几何变换

第三册

U.M. 亚格龙 著

章学诚 译 姜伯驹 校

北京大学出版社

翻译说明

要学好数学，必须喜爱数学。入门的书对于启发读者的兴趣和爱好关系很大。一本好书循循善诱、引人入胜，相反，则望而生畏、令人却步。

由于种种原因，数学往往被罩上一层神秘的面纱。好奇的中学生、热心的中学老师和各条战线上广大的科教工作者都渴望了解：究竟什么是数学？它有哪些主要方面？近代数学研究什么问题？有哪些重要的数学思想和成就？

为了满足这些要求，我们组织选译了这套“新数学丛书”，向广大读者推荐。

和一般的通俗数学读物不同，“新数学丛书”的选题既不是介绍某些有趣的数学问题，也不是传授专门的解题技巧；而是向未必具有很深数学修养的读者系统地介绍一些与近代数学有关的数学分支中的专题。这套书选题面较广，涉及代数、几何、分析、拓扑、概率、计算机以及数学在力学、物理等方面的应用。内容虽然浅显，但却抓住了核心和基本的数学思想。

这套书还有一个特点：选写人大多数是该领域中的著名学者，学术造诣精深、热心普及数学教育；因此能高瞻远瞩、深入浅出，生动而严肃，简明而不失全貌。

这套丛书不仅可以作为高中学生和大学低年级学生的课外读物，而且对于想了解近代数学思想和方法的科教工作者也提供了一条门径。

“新数学丛书”首创于一九六一年，已陆续出版近三十

册。有些书早已脱销。“新数学丛书”编委会，特别是 Anneli Lax 教授，得知我国有意翻译这套丛书后，慷慨地赠送了全套样书。在此，我们表示衷心的感谢。

江泽涵 张恭庆

一九八三年春于北京大学

致 读 者

这本书是专业数学家编写的一套丛书中的一本。编写这套书的目的是要向广大的中学生和非专学数学的外行人把一些重要的数学概念说明得很有趣且能懂。“新数学丛书”中的大多数书所讨论的课题通常不属于中学课程表的范围，各书的难易程度不同，甚至在同一本书里，有些部分就比其它部分更需要全神贯注才能读懂。虽然读者要懂得这套丛书中的大多数书，并不需要多少专门知识，但是他必须动一番脑筋。

如果读者从来只在课堂上才遇到数学，那他就应该牢记：数学书不能读得很快，他也一定不要期望，读第一遍的时候就能理解书的全部内容。复杂的部分他应该自由地跳过去，以后再回过头来读；一个论点常常是通过后面的话才能搞清楚。另一方面，内容十分熟悉的一些节可以读得很快。

学数学的最好办法是“做数学”；每一本书都包含问题，其中有些可能需要很可观的思考。劝告读者养成读书时手边备有纸和笔这一习惯，这样读，他会越来越觉得数学有趣味。

这套书的编印是一种新的冒险。我们愿在此申明并致谢，在准备这套书时，许多位中学师生曾慷慨协助。编辑者欢迎读者提出意见。请函告Editorial Committe of the NML series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N.Y.10012。

编 辑 者

作者简介

亚格龙（Яглом）1921年出生于苏联哈尔科夫市，1942年毕业于斯维尔德洛夫大学，1945年获得副博士学位。他早年曾在莫斯科国立大学、奥彼克霍夫-基辅教育学院等校任教。1957年至1968年任莫斯科国立教育学院的几何学教授。1968年以后，他在莫斯科的一所工程技术夜大学任教。

他对苏联的数学教学有相当大的影响。他还发表了许多科学论著，其中有不少被译成英文，如《Complex Numbers in Geometry》，《Convex Figures》等等。

序　言

（摘 译）

《几何变换》的这一分册专门讨论平面的把直线变成直线的变换；这些变换通常称为仿射变换和射影变换，或简称线性变换。它们不属于苏联中学的教学计划，而是大学里学习的内容。然而，本书首先是为关心中学数学的读者——中学生和中学教师，以及未来的中学教师和高等学校中有关的教师——写的。按照这个宗旨，本书的主要目的是要阐明仿射变换、射影变换和初等几何之间的密切联系。由于篇幅的限制，作者几乎完全避免阐述与几何变换有关的较高级的理论，只是在《高等几何》这个领域内作了一次很有意思的涉猎，那就是关于罗巴切夫斯基的非欧几何的附录；但是即使在这里作者也力求保持叙述的初等性，因此这个附录对于中学高年级的数学爱好者也应当是完全可以读懂的。

书中所列的问题是本书的重要组成部分，它们的解答构成本书的后半部分。作为基本部分的正文同这些问题完全无关；但是我相信，如果读者那怕至少对其中的部分问题下点功夫，对于加深对正文的理解也会是极其有益的。除了附录中的问题旨在向读者介绍一点关于非欧几何的具体结果以外，所有的问题都属于初等几何的范围。在有些问题的解答后面加了注释，它们是对运用这些变换的方法所作的附加说明。

这一册与《几何变换》第一、二册基本上没有关系；但是其中的引论和附录与它们的引论有直接的联系。此外，这

一册中的部分术语也与第一、二册中的严格一致。

本书中的第一章同《几何变换》第四册中的第二章都可作为一个独立的整体，第二章完全可以放在第一章之前来读。本书的引论和附录在初读时可以先省略；但是如果读者完全忽略它们，那是很可惜的。在读本书时也可以略去在书中比较独特的最后一节。

U.M.亚格龙

目　录

引　论

什么是几何？（最后的论述）

在《几何变换》第一册的引论中，我们曾把几何定义为研究图形在运动下保持不变的那些性质的学科。在《几何变换》第二册的引论中，我们又给几何下了一个新的定义，那就是作为研究图形在相似变换下保持不变的那些性质的学科。自然要问，这两种定义是否完全等价？即它们究竟是同一个学科的不同的定义呢，还是存在两种不同的几何：一种是《几何变换》第一册的引论中讨论的几何，另一种是《几何变换》第二册的引论中所讨论的几何？我们将阐明后一种说法是正确的，即这两种几何是不同的（虽然是密切相关的），并且事实上存在着许多种不同的几何。最有趣的几何之一是罗巴切夫斯基-波里亚（Lobatchevsky-Bolyai）的非欧几何，也就是所谓双曲几何，它跟通常的几何有根本性的差别，在本书末的附录中要讨论这种几何①．

我们在《几何变换》第二册的引论中已经指出，把几何当作研究图形在运动下保持不变的那些性质的早先的定义是不适当的。我们作出这个结论的根据如下：运动是平面上保持任意两点之间距离不变的变换。然而，表示距离的数目却依赖于度量单位的选择。由于一个几何命题不能依赖于

① 也可看U.M. 亚格龙的Complex Numbers in Geometry (Academic Press, N.Y., 1968)的附录，在那里讨论了八种平面非欧几何，其中包括双曲几何。

长度单位的选择，因此几何定理应当只涉及线段的长度之比，而不是线段的长度。换一种说法，就是在几何中对相似的图形应当不加区别。明确地说，就是如果一个定理关于某个图形是真的，则对于任何一个与它相似的图形也是真的。

虽然这个论点对初等几何的所有定理成立，但是它对于，例如，所有的几何作图并不成立。如果在某一几何作图中我们给定了一个线段的长度，则这个长度不是用一个数，而是用给定一个线段的方式给出的。例如，假若我们要作一个三角形 ABC，它的两边 AC 和 AB 以及中线 CD 的长度是给定的，这意思就是我们给定了与 AC,AB,CD 全等的线段(图1)。在这里所给出的是线段长度而不是这种长度的比值，这就意味着不是所有的相似三角形都能看成可接受的解；如果这些三角形中有一个是我们问题的解，则其它(不跟它全等)的三角形就不是解。我们看到，在《几何变换》第二册的引论中所给出的几何定义，一方面适用于初等几何的所有定理，另一方面却不能说它适用于所有的作图问题（这些问题实质上是建立在早先的《几何变换》第一册的引论中所讲的几何定义的基础之上的)。基谢廖夫（Kiselyov）的教科书①的内容既然以《几何变换》第一册的引论中的定义为基础，自然也就要从讨论三角形全等

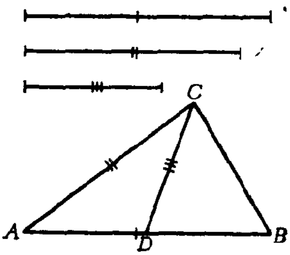

图 1

① 这是标准的苏联几何教科书。——英译者

的定理开始；如果我们对相似三角形不加区别，这类定理就会变成没有对象的空论，因为在那时全等概念将失去意义。

这样，我们可以得出结论：在《几何变换》第一册和第二册的引论中定义的两类几何是不同的。此外，在第二种几何（自然称为相似几何）中图形的所有性质，也是图形在第一种几何（运动几何）中的性质；实际上，图形在相似变换下保持不变的每个性质在运动下必然也保持不变。这句话反过来不成立；在运动几何中比在相似几何中有更多的性质（在运动几何中，一个图形的两点之间的距离反映了它的一个几何特性，而在相似几何中只有距离之比有意义。）这就是在相似几何中的作图问题比运动几何中的作图问题要少得多的原因①。

回忆一下我们是如何得到前面的两个定义的。我们把运动几何定义为研究图形在运动下保持不变的那些性质的学科；换一种说法，就是在这种几何中我们把经过运动能够彼此叠合的两个图形，也就是把两个全等的图形看成是不可区别的。我们把相似几何定义为研究图形在相似变换下保持不变的那些性质的学科；换句话说，在这种几何中，我们认为两个图形是不可区别的，如果用相似变换能够将其中的一个图形变成另一个图形；简单地说，在这里用“相似变换”代替了上面的“全等”。按照这种思想，我们定义两个图形对于确定的一类变换是等价的，如果在这类变换中有一个变换

① 在相似几何中，只有用角度以及距离之比所描述的性质才是图形的与度量有关的几何性质。所以在这种几何中的作图问题，只能是包含图形的直线间的某些夹角、和它的点之间距离的比值那样一类问题。例如，给定角 A 及其平分角线的长度与自顶点 B 所作的高之比，求作三角形 ABC。要解这个问题，就是要找在一个顶点具有给定角，并且其角平分线和另一个顶点的高有给定比的相似三角形中的任何一个三角形。

把其中的一个图形变成另一个图形[1]．与这个变换类相对应的几何，就定义为研究图形在这类变换下保持不变的那些性质的学科．

现在我们接近于最终回答什么是几何这个问题了．要给出几何（更确切些，是全部不同的几何）的一个完整的定义，我们还需要说明对于规定一种特定的几何变换类应当加上哪些限制（如果需要加某些限制的话）．

加一定的限制的必要性是相当明显的．例如，假定我们试图定义"反射几何"为研究图形在对于直线的反射下保持不变的那些性质，且仅仅是那些性质．在这种假设的几何中，关于直线 l 对称的两个图形 F 和 F'（图2）将属于同一个类，并且由于 F'' 关于直线 m 与 F 对称，F 和 F'' 也将属于同一个类；然而 F' 和 F'' 关于任何直线都不对称[2]．这样，在我们假设的几何中不能引进一种有效的等价类的集合；F' 和 F'' 虽然都与 F 属于同一个类，但它们却不在同一个类中！

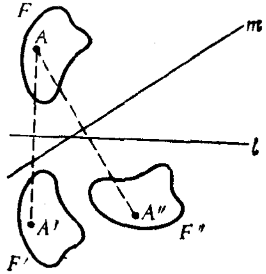

图 2

为了看出应当把什么样的限制加到作为一种几何的基础的变换类上面，我们更严格地来考虑图形的等价关系．

根据我们在数学、其它学科和日常生活中关于等价关系

① 在后面我们要引进比由相似变换所构成的类更为一般的变换类．

② 例如，这是由于这样的事实：关于一条直线对称的两个图形总是反向全等的，而图形 F' 和 F'' 却是正向全等的（参看《几何变换》第二册）．

的经验，图形的等价关系必须满足下列要求：

1.每个图形同它自己等价。

2.如果图形 F 等价于图形 F'，那末反过来 F' 等价于 F。

3.如果图形 F 等价于图形 F_1，F_1 又等价于图形 F'，则 F 等价于 F'。

如果我们的变换类 G 具有下列性质，上面这些要求肯定能够满足：

1.G 包含恒同变换(即保持每个图形逐点固定的变换)。

2.如果 G 包含把图形 F 变成图形 F' 的变换 Π，则 G 必定也包含把 F' 变成 F 的变换 P（称为 Π 的逆变换）［图3(a)］。

3.如果 G 包含把图形 F 变成图形 F_1 的变换 Π_1 和把 F_1 变成图形 F' 的变换 Π_2，则 G 必定也包含把 F 变成 F' 的变换 Π_3（它称为两个变换 Π_1 和 Π_2 的“乘积”①）［图3(b)］。

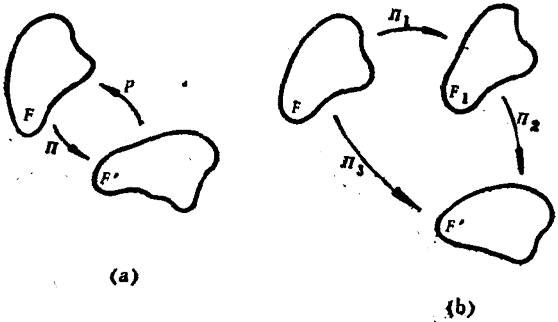

图 3

① Π_1 和 Π_2 的这个复合 $\Pi_3=\Pi_2\cdot\Pi_1$，$\Pi_3(F)=\Pi_2[\Pi_1(F)]$，通常称为 Π_1 和 Π_2 的“乘积”，但是在《几何变换》第一、二册中把它叫做“和”。参看《几何变换》第二册，第一章，§1中的英译者注。

具有性质1—3的变换类G称为一个变换群。例如，所有的运动构成一个群，同样地，所有的相似变换也构成一个群。平面上绕一个定点O的所有的旋转也构成一个群。事实上，

1. 恒同变换是绕O点转0°（或360°的任意倍数）的旋转；

2. 绕O点转α角的旋转的逆，是绕O点按反方向转过同一角度α的旋转；

3. 绕O点转α角的旋转与绕O点转β角的旋转的乘积，是绕O点转$\alpha+\beta$角的旋转。

跟绕一点的旋转相反，平面上所有旋转所构成的类不成为一个群；两个旋转的乘积可以变成一个平移而不再是一个旋转（参看《几何变换》第一册，第一章，§2）。平面上所有对直线的反射也不构成一个群；因为群的定义中的条件3和1都不能满足（两个反射的乘积一般不是关于一条直线的反射，参看《几何变换》第一册，第二章，§1；恒同变换不能表示为对于一条直线的反射）。

现在我们能够叙述几何的定义如下：*几何是研究图形在一个变换群的变换下保持不变的那些性质的一门学科*。这个定义强调了有许多种几何，而不是只有一种几何，并且说明为了要得到一种几何，只需要选择一个变换群就够了。在中学里学习过的运动几何和相似几何就是两个例子。在本书的附录里我们将要证明，双曲几何也能够看成在这种新的意义下的几何。

把几何定义为研究图形在属于一个特定的群的变换下保持不变的那些性质的学科，应归之于德国数学家F.克莱因(Klein)。虽然这不是最一般的定义（它不包括几何的某些

重要领域)，但已经证明是非常有用的，并且在科学的发展中起了重要的作用。特别，变换群的概念现在已成为近代数学中最重要的概念之一①。

初等平面几何所关心的大部分是由直线和圆所组成的图形。能够证明(参看《几何变换》第二册，第一章，§2)，相似变换可以定义为平面的把直线变成直线、圆变成圆的变换。平面的保持直线（即直线变成直线)、但不一定保持圆的变换，通常叫做仿射变换或仿射，它们构成一个群②，这是仿射几何的基础。射影平面（参看第一章，§2）的保持直线、但不一定保持圆的变换（参看第65页中的注①)。通常称为射影变换或射影也构成一个群，它是射影几何的基础③。平面的保持圆（直线可以看成半径是无穷大的圆）的变换叫做圆变换，同样构成一个群，它是反演几何的基础④。

本书虽然讲述仿射变换和射影变换，但并不是把它作为

---

① 关于群论的两本极好的初等的引论是：P.S. Alexandroff, An Introduction to the Theory of Groups, Hafner Publishing Co., New York, 1959，及I.格拉斯曼和W.迈格努斯的《群和它的图象表示》(胡复，唐松译，科学普及出版社，1981.——中译者)。

② 显然，如果一个变换Π把直线变成直线，则其逆变换也把直线变成直线；如果两个变换Π_1和Π_2都把直线变成直线，则它们的乘积也是如此；恒同变换总是保持直线，所以平面上保持直线的变换构成一个群。

③ 射影几何一般是在大学里教授的。关于这个学科有两本（英文的）引论性的书：H.S.M.Coxeter, Projective Geometry, Blaisdell Publ. Co., New York, 1964，和A.Seidenberg, Lectures in Projective Geometry, D. Van Norstrand Co., Inc., Princeton, N.J., 1962. (有关射影几何的中文教材，较简单的有：《空间解析几何引论》(下册)南开大学数学系，人民教育出版社，1978；《解析几何学》(第二卷)裘光明编，高等教育出版社，1960。较详细的有：《解析几何学》(第二卷)Б.Н.狄隆涅，Д.А.拉伊可夫著，陈鹄，周学光，裘光明等译，高等教育出版社，1957。——中译者)

④ 参看A.Tuller, A Modern Introduction to Geometries, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J., 1967.

一本学习重要而有趣的仿射几何和射影几何的入门书来写的，本书的目的是要表明（即使我们不超出初等几何的范围）各种不同的几何的存在。知道这一点可能是很有用的。譬如说，如果我们断定某一个定理实质上是射影几何的定理（即这个定理是关于在射影变换下保持不变的性质的），那末我们常常能够简化它的证明。例如，假设我们要证明三条直线 l_1, l_2, l_3 共点。如果我们对定理中的图形作一个射影变换，这时直线 l_1, l_2, l_3 分别变成直线 l'_1, l'_2, l'_3，则它们共点的充分必要条件是 l_1, l_2, l_3 是共点的。于是可能出现这样的情况：通过巧妙地选择这个射影变换，可使得直线 l'_1, l'_2, l'_3 的共点性比原来直线 l_1, l_2, l_3 的共点性要容易证明。这种证明方法，在本书中将用许多各式各样的例子给以说明。

我们提醒读者注意，在解本书中的问题时所用的方法，同在《几何变换》第一、二册中所用的方法有些差别。在那里我们用运动和相似变换对问题中图形的一个确定的部分作变换，而在本书中则将经常是对问题中的整个图形作变换。引起方法上的这种差异的原因是清楚的。一个运动施行于作为一个整体的图形上将保持这个图形不变（在初等几何中我们对只有位置差异的图形不加区别），因此问题并沒有简化。但是，在证明初等几何的一个定理，而这个定理实质上是射影几何或反演几何的一个定理时，我们可以发现对这个问题中的整个图形作变换会是相当有益的。

正如解本书中的问题所用的方法与在《几何变换》第一、二册中所用的方法有些不同一样，问题的性质也有些不同。在《几何变换》第一、二册中，往往要求读者给出各种作图，而在本书中通常则是要求去证明定理。但是，应当指出，即使在解作图问题时，如同下面三个有趣的问题所表明

的那样，射影变换或反演有时也是有用的。

(a) 在一个给定的圆中内接一个 n 角形，它的边要经过平面上给定的 n 个点(参看第 120 页，§ 5 中的问题84(a))。

(b) 作给定圆的外切 n 角形，它的顶点要在给定的 n 条直线上（参看第 120 页，§ 5 中的问题84(b))。

(c) 在给定的一个 n 角形中内接另一个 n 角形，它的边要经过平面上给定的 n 个点（参看第 124 页，§ 5 中的问题 90)。

要解上面的第一个问题而不用射影变换或圆变换，将是非常复杂的①。至于第二和第三个问题，还不知道有不用这类变换的简单解法。

最后，我们注意，运用射影变换和圆变换使我们能够解决可能的直尺作图问题（参看 § 5）和可能的圆规作图（参看第二章②）问题。

① 例如，参看 L.I.Golovina 和 U.M.Yaglom, Introduction in Geometry, D.C.Heath and Co., Boston, 1963, pp. 49—52.

② 参考《几何变换》第四册。——英译者