ，映射

$$f: S \rightarrow T$$

的象 $f(s)$ 的集合是集合 T 的子集，将此子集记作 $f(S)$ ，并称为映射 f 的象。

在映射

$$f: S \rightarrow T$$

中，有两个集合 S 和 T ，第一个集合 S 称为映射 f 的定义域，第二个集合 T 称为映射 f 的陪域，而映射 f 的象的集合 $f(S)$ 又

称为映射 f 的**值域**，映射的值域一定是此映射的陪域的子集。

例 2 设 $S = \{a, b, c\}$ ，而 $T = \{a, b, c, d\}$ ，因为集合 S 是有限集，所以由集合 S 到集合 T 的映射规则可由逐一列举集合 S 中元素的象而定义。设映射

$$f: \{a, b, c\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$$

的映射规则是

$$f(a) = a, f(b) = a, f(c) = b.$$

则此映射的象 $f(S)$ 是集合 $\{a, b\}$ ，即映射 f 的值域是集合 $\{a, b\}$ 。

上述映射用符号

$$a \xrightarrow{f} a, \quad b \xrightarrow{f} a, \quad c \xrightarrow{f} b$$

表示，有时也用符号

$$f: a \mapsto a, \quad b \mapsto a, \quad c \mapsto b$$

表示。

例 3 设映射 f 的定义域和陪域都是自然数的集合 Z^+ ，映射规则为

$$f(n) = n + 1, \text{ 或 } n \xrightarrow{f} n + 1.$$

上述映射规则定义了由 Z^+ 到 Z^+ 的映射

$$f: Z^+ \rightarrow Z^+.$$

显然，这时映射 f 的值域是

$$f(Z^+) = \{2, 3, 4, \dots\},$$

而陪域 Z^+ 中的元素 1 没有原象。

为了定义一个映射，必须列举出此映射的定义域、陪域，并说明对于定义域中每一元素的象是陪域中哪一个唯一

确定的元素。

两个映射

$$f: S \rightarrow T,$$

$$g: S_1 \rightarrow T_1$$

当且仅当它们的定义域和陪域分别相等, 即

$$S = S_1, \quad T = T_1,$$

并且它们在任何 $x \in S$ 的象也相等, 即

$$\text{对于任何 } x \in S, \quad f(x) = g(x)$$

时, 才认为这两个映射相等. 两个相等的映射 f, g , 记作 $f = g$.

例 4 设 Z^+ 是所有自然数的集合, $Z_2 = \{2, 3, 4, \dots\}$.
映射

$$g: Z^+ \rightarrow Z_2$$

由规则

$$g(n) = n + 1 \quad \text{或} \quad n \xrightarrow{g} n + 1$$

确定。

映射 g 和例 3 中的映射 f 的定义域相同, 映射规则相同, 甚至这两个映射的值域也相同, 都是集合 Z_2 . 但是这两个映射的陪域不同, 根据以上关于映射相等的约定, 不能说这两个映射相等。

设 S 为任意集合, 若映射

$$1_s: S \rightarrow S$$

的映射规则为:

$$\text{对于任何 } s \in S, \quad 1_s(s) = s \xrightarrow{1_s} s,$$

则称映射 1_s 为恒等映射. 根据以上约定, 不同集合的恒等映射互不相等, 即

当 $S \neq T$ 时, $1_s \neq 1_T$.

6. 内射, 全射, 双射

在例 2 中, 集合 $\{a, b, c\}$ 中两个不同的元素 a, b 的象都是 a ; 在例 3 和例 4 中, 任何两个不同元素的象也不同. 为了说明这两种不同的映射, 引入下列定义:

若映射

$$f: S \rightarrow T$$

使得定义域 S 中的两个不同元素的象也不同, 就把此映射称为内射. 换句话说, 若 $s_1 \in S, s_2 \in S$, 且 $s_1 \neq s_2$ 时, $f(s_1) \neq f(s_2)$, 映射 f 称为内射.

由此可知, 例 2 中的映射不是内射, 例 3 和例 4 中的映射都是内射.

在例 3 中, 映射 f 的象 $f(Z^+)$ 是陪域的真子集, 陪域 Z^+ 中的元素 1 没有原象. 而在例 4 中, 陪域 Z_2 中的任何元素都有原象. 为了区别这两种映射, 引入下列定义:

如果映射

$$f: S \rightarrow T$$

的值域 $f(S)$ 是整个陪域 T , $f(S) = T$, 就说映射 f 是由 S 到 T 的全射. 换句话说, 如果陪域 T 中任何一个元素 t 都是定义域 S 中某一个元素 s 的象, $f(s) = t$, 就说映射 f 是全射.

例 3 中的映射不是全射, 例 4 中的映射是全射. 例 4 中的映射既是内射, 又是全射.

如果映射

$$f: S \rightarrow T$$

既是内射又是全射, 则称此映射为双射.