高等学校教材

实变函数论

（第二版）

江泽坚　吴智泉

高等教育出版社

高等学校教材

实变函数论

（第二版）

江泽坚　吴智泉

高等教育出版社

(京)112 号

本书第二版是作者在第一版的基础上经过多年教学实践，吸收了国内高等院校使用本书的教师提出的很多宝贵意见，并参照理科数学、力学编审委员会函数论、泛函分析编审组 1990 年 11 月制订的《实变函数论》教材编写大纲修订而成.

第二版保持了第一版的体系和特色，内容有较大程度的充实和改进，少量章节作了次序上的调整，习题也适当增加. 对一些稍难的题，给予了阶段性提示.

新增加的部分是："集合环上测度的扩张"、"一般测度空间上 Lebesgue积分理论、符号测度、Jordan-Hahn 分解、Radon-Nikodym 定理"、"由实 L^p 空间扩充为复的 $L^p(p\geq 1)$ 空间"，最后增写了 Fourier 级数与 Fourier变换作为第七章，因它是 Lebesgue 积分最辉煌的应用.

本书文字通顺，叙述清楚，论证严谨，且十分注意培养学生分析问题和解决问题的能力. 标出 * 号的内容供学有余力的学生选学.

本书可作为综合大学、理工大学、师范院校的基础数学、计算数学以及应用数学等专业的教材，也可作为自学用书.

责任编辑　丁鹤龄

高等学校教材

实变函数论

(第二版)

江泽坚　吴智泉

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 10　字数 240 000

1961 年 6 月第 1 版

1994 年 6 月第 2 版　1994 年 6 月第 1 次印刷

印数0001—4 598

ISBN7-04-004692-X/O·1322

定价 4.75 元

第二版说明

本书的第一版是1961年付印的，在过去的30多年时间里，读者和使用过本书的教师，通过各种形式向我们提出了许多宝贵的意见和建议，我们对此非常感谢.

现在的第二版和原来的第一版相比，除叙述上更详尽些和个别内容在编排上有所变动外，主要的差异有以下几点：

一、在第一章中增加集合的域和σ-域的介绍、在第三章中增加了带“*”号的第五节，介绍集合环上的抽象测度的扩张，相应地在第五章中增加了带“*”号的介绍抽象积分的第五节，均可作为选学材料.

处理抽象测度与抽象积分，就其思路和基本技巧而言，大部分与我们处理欧氏空间上的Lebesgue测度与Lebesgue积分大体相同，有些地方甚至可以逐字逐句的移植过来. 上述内容的有些部分，如Radon-Nikodym定理等虽确有新意，但似乎也还不是数学系各专业所共需的必不可少的知识，因此上述部分确实非每个学生都要学习的内容.

二、第六章原先是实的L^2空间. 现在扩充改写成了复的L^p $(p\geqslant 1)$空间.

三、在最后加写了一个介绍Fourier级数与Fourier变换的第七章. 因为这是Lebesgue积分最辉煌的应用，对整个数学都有影响，是每个数学工作者都应该知道的. 但是考虑到教学时数的限制，我们便也在它的前面加了“*”号.

四、适当增加了习题的数量，对一些稍难的习题，给出了阶段性的提示.

在修订本书的过程中，参考引用了书末所列参考书中的大量内容．在此一并申明并向各书的作者致谢．

最后，对于参加本书第二版审稿的杭州大学、复旦大学、北京师范大学等学校的许多同志，提出了许多宝贵的意见，特别是王斯雷教授，他仔细地阅读了全部手稿，并指正了笔者一些重要的疏忽，我们愿意借此机会向他们表示衷心的感谢．

编者

1992年11月

第一版序

随着微积分学的日益发展，人们在具体运算中愈来愈感到Riemann积分(以下简称旧积分)表现出严重的缺陷．正如大家所熟知的，要想逐项积分，或者变换两个无穷积分的次序，往往要加上一些很强的条件，但在许多问题中，这些条件是不具备的，或者虽然具备，但是验证起来麻烦，使得我们不能灵活地进行运算，所以我们确实有必要来对旧积分进行改革．

应该郑重指出，要摆脱限制，力求更灵活的运算，从来就是数学上的大问题．而这也往往正是物理学家对数学不满意之点．例如在近代物理学上越来越显得重要的广义函数论①，其所以被重视的原因之一，就在于它解决了一批极限交换次序的问题．再如我们设想没有Fubini定理②，那么，有着广泛应用的积分变换理论简直就很难发展了．

是否可以这样说，近代分析学，由于实际问题的需要，常常要针对某些特殊的要求，来扩大旧的概念以包括新的对象，例如实数理论，广义函数论等；来引进新的极限手续，例如弱极限③，以及泛函分析学上针对着各种微分方程问题而引进的许多抽象空间④；使得我们能更好地描述物质世界，更灵活地进行运算．倘若如此，那末，本课程的主要内容——测度论和积分论就正是这方面的典型．

我们认为Lebesgue测度和积分(以下简称L-测度和L-积分)理论的产生，最初是为着使关系积分的运算充分灵便．许多时候是这样，问题的开始和结尾都是关系连续，甚至可微函数的．但是L-积分出现在运算过程中，就使运算简单化，免于纠缠在许多

繁琐的，非本质的问题上，比较快的达到结论．这正是L-积分的优点．所以我们不该把注意力过分集中在L-积分本身．

新的积分理论扩充了以前人们所研究的函数的范围和极限的意义．及至近代，我们可以清楚地看到这种推广是颇有些意思的．以下且举两个例子来说明这点．例如从某些物理问题所提出的偏微分方程边值问题，根本就没有可微的解．我们能否因此就认为那个物理问题没有意义呢？这显然是不对的．要知道方程中的系数并非绝对精确，它们也只是一种近似而已．所以我们应该用近似的观点来对待边值问题．因此 С. Л. Соболев 引进了广义解的概念，其中有一种就是利用 L^2 型空间⑤来作的．更进一步来说，假如我们从 Hamilton 原理出发，那么许多物理问题就首先表成关系积分的等式．只有对于所要求的解，加上二次可微之类的条件后，才得出通常的数理方程．所以广义解的产生是自然的，并且可以比古典解更好地反映物理实质⑥．倘若我们固执在可微函数范围内讨论物理问题，那末，面对着这种事实，是会感到出乎意料之外的．再以著名的 Riesz-Fisher 定理为例，微分方程、积分方程、计算方法等方面的许多重要的存在定理都是建立在它之上的．从这两个例子，我们可以进一步看到新的函数与极限理论对于旧理论所作的推广或者说补充，确实反映客观世界中的一些量的关系，它是探讨自然现象的一种数学工具．

时至今日，实变函数论已经渗入数学的许多分支中，首先应该提到的是 А. Н. Колмогоров 把概率理解为一种抽象测度．他说"要把一向显得特异的概率论基本概念很自然地归入近代数学一般概念的行列中去，在 Lebesgue 测度论和积分论未产生以前，这问题几乎是没有解决希望的．有了 Lebesgue 的研究以后，集合测度与事件概率之间的相似性，以及函数的积分与随机变量的数学期望值之间的相似性就了如指掌了．这相似性还可以更推进一

步，例如独立随机变量的许多性质与正交函数的相应性质是完全相似的…"⑦ 这样就使概率论的面目完全改观，并且拓广了概率论的研究范围.

Hilbert 的特征值理论，无穷维线性空间的概念和实变函数论的概念结合起来，就产生了 Hilbert 空间理论. 迄至现在，它还是量子力学的较好的数学基础. 它是一切抽象空间中最近似于欧氏空间者，泛函分析各分支因它的带动而得到了巨大的发展. 自从 C. Л. Соболев 在偏微分方程中引入实变函数的观念以来，现在我们已经可以说，泛函方法是偏微分方程论中的重要方法了. 总之，实变函数论促进了泛函分析的诞生，并且通过泛函分析而影响及于微分方程理论、计算数学和近代物理学

实变函数论与 Fourier 分析、遍历理论、积分方程理论之间的紧密联系，那是众所皆知的. 测度论给予空间点集一种定量的描述，从此出发来研究数学分析上的许多基本概念就得到比前大为深刻的结果⑧. 除此之外，实变函数论还用于微分方程定性理论、动力系统、解析函数的边界值问题等方面.

根据上述大量事实，可见实变函数论有着广泛而且深刻的应用，确是数学的重要分支. 它在各支数学中的应用成了现代数学的一个特征⑨. 所以凡是想了解并且掌握近代数学的人，都应该认真的学习实变函数论这门课程.

实变函数论和那么多的数学分支有关，已如前述，但是在一般学校的教学计划中，那些分支如概率论、数理方程、泛函分析等都列在实变函数论之后，因此在本书中只能适当地提到它们，否则就会弄成喧宾夺主之势，弄得什么都没有学好。我们建议读者不要在那些粗略的，一提而过的地方花费太多的精力，因为其中有些是不可能在现阶段彻底弄懂的. 所有用小字排印的部分以及附录，是为读者进一步学习时参考之用，不一定要在课堂上讲授. 根

据我们的经验，此书正文部分，估计在60个学时左右可以讲完。

最后要说一下此书编写的经过. 在1958年春季吴智泉同志根据我过去的讲稿(已由原高等教育出版社出版)作了若干修改和补充，这次我们又在他所写讲稿的基础上，补充了一些材料，在文字方面也稍加润饰. 但迫于时间，仓促成书，谬误之处，恐怕是难免的. 我们诚恳地希望读者提出意见，以便将来有机会再版时，根据大家的意见来进行修改.

应该特别感谢我系党总支的正确领导和鼓励. 几年来，总支一直提醒我们重视教材工作，并且给予许多原则性的指示. 还该感谢我系十余名教师同志帮助我们来作编辑加工. 所以这本虽然并不成熟的书，倘若没有党的领导、关怀以及群众的热烈支持，也是不可能和读者见面的.

江泽坚

1961年4月15日

① I. 海尔比林著，王光寅译，广义函数导引，科学出版社，1957.

② 见本书

③ Л. А. 刘斯铁尔尼克与B. И. 索伯列夫著，杨从仁译，泛函分析概要，§§24—25. 科学出版社，1964.

④ 吴新谋，数学物理方程，第三卷，科学出版社，1959.

⑤ С. Л. 索波列夫著，钱敏等译，数学物理方程，第XXII讲，高等教育出版社，1958.

⑥ А. Д. 亚历山大洛夫等著，秦元勋等译，数学——它的内容、方法和意义，第二卷，科学出版社，1959，第六章§6.

⑦ А. Н. 柯尔莫哥洛夫著，丁寿田译，概率论基本概念，商务印书馆，1952，序言.

⑧ 例如Looman-Menchoff的结果（见S. Saks, Theory of the

Integral, 1937, Ch. VI, § 5)以及 Г. П. 托尔斯托夫的一系列工作. (见注 9 所引书第一节)

⑨ H. K. 巴利等著, 孙以丰译, 度量性实变函数论(三十年来的苏联数学), 中国科学院, 1953, 前言.

目　　录

第一章　集合及其基数

实变函数论是在集合论的观点与方法渗入数学分析的过程中产生的. 对特定的集合按某种要求作分解与组合，是实变函数论中的一种基本的论证手法，因此我们现在先介绍一些有关集合论的基本知识.

§1　集合及其运算

一个集合是被我们看成了一个单一整体的一些"事物". 这些"事物"称为这个集合的**元素**. 如果 A 是一个集合，x 是 A 的元素，则记为 $x\in A$. 读作"x 属于 A"；x 不是 A 的元素这一事实记为 $x\overline{\in}A$ 或 $x\notin A$，读作"x 不属于 A".

我们说集合 A 已经给定，就是说对于任意"事物"x，我们都能鉴别 x 是否是 A 的元素，即鉴别 $x\in A$ 和 $x\overline{\in}A$ 中是哪一个成立. 一般说来，这两个式子中应该有一个而且只有一个成立.

上面我们把集合"看成了一个单一整体"是说我们认为集合和组成这个集合的那些元素是不同的. 我们着眼的不是这些元素中一个个的"事物"，而是认为这些"事物"已组成了一个整体. 因此如果 x 是某一"事物"，当我们说"以 x 为元素构成一集合"时，这个集合和 x 本身就是不同的东西了，尽管这个集合中就只有一个元素 x.

我们可以用已有的"事物"作元素构造各种各样的集合. 例如将 1,2,3 三个数放在一起看成一个整体，便得到一个集合，可以记为$\{1, 2, 3\}$. 此处我们用$\{\quad\}$表示把括号中的那些"事物"放在一起看成一个整体的意思. 这种用加上括号来表示构成集合的办

法，我们以后将经常引用. 如$\{2,4,6,8\}$，$\left\{\frac{1}{n}; n=1,2,\cdots\right\}$分别表示由2,4,6,8这四个数组成的集合和由$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$这样的无穷多个数组成的集合. 一般说来，如果$p(x)$是一个与$x$有关的条件(或命题)，则所有合乎这个条件(或使这个命题成立)的x所构成的集合便记之为$\{x; p(x)\}$. 例如当$p(x)$是"数x的平方等于1"这一条件时，$\{x; p(x)\}$就是$\{-1,1\}$. 又如果E是一个事先给定了的集合，则$E[x; p(x)]$便表示E中所有使条件$p(x)$满足的x所构成的集合，也就是$\{x; x\in E, p(x)\}$. 例如当$f(x)$是一个给定的实函数且a是一个常数时，$E[x; f(x)>a]$就是E中那些使$f(x)$大于a的x所构成的集合. 自然这里的E应是某个已事先给定了的集合.

我们说两个集合A和B是**相等的**，记为$A=B$，就是说它们所包含的元素相同，即它们实际上是同一个集合. 例如$\{x; x^2=1\}=\{-1,1\}$.

设A,B是两个集合，如果属于A的元素都属于B，则说A**包含于**B或A是B的**子集**，记为$A\subset B$，A包含于B也可以说成B**包含**A，而记为$B\supset A$.

不含任何元素的集合称为**空集**或**虚无集**，记作$\varnothing$. 它是任何集合的子集.

对于任何集合A，$A\supset A$总成立，所以A也是A本身的子集，如果$B\subset A$，$B\neq A$，即B是A的子集，但B还不等于A，则说B是A的**真子集**.

下述两个定理是显然成立的.

定理1 $A=B$的充要条件是$A\subset B$，且$B\subset A$.

定理2 如果$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$.

设A,B是两个给定的集合，将它们所共有的元素拿来构成一

个新的集合，称为A和B的**交**，记作$A\cap B$或AB，因此

$$A\cap B=\{x;x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

例如$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，$C=\{6,7,8\}$，则

$$A\cap B=\{3,4\},B\cap C=\{6\},A\cap C=\varnothing.$$

一般说来，如果Λ是一集合，对于每一$\lambda\in\Lambda$，都相应地给定了一个集合A_λ，则我们就说给定了(以Λ为下标集的)**一族集合**. 这时这族集合的交定义为

$$\{x;\text{对每一 }\lambda\in\Lambda,\text{都有 }x\in A_\lambda\},$$

记为$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. 如果$\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$或$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，则上述交就分别简记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_\lambda$和$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 所以

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x;\text{对任何正整数 }n,\text{ 都有 }x\in A_n\}.$$

例 1 若$A_n=\{x;0\leqslant x<1+\frac{1}{n}\}$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x;0\leqslant x<1+\frac{1}{n}\}=A_n,\ \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x;0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

例 2 若$A_n=\left\{x;n\leqslant x\leqslant n+\frac{3}{2}\right\}$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing.$$

例 3 若$A_n=\{x;-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\}$，$n=1,2,3,\cdots$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x;-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\},\ \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{0\}.$$

例 4 若Λ是全体实数所构成的集合，$A_\lambda=\{x;\lambda\leqslant x<\infty\}$，$\lambda\in\Lambda$，则

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\varnothing.$$

两个集合 A 和 B 的并定义为

$$\{x; x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

记为 $A\cup B$. 例如 $\{1,2,3,4\}\cup\{3,4,5,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$ 同样，以 Λ 为下标集的一族集合 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的并就是

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\{x;\text{有 } \lambda\in\Lambda, \text{使} x\in A_\lambda\}.$$

当 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$ 或 $\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 时，分别有

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\{x;\text{有 } i\leqslant n, \text{使 } x\in A_i\},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{x;\text{有正整数 } n, \text{使 } x\in A_n\}.$$

例 5 若 $A_n=\{x; n-1<x\leqslant n\}, n=1,2,3,\cdots$, 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{x; 0<x<\infty\}=(0,\infty).$$

例 6 若 $A_n=\left\{-1+\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{n}\right\}, n=1,2,3,\cdots$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\left\{x; -1+\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{n}\right\}=A_n=\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right],$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{x; -1<x<1\}=(-1,1).$$

例 7 设 Λ 是大于零而小于 1 的全体有理数构成的集合，$A_\lambda=\{x; \frac{\lambda}{2}<x<2\lambda\}, \lambda\in\Lambda$. 则

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=(0,2).$$

当 $A\cap B=\varnothing$ 时，我们说 A 和 B 不（相）交. 对于集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，如果对任意 $\lambda',\lambda''\in\Lambda,\lambda'\neq\lambda''$，都有 $A_{\lambda'}\cap A_{\lambda''}=\varnothing$，则说这族集合是互不相交的或两两不交的.

根据交与并的定义立即可得:

定理 3 下列各式恒成立:

(1) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(2) $A\cap(B\cup C)=(B\cup C)\cap A=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(3) $A\cup A=A, A\cap A=A$.

定理 4

(1) $A\cap B\subset A\subset A\cup B$.

(2) 若 $A_\lambda\subset B_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$. 特别是若 $A_\lambda\subset C$ $(\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset C$.

(3) 若 $A_\lambda\subset B_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，特别是若 $C\subset B_\lambda$ $(\lambda\in\Lambda)$，则 $C\subset\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}B$

(4) $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cup B_\lambda)=\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\cup\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)$.

(5) $A\cap\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$.

证明 以(2)，(5)的证明为例. 先证(2)，由并的定义，如果 $x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，则应有 $\lambda'\in\Lambda$；使 $x\in A_{\lambda'}$. 而 $A_{\lambda'}\subset B_{\lambda'}$，所以有 $x\in B_{\lambda'}$. 从而 $x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，这说明 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$ 是成立的.