北京市 福建省 福州市

历届中学生数学竞赛题解

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$$

福建人民出版社

北京市 福建省 福州市

历届中学生数学竞赛题解

福 州 市 数 学 学 会

福州市中学数学校际教研组

福 建 人 民 出 版 社

北京市 福建省 福州市

历届中学生数学竞赛题解

福 州 市 数 学 学 会
福州市中学数学校际教研组

*

福建人民出版社出版
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本 6 13/16印张 139千
1979年3月第1版 1979年3月第1次印刷
印数：1—800,000
统一书号：7173·366 定价：0.44元

出 版 说 明

本书汇编了北京市、福建省和福州市历届中学生数学竞赛试题，并作出解答，其中部分试题还作了多种解答。书末附有上海市1958年中学生数学竞赛题解和天津、南京、武汉等市1957年中学生数学竞赛题解；还附录了上海、成都两市历届中学生数学竞赛试题，供练习。本书可供中学生、中学数学教师、知识青年和数学爱好者学习、参考。学习时应注意数学基础知识间的相互联系和综合运用。

本书由福州市数学学会、福州市中学数学校际教研组郭友朋、吴可人、王松伦、倪木森、尤崇涛、赵景钢、王培伦等同志收集、解答，并经欧阳琦、池伯鼎、林振铨等同志校订。

目　　录

北京市1956年中学生数学竞赛题解

第　一　试

1.证明$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$对任何正整数n都是整数，并且用3除时余2。

〔证1〕 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)-1$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)(n-1)+\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)-1.$$

因为$n-1,n,n+1$是三个连续的整数，所以$n(n+1)(n-1)$被6整除，即$\frac{1}{2}n(n+1)(n-1)$被3整除。同理$\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$被3整除。

因此，$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$对于任何正整数$n$都是整数，并且用3除时余2。

〔证2〕 记$f(n)=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$。

(1) 当$n=1$时，$f(1)=2$是整数，并且用3除时余2。

(2) 设$n=k$时，$f(k)$是整数，且用3除时余2。

$\because$ $f(k+1)-f(k)=(3k^2+3k+1)+\frac{3}{2}(2k+1)+\frac{1}{2}$

$$=3k^2+6k+3$$
$$=3(k+1)^2,$$
$$\therefore \quad f(k+1)=f(k)+3(k+1)^2.$$

故$f(k+1)$也是整数，且用3除时余2。

由(1)、(2)知，$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$对于任何正整数$n$都是整数，并且用3除时余2。

2. 设方程$x^2-px+q=0$的两根为r和s，且它们都不等于0。求以$r^2+\frac{1}{s^2}$和$s^2+\frac{1}{r^2}$为根的方程（不必解出原方程）。

〔解1〕$\because$ r，s为方程$x^2-px+q=0$的两根，

$$\therefore \quad r+s=p,\ rs=q.$$

而 $$\left(r^2+\frac{1}{s^2}\right)+\left(s^2+\frac{1}{r^2}\right)=\frac{(r^2s^2+1)(r^2+s^2)}{r^2s^2}$$
$$=\frac{(q^2+1)(p^2-2q)}{q^2},$$

$$\left(r^2+\frac{1}{s^2}\right)\left(s^2+\frac{1}{r^2}\right)=r^2s^2+2+\frac{1}{r^2s^2}$$
$$=\left(rs+\frac{1}{rs}\right)^2=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2.$$

故所求的方程为

$$y^2-\frac{(q^2+1)(p^2-2q)}{q^2}y+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2=0.$$

〔解2〕$\because$ r，s为方程$x^2-px+q=0$的两根，

$$\therefore \quad rs=q.$$

则 $$r^2+\frac{1}{s^2}=\left(1+\frac{1}{r^2s^2}\right)r^2=\left(1+\frac{1}{q^2}\right)r^2,$$

$$s^2+\frac{1}{r^2}=\left(1+\frac{1}{r^2s^2}\right)s^2=\left(1+\frac{1}{q^2}\right)s^2.$$

令 $$y=\left(1+\frac{1}{q^2}\right)x^2,$$

即 $$x=\pm q\sqrt{\frac{y}{q^2+1}},$$

代入原方程，得

$$\frac{q^2y}{q^2+1}\mp pq\sqrt{\frac{y}{q^2+1}}+q=0,$$

因 $q=rs\neq0$，故可用 q 除上式各项，再化简得所求的方程为

$$\frac{q^2}{(q^2+1)^2}y^2+\frac{2q-p^2}{q^2+1}y+1=0.$$

3.试证恒等式

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

〔证 1〕 $$2\sin\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}=\sin\frac{1}{2}x,$$

$$2\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos x=\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x,$$

$$2\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x=\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x,$$

……

$$2\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos nx=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x.$$

上面等式两边相加，得

$$2\sin\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx\right)$$

$$=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

〔证2〕 $(\cos x+i\sin x)+(\cos 2x+i\sin 2x)+\cdots$

$+(\cos nx+i\sin nx)$

$$=(\cos x+i\sin x)+(\cos x+i\sin x)^2+\cdots+(\cos x+i\sin x)^n$$

$$=\frac{(\cos x+i\sin x)[1-(\cos x+i\sin x)^n]}{1-(\cos x+i\sin x)}$$

$$=\frac{(\cos x+i\sin x)(1-\cos nx-i\sin nx)}{1-\cos x-i\sin x}$$

$$=\frac{(\cos x+i\sin x)\left(2\sin^2\frac{n}{2}x-2i\sin\frac{n}{2}x\cdot\cos\frac{n}{2}x\right)}{2\sin^2\frac{1}{2}x-2i\sin\frac{1}{2}x\cdot\cos\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{(\cos x+i\sin x)\left(\cos\frac{n}{2}x+i\sin\frac{n}{2}x\right)\sin\frac{n}{2}x}{\left(\cos\frac{1}{2}x+i\sin\frac{1}{2}x\right)\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{n+1}{2}x+i\sin\frac{n+1}{2}x\right)\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

比较实数部分，得

$$\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$$

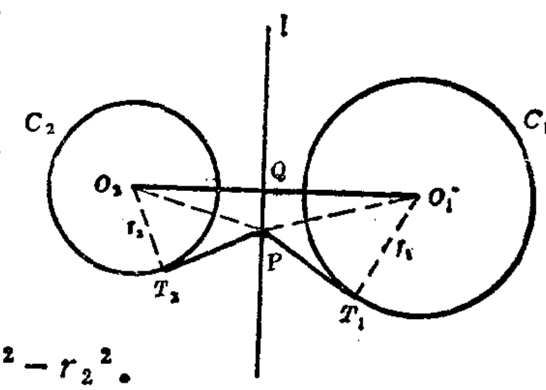
$$=\frac{\cos\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2},$$

故 $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$.

4.设C_1，C_2是给定的两个圆，又C_1，C_2不相交，并且一个在另一个的外部．由一点P作C_1，C_2的切线PT_1，PT_2，设$PT_1=PT_2$，求P点的轨迹．

〔解1〕设C_1，C_2之半径分别为r_1，r_2，圆心分别为O_1,O_2,圆心距为d。作$PQ\perp O_1O_2$，交O_1O_2于Q，则



$$O_1P^2=PT_1{}^2+O_1T_1{}^2$$
$$=PT_1{}^2+r_1{}^2,$$
$$O_2P^2=PT_2{}^2+O_2T_2{}^2$$
$$=PT_2{}^2+r_2{}^2.$$

两式相减，得

$$O_1P^2-O_2P^2=r_1{}^2-r_2{}^2.$$

但 $O_1P^2-O_2P^2=(O_1Q^2+QP^2)-(O_2Q^2+QP^2)$
$=O_1Q^2-O_2Q^2$,

∴ $O_1Q^2-O_2Q^2=r_1{}^2-r_2{}^2$,

即 $(O_1Q+O_2Q)(O_1Q-O_2Q)=r_1{}^2-r_2{}^2$.

因两圆C_1，C_2互不包含，故Q在O_1O_2之间，从而

$$O_1Q+O_2Q=O_1O_2=d,$$

$$\therefore\quad O_1Q-O_2Q=\frac{r_1^{\,2}-r_2^{\,2}}{d}.$$

故 $O_1Q=\dfrac{d^2+r_1^{\,2}-r_2^{\,2}}{2d}$，$O_2Q=\dfrac{d^2-r_1^{\,2}+r_2^{\,2}}{2d}$

这说明Q为定点，与P点的选取无关。所以，对两圆有相等切线的点一定在一条直线l上，这条直线垂直两圆连心线于一定点Q，而Q满足条件（1）。

反之，若在直线l上任取一点R，由R向两圆作切线RS_1，RS_2，则

$$RS_1^{\,2}=RO_1^{\,2}-r_1^{\,2}=RQ^2+O_1Q^2-r_1^{\,2},$$

$$RS_2^{\,2}=RO_2^{\,2}-r_2^{\,2}=RQ^2+O_2Q^2-r_2^{\,2}.$$

由Q点的取法，知

$$O_1Q^2-O_2Q^2=r_1^{\,2}-r_2^{\,2},$$

$$RS_1^{\,2}=RS_2^{\,2}.$$

所以，从直线l上任意一点到两圆的切线长度必然相等。故P点的轨迹就是直线l。

〔解2〕以直线O_1O_2为X轴，线段O_1O_2的垂直平分线为Y轴，建立坐标系，则O_1，O_2的坐标分别为$\left(\frac{d}{2},\ 0\right)$，$\left(-\frac{d}{2},0\right)$。

设P的坐标为$(x,\ y)$，那么

$$PT_1^{\,2}=PO_1^{\,2}-r_1^{\,2}=\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2-r_1^{\,2},$$

$$PT_2^{\,2}=PO_2^{\,2}-r_2^{\,2}=\left(x+\frac{d}{2}\right)^2+y^2-r_2^{\,2}.$$

要使$PT_1=PT_2$，必须且只须

$$\left(x-\frac{d}{2}\right)^2-\left(x+\frac{d}{2}\right)^2=r_1^2-r_2^2,$$

即 $$x=-\frac{r_1^2-r_2^2}{2d}.$$

∴ P 点的轨迹是垂直于O_1O_2的一条直线，其方程为 $x=-\dfrac{r_1^2-r_2^2}{2d}$。

第 二 试

1. 有一群儿童，他们的年龄之和是50岁，其中最大的13岁，有一个10岁；除去10岁的这个儿童之外，其余儿童的年龄恰好组成一个等差级数．问有几个儿童，每个儿童几岁？

〔解〕设其中最小儿童的年龄为 x 岁．除去10岁的儿童外，还有 n 个儿童．因为他们的年龄组成等差数列，故有

$$\frac{n(13+x)}{2}+10=50,$$

即 $$n(13+x)=80,$$

于是，80能被n整除． (1)

但 $$13+x>13,$$

∴ $$n<\frac{80}{13}=6\frac{2}{13}.$$ (2)

又 $$13+x<26,$$

∴ $$n>\frac{80}{26}=3\frac{1}{13}.$$ (3)

同时满足条件（1）、（2）、（3）的整数 n 只能是 4 或 5．

当$n=4$时，$x=7$。即共有五个儿童，他们的年龄分别为13，11，10，9，7岁；

当$n=5$时，$x=3$，这时儿童的年龄不都是整数，不合。

答：共有五个儿童，他们的年龄分别为13，11，10，9，7岁。

2. 证明$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1$，这里的两个三次根都取实值。

〔证1〕　设$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$，则

$$x^3=1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}+3\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)}\cdot x$$
$$+1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$$
$$=2+3\sqrt[3]{1-\frac{28}{27}}\cdot x=2-x,$$

$$\therefore\qquad x^3+x-2=0,$$

即　$$(x-1)(x^2+x+2)=0.$$

因上述方程仅有唯一的实数根$x=1$，故

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=1.$$

〔证2〕　可设$\sqrt[3]{1\pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x\pm y\sqrt{\frac{7}{3}}$，其中$x$，$y$是有理数。

由　$x^3\pm 3x^2y\sqrt{\frac{7}{3}}+7xy^2\pm\frac{7}{3}y^3\sqrt{\frac{7}{3}}=1\pm\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$

得 $x^3+7xy^2=1,\quad 3x^2y+\frac{7}{3}y^3=\frac{2}{3}$.

消去常数项，并分解因式，得

$$(x-y)(2x^2-7xy+7y^2)=0.$$

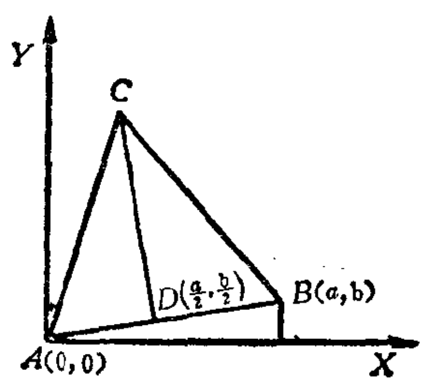
因x，y是实数，且$7^2-4\times2\times7<0$，故仅有$x=y$，代入$x^3+7xy^2=1$，得

$$x=y=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}=1.$$

3.在平面上任取三点，其坐标均为整数（正整数、负整数或零），证明此三点不能组成正三角形。



〔证 1〕 经过平移，总可以使这三角形的一个顶点A为原点$(0,0)$，而其余两个顶点的坐标仍为整数。

设顶点B的坐标为(a,b)，其中a，b为整数。则AB边中点D的坐标为$\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$。

因$AC=AB$，且$CD\perp AB$，故第三个顶点C的坐标(x,y)应满足方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2+b^2 \\ \dfrac{y-\dfrac{b}{2}}{x-\dfrac{a}{2}} \cdot \dfrac{b}{a}=-1. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x=\dfrac{a\mp\sqrt{3}\,b}{2} \\ y=\dfrac{\pm\sqrt{3}\,a+b}{2}. \end{cases}$$

而要使x，y为整数，必须$a=b=0$。

所以，坐标均为整数的三点不能组成正三角形。

〔证2〕 用反证法。设$\triangle ABC$的三个顶点坐标分别为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$（x_i,y_i为整数，$i=1$，2，3）。则由

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

知正三角形的面积是有理数；

但由

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right]$$

知正三角形的面积是无理数。

这就得到矛盾。故坐标为整数的三点不能组成正三角形。

4.证明：在空间中不可能有这样的多面体存在，它们有

奇数个面，而它们的每个面又都有奇数条边。

〔证明〕 若多面体有 n 个面（n 为奇数），每个面的边数分别为 $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n$（$S_i$ 为奇数，$i=1, 2, 3, \cdots, n$），多面体的总边数为 S。

∵ 每条边都是两个面公有的，

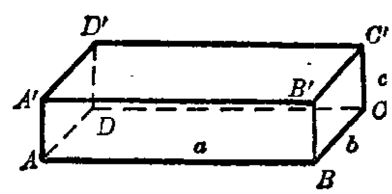
∴ $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n=2S$。

上式左边是奇数个奇数的和，因此为奇数；而右边为偶数，这是矛盾的。

所以，在空间中不可能有奇数个面，而每个面又都有奇数条边的多面体存在。

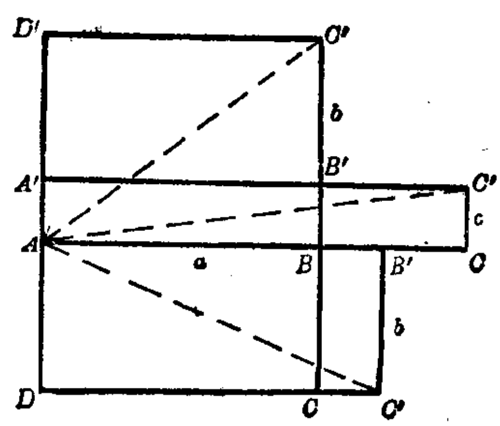
5. 已给一长方体，三棱不等。现在要由一顶点沿表面到对角顶点，求最短的路线。

〔解〕 如图，设长方体的三条棱长为 a，b，c，且 $a>b>c$。假定由顶点 A 沿表面到对角顶点 C'，由图形可知，相对短的路线有以下三条：



(1) 从 A 跨过棱 $A'B'$ 到 C'（从 A 跨过 CD 也一样），其路线长为

$$\sqrt{a^2+(b+c)^2};$$



(2) 从 A 跨过棱 BB' 到 C'（从 A 跨过 DD' 也一样），其路线长为

$$\sqrt{c^2+(a+b)^2};$$

(3) 从A跨过棱BC到C'（从A跨过$A'D'$也一样），其路线长为

$$\sqrt{b^2+(a+c)^2}.$$

$\because$ $$a>b>c,$$

$\therefore$ $$ab>ac>bc,$$

故 $$\sqrt{a^2+(b+c)^2}<\sqrt{b^2+(a+c)^2}<\sqrt{c^2+(a+b)^2}.$$

所以，最短路线为(1)，其长是

$$\sqrt{a^2+(b+c)^2}.$$

6. 解方程组 $\begin{cases} x^2=6+(y-z)^2 \\ y^2=2+(z-x)^2 \\ z^2=3+(x-y)^2. \end{cases}$

〔解〕 原方程组可化为

$$\begin{cases} 6=(x-y+z)(x+y-z) & (1) \\ 2=(y-z+x)(y+z-x) & (2) \\ 3=(z-x+y)(z+x-y). & (3) \end{cases}$$

(1)×(2)×(3)后，两边开方得

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)=6 \qquad (4)$$

或 $$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)=-6. \qquad (5)$$

(4)÷(1)得 $z-x+y=1,$ (6)

(4)÷(2)得 $x-y+z=3,$ (7)

(4)÷(3)得 $y+x-z=2,$ (8)

(6)+(7)+(8)得 $x+y+z=6,$ (9)

(9)−(6)可得 $x=\dfrac{5}{2},$