# 离散数学导论

## 数理逻辑·集合·关系部分

黄和之 编著

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B=0 \Rightarrow A=0)$$

$$R=t(R) \Leftrightarrow R^2 \subset R$$

# 离散数学导论

**离散数学导论**
Lisan Shuxue Daolun
黄和之　编著
北京经济学院出版社出版
（北京市朝阳区红庙）

北京市通县永乐印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

787 × 1092 毫米　32 开本　　8.875 印张　206　千字
1992 年 3 月第 1 版　　1992 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
印数：00 001— 3000
ISBN7-5638-0146-4/O・4
定价：2.55 元

## 内容简介

本书包括数理逻辑、集合论、二元关系三部分共五章。

数理逻辑部分，为适应初学者，增加了许多说明概念的例子。命题蕴涵式的快速证明，简捷明快，为本书所特有。集合论部分讨论了悖论。谓词理论的应用，二元关系的传递性判别法等具有特色。

我社已出版的《离散数学导论习题选解》可供本书配套使用。本书适用于经济类信息专业，有关专业本科、专科，电大、成人教育等；也可作计算机工作者自学资料。

# 序

这本《离散数学导论》是北京经济学院黄和之副教授根据自己在教学中使用多年的讲义整理补充而写成付印的。

此书的最大特点是对一些复杂繁难的问题，力图用简便办法或初等工具处理，使同学易于掌握，并受到不必墨守成规的启发。逻辑蕴涵式的快速证明和用除法求本原多项式是两个典型的例子。

数理逻辑中，逻辑蕴涵式的证明比较繁难。作者提出的快速证明法对前件多而后件少的逻辑蕴涵式来说，确实是简捷明快。运用此一方法，在逻辑推理中即刻自行构造推理规则有其独到之处。在谓词演算中运用此一方法也是值得探索的。

在有限域 Zp 上求所有 m 次不可约多项式和 n 次本原多项式，在理论研究和实际应用方面都是有意义的。Church，R. 1935 年发表 $Z_2,Z_3,Z_5,Z_7$ 上的低次不可约多项式及其周期后，几十年来，很多学者作了大量工作。Rudolf Lidl 和 Harald Niedeareiter 1983 年在伦敦出版了带有总结性的 Finite Fields，其中列举了各个时期所得到的多项式数据。理论上推出下列两个公式：

$$I(q,m;x)=\prod_{d|m}((x^{q^d}-x)^{\mu(m/d)}$$

$$Qp^n-1(x)=\prod_{d|p^n-1}(x^d-1)^{\mu((p^n-1)/d)}$$

前者是所有 m 次不可约多项式的乘积，后者是所有 n 次本原多项式的乘积。求具体的不可约多项式，文献中用筛法或因式分解法，手续繁杂，计算量很大。本书作者不用 Mōebius 函数及其反演，只用初等工具证明了几个定理，得出公式或计算格式。教学中同学反映容易掌握，有的同学还受到敢于创新的启发，发挥了自己的创造

性。

此外，书中二元关系的传递性的判别法，利用闭包定义的第三条件简化了几个定理的证明，求子群的规范化方法，有限域阶数的证明，以及求生成树(骨架树)棵数的方法，也都有可取之处。虽然有的方法还需要总结提高。

本书的第二个特点是在章节安排上采取积木式编法。文理跨学科的专业，只愿花较少时间讲授数理逻辑的专业以及专科学校，可只用 1—4 章作教材；学时少的计算机专业可用本书作教材；学时较多的计算机专业或愿开设离散数学课程的其它专业则可用本书及本书续篇无限集合、近世代数、图论部分作教材或教学参考书。书中采用了较多的例子说明概念，以增强其易读性，有利于教学时采用由浅入深的启发式教学方法。本书作为自学离散数学的参考书也是合适的。与本书配套的《离散数学导论习题选解》业已出版。

本书在同行中必将引起争论的是数理逻辑部分选用了过多的文学、数学、先秦典籍中事例的例子。赞成者会认为可以扩大知识面，提高学习兴趣；反对者会认为这些旁征博引是喧宾夺主。再有，某些用词也可能引起争议，如从 A 集到 B 集的所有函数的集合不叫超幂而叫配置集；Bijective 不译双射而译作单满射；Contingency 译作偶真式等。这些词是否妥当，有待于专家指教和大多数读者认可。另外，对于某些史实，作者在查阅了有关书籍后，再三考虑，没有袭用别人的说法。

据作者称，他的这些作法以及他提出的一些简化方法，意在抛砖引玉。他希望在批评或否定他的“立异”时，上述愿望能够得到理解。我想，学术研究，贵在百家争鸣，作者的愿望是会被理解的。

不久前，我通读了本书原稿，并与作者讨论过几次。在这里写下我的一些印象和看法，供读者参考。

邹德林

1991 年 3 月

# 前　言

在北京经济学院信息管理专业几年教学实践的基础上编成了这本《离散数学导论(数理逻辑·集合·关系部分)》，和作为它的续篇的《离散数学(无限集合·近世代数·图论部分)》。编写时作者追求一种风格，这种风格要求理论上由浅入深、由粗到细，方法上则力求简便，并且多用例子阐述概念。

原《讲义》在使用过程中，同学反映较好。有的同学还补充或改进了一些定理的证明，有的同学提出了一些简化方法。

这次编写成书，作了较大的修改和补充。主要有以下四个方面。

一、数理逻辑部分。为适应同学在工作、生活中应用逻辑知识的需要，我们附带介绍一些形式逻辑和逻辑史方面的知识；为提高学习逻辑的自觉性，选用了数学、文学的例子，也举了先秦著作中的事例来说明逻辑概念。这种讲法，在多轮教学中都是受欢迎的。一些同学认为他们第一次接触抽象的逻辑符号和公式时，对这些材料是有兴趣的。命题蕴涵式的快速证明法的论文已于 1985 年发表，这次经扩充作为第二章列入书中。大多数永真式在论证中作推理规则使用，在这一章中专用一节讨论构造永真式。

二、集合论部分。讨论了悖论，介绍了一些资料，对罗素悖论的来源作了考证。这也是尝试性的。读者对此不感兴趣的话，可以不看，对后面阅读不会有影响。求传递闭包的加弧法是谓词理论的应用，对 1962 年发表的 Warshall 法，可用它作出简易而轻巧的证明。

三、近世代数部分。增写了九、十、十一等三章。对求子群，提

出一种规范化的方法。对有限域，用初等工具探索出构造不可约多项式的简便方法，证明了并不需要从不可约多项式中筛选出本原多项式的定理。据此编制了两个软件，在计算机上计算并打印出比1983年伦敦出版的 Finite Fields 中一些表的数据更全面的多项式表。例如，按键 P,D,19,2,2，打印出 $Z_{19}$上二次不可约多项式 171 个及其周期。按键 P,R,2,11,13，打印出 $Z_2$ 上 11 次本原多项式 176 个，12 次 144 个及 13 次 630 个。按键 P,R,43,1,2，打印出 $Z_{43}$ 上一次本原多项式 12 个，二次 240 个。

四、图论部分。给出计算骨架树（生成树）棵数的简易方法。

离散数学著作近几年已出版多种，本书在内容取舍和章节安排上是否合适，希望得到专家们指教。限于作者水平，书中会出现缺点和错误，敬请读者指正。对于本书提出的一些方法，作者的动机是抛砖引玉，希望同行们提出更好的方法。至于能否为初学者提供一些方便，就只能在使用过程中由读者评价了。

初编讲义时，李斯奇同志曾协助收集资料；编写成书时，邹德林同志提过很多好的建议，这里一并向他们致谢。

本书出版过程中，曾得到台湾台中县昭武公司陈德荣先生的关心和支持。编者深表谢忱。愿海峡两岸学术著作的交流，今后将有进一步的发展。

编　者

1991 年 10 月

# 目　　录

# 第一篇　数理逻辑

数理逻辑是研究推理，特别是研究数学中的推理的科学。数理逻辑用数学方法研究思维形式和规律，特别是研究数学中的思维形式和规律。这里所说的思维是遵守矛盾律和排中律的思维，不是辨证思维，更不是形象思维。

命题逻辑和谓词逻辑是数理逻辑的基本组成部分，是其它分支的共同基础。离散数学课程中只讲授命题逻辑和初步的谓词逻辑。

通过这一篇的学习，希望达到三个目的：第一，信息专业的同学刚结束高等数学等课程的学习，通过推理规则和证明方法的学习，能将自已掌握的证明技巧总结提高；第二，为学习集合论、近世代数准备理论基础和应用工具；第三，对数理逻辑中所揭示的思维规律、所介绍的方法能在计算机科学的后续课程中应用。

要说明逻辑概念免不了举例，本书在举例时顺便介绍一些形式逻辑的常识，对知识性强又有一定趣味性的例子，我们搜集整理了一些。数理逻辑是二值逻辑，凡适于用二进制描述的就采用二进制数字，这是方便的，也是有益的。

# 第一章　命题逻辑

## §1.1　命　　题

一个可判断为真或假的陈述句叫命题。若命题为真，叫它的真假值为真，或叫它取值为 1，若命题为假，叫它的真假值为假，或叫它取值为 0。任何命题必取两种真假值之一，且仅取其一。

【例1】　下列各语句都是命题。

(1)月亮是方的。

(2)4 是质(素)数。

(3)3+3=6

(4)2 是偶数，且 3 是奇数。

(5)(今年)中秋月不明，(则明年)雪打上元灯。

(6)11+1=100

(7)北京附近有冰川。

(8)任何大于 2 的偶数为二素数之和。

这些命题中，(1)(2)是假的；(3)(4)是真的；(5)(8)要适当条件才能定出真假；(6)在二进制中为真，在十进制中为假；(7)在远古为真，在近代为假。

【例2】　下列各语句不是命题。

(9)x+y>4

(10)x=3

(11)看画展了吗？

(12)禁止吸烟！

(13)“我说的这句话是假的”。

这些语句中，(9)、(10)虽是陈述句，要确定 x、y，或限制 x、y 才能定出真假(见第三章)。(11)(12)非陈述句，(13)是悖论(第四章讨论)。

**简单命题、复合命题**

例一中(1)、(2)、(3)、(6)、(7)、(8)是不能再分解的陈述句，叫简单命题。如(4)、(5)，是可分解成几个陈述句的陈述句，叫复合命题。组成复合命题的命题叫支命题。

**命题变元**

象初等代数里用 x、y 代表数那样，可以用 P，Q，R 等字母代表命题。若 P，Q，R 只代表某一具体命题，叫命题常数；若 P，Q，R 代表任一命题，叫命题变元。(同一式子中相同字母表示相同命题，不同的字母可以但并不一定表示相同的命题。)

命题用符号代表，符号(命题变元)可用任一命题代入，就把原来的具体问题抽象化了。战国时公孙龙就曾用把问题抽象化的方法，解决了赵国的一个外交问题。

> “空雄之遇，秦赵相与约。约曰：‘自今以来，秦之所欲为，赵助之；赵之所欲为，秦助之。’居无几何，秦兴兵攻魏，赵欲救之，秦王不悦，使人让赵王曰：‘约曰：秦之所欲为，赵助之；赵之所欲为，秦助之。今秦欲攻魏，而赵因欲救之，此非约也。’赵王以告平原君，平原君以告公孙龙。公孙龙曰：‘亦可发使而让秦王曰：赵欲救之，今秦王独不助赵，此非约也。’”
>
> 《吕氏春秋 · 淫辞》

公孙龙把‘秦之所欲为，赵助之；赵之所欲为，秦助之’抽象成‘一方所欲为，另一方助之’，再作代入，理由就充足了。

把命题符号化，是不管具体内容而突出思维形式的一种方法。命题变元只起标记任意命题的位置的作用，不能确定其真假。严格

说来，命题变元不是命题，但常常简称命题变元为命题。

## 习题 §1.1

1. 下列语句哪些是命题，若不是命题，说明理由。

(Ⅰ)看球赛去！

(Ⅱ)鸡有三只脚。

(Ⅲ)天下之中央，在燕之北与越之南。

(Ⅳ)所有哺乳动物都是脊椎动物。

(Ⅴ)考试是为了学习，学习不是为了考试。

2. 在上题中指出复合命题。

3. 确定下列命题的真假。

(Ⅰ)所有哺乳动物都是胎生的。

(Ⅱ)没有最大的素数。

(Ⅲ)$\sqrt{2}$是有理数。

(Ⅳ)李善兰是清代的数学家或宋代的女词人。

(Ⅴ)孟子喜欢吃鱼，也喜欢吃熊掌。

(Ⅵ)白马非马。

4. 对 3 题中的复合命题写出其支命题。

# §1.2 逻辑联结词

把支命题组成复合命题的连接词叫逻辑联结词。它们作用于命题变元时，和数学中运算符号相当，所以又叫逻辑运算符。

常用的逻辑联结词有非、且、或、如果…则、当且仅当五个，分别用 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$表示。前四个在自然语言中也是常用的，但含意不够精确。逻辑语言是人工语言，使用这些联结词时用真值表对它们作出严格定义，使其含意清楚准确，不会产生歧义。

1. **否定词 $\neg$**

$\neg P$ 读为“非 P”，“P 不真”。

由排中律,P 真则 ¬ P 假,P 假则 ¬ P 真。故可用真值表定义如下。(0 代表假,1 代表真。)

| P | ¬ P |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

在自然语言中,常把否定词放在动词前面,不说“天下雨”不真,而说天没下雨,或天不下雨。这在语气上流畅一些,但应用时就要受一些限制,可以说“如果我走路不打伞,则‘天下雨’不真”,却不能说,“如果我走路不打伞,则天不下雨”。

作为逻辑运算符,¬ 是一目运算符。

**2. 合取词 ∧**

P∧Q 读为 P 与 Q 的合取。P 并且 Q,P 逻辑乘 Q,P、Q 的逻辑积。

自然语言中的又、且、也、而、不但、而且,都与合取相当。但自然语言中的“且”,常表示动作上的连贯、动作或性质上的对比、类似等。如“他开门并出去”,“他有坏习惯,抽烟又酗酒”,“西风紧,北雁南飞”,“桃红柳绿”等。逻辑中的合取却不管两个支命题的意义,可以说“北极熊性情暴烈,但托尔斯泰对人类文化作过贡献”。也可以说“月亮是方的且雪是白的”。另外,自然语言要考虑心理因素,说“2 和 4 都是素数”,可以评为对一半,说“《狂人日记》的作者是周树人和鲁迅先生”,语文教师绝不会给满分。“屡战屡败”和“屡败屡战”意义大不相同。

逻辑中用真值表定义

| P Q | P∧Q |
|---|---|
| 0 0 | 0 |
| 0 1 | 0 |
| 1 0 | 0 |
| 1 1 | 1 |

作为运算符，∧是二目运算符。

3. **析取词∨**

$P \vee Q$ 读为P和Q的析取。P或Q，P逻辑加Q，P和Q的逻辑和。

自然语言中的“或”有可兼或，如“李宁或朱建华曾被评为优秀运动员”，还有不可兼或，如“这次球赛，甲队或乙队将得冠军”。使用或字，有心理因素，一般是估计两者之一为真而不知道哪一个为真才用“或”。已经决定不献血了，还说“我或献或不献”，已决定当天离开了，还说“我今天或明天走”，就会被认为是虚伪。在评定含或字的断言时，标准也可能不一致，如“2是偶数或6是奇数”会认为对一半，“《三国志》的作者是罗贯中或陈寿”，会认为不对。自然语言中用“或”联结的两个支命题总有形式上或内容上的联系，象“$2\times2=5$ 或上海是海滨城市”在自然语言中是没有意义的。

数理逻辑中的析取，相当于可兼或，但任何两个命题都可组成析取式，而不管它们的内容，析取式的真假值由支命题的真假值决定。真值表如下：

| P Q | $P \vee Q$ |
|---|---|
| 0 0 | 0 |
| 0 1 | 1 |
| 1 0 | 1 |
| 1 1 | 1 |

∨是二目运算符。

不可兼或又叫异或，用符号$\overline{\vee}$，其真假值如下表：

| P Q | $P \overline{\vee} Q$ |
|---|---|
| 0 0 | 0 |
| 0 1 | 1 |
| 1 0 | 1 |
| 1 1 | 0 |

数理逻辑中 $P\overline{\vee}Q$ 与 $\neg(P\leftrightarrow Q)$ 真值相同，故 $\overline{\vee}$ 不常用。

**4. 蕴涵词**

$P\rightarrow Q$ 读为 P 蕴涵 Q，P 为前件 Q 为后件的蕴涵式，在一定条件下可读为如果 P 则 Q。

蕴涵式的真假值首先由公元前三世纪希腊斯多噶学派以下列真值表给出①

| P | Q | $P\rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

它所提供的标准“直至今天也是唯一精确的标准”①实践证明，建筑在这个简便的标准之上的数理逻辑，是复杂精细的数学推理的合适的基础。②

蕴涵是自然语言中“如果…则”的抽象，其取值与命题必取且仅取一真假值的规定是吻合的，在理论上也是相容的。正如几何中规定线只有长短没有粗细一样，理论上是需要的，在科学实践中也证明是合适的。

前件假而整个陈述句为真，在自然语言中也是常见的：

如果不是抢救及时，他已经去见上帝了。

假如给我一根合适的杠杆，我可以把地球撬起来。

阿基米德

---

① 亨利希·肖尔兹《简明逻辑史》中译本 37 页、93 页

② 塔尔斯基：《逻辑与演绎科学方法论导论》中译本 25 页