主编 张晓圃 温惠林

《经济应用数学》学习指导书

光明日报出版社

《经济应用数学》
学习指导书

主　编　张晓圃
　　　　温惠林
副主编　封长安
　　　　金铃芳

光明日报出版社

新登（京）字101号

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学指导书/张晓圃，温慧林主编．-北京：光明日报出版社，1994.8

ISBN 7-80091-595-6

Ⅰ.经…　Ⅱ.①张…②封…　Ⅲ.①经济数学-高等学校-教学参考书②微积分-高等学校-教学参考书③线性代数-高等学校-教学参考书④线性规划-高等学校-教学参考书

Ⅳ.F224

中国版本图书馆CIP数据核字（94）第10124号

☆

光明日报出版社出版发行

（北京永安路106号）

邮政编码：100050

电话：3017733-225

新华书店北京发行所经销

北京计量印刷厂印刷

*

787×1092　1/32　印张 14.8125 字数 330 千字

1994 年 8 月第 1 版　1994 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—4,000册

ISBN 7-80091-591-6/G•277

定价：7.80 元

前　言

由封长安副教授、张晓圃副教授任主编的经济应用数学《微积分》，由温惠林副教授、金玲芳副教授任主编的经济应用数学《线性代数与线性规划》，是高等财经学校适用的数学教材，本书就是为这两本书而编写的配套指导读物，每章按如下三个部分编写：

一、内容提要　这一部分指明读者学习每一章必须掌握的内容及必须着重掌握的概念、定理及运算法则，这是根据国家教委颁发的教学大纲的要求编写的。

二、典型例题分析　这是本书的主要内容，通过对一些典型例题的剖析，简要点明例题所涉及的基本概念、重要解法及运算技巧，希望读者能用较短时间加深对基本要求和重点的认识与理解，提高解题能力及分析问题的水平。

三、教材习题选解　对习题（A）组题中的较典型较难的题目作了解答，也是为提高读者分析问题与解决问题的能力。

书的最后，给出了除证明题外的全部（A）组题与(B)组题的全部答案，以备读者核对。

这本指导读物与教科书一样，适用于本专科生使用，只要求本科生掌握的内容前面，都印有记号※，不带记号※的内容，要求本、专科生都必需掌握，特提请读者在阅读时予以注意。

本书由张晓圃副教授、温惠林副教授任主编，封长安副

教授、金玲芳副教授任副主编，参加本书编写的还有董积祥副教授、沈长源副教授、张芸香副教授、李杰副教授、殷秀清副教授、张宝丽同志、王学敏同志、徐民同志、张姝同志和郑熙春同志，由于编者水平有限，错误与不妥之处在所难免、恳请读者批评斧正，以利改进与提高。

编　者

一九九四年四月

目　录

第一篇　微积分学

第二篇　线性代数与线性规划

第一篇　微积分学

第一章　函　　数

一、内容提要

（一）函数的概念

1．函数的定义　设在某一变化过程中，有两个变量x和y，如果对于变量x在某变化范围内所取的每一个值，按照某种规律f，变量y总有确定的值与它对应，则称y是x的函数，记作$y=f(x)$。其中x称自变量，y称因变量，自变量x的取值范围称作函数的定义域，因变量y相应的范围称作值域。

关于函数的定义，有几点需要注意．

（1）$f(x)$与$f(x_0)$不同。

$f(x)$表示将法则f施用于x，而x是可以取某一范围内所有可能的值，也就是说x是一个变量，$f(x)$给的是如何由一个变量确定出另一个变量；$f(x_0)$表示的是函数$y=f(x)$在x_0点的函数值，这里的x_0是一个定值．

（2）两个函数相等，不仅要求它们具有相同的函数关

系，而且还应有相同的定义域。

2. 函数的定义域　函数值

函数的定义域指的是自变量的取值范围，确定定义域有两个原则，对于实际问题，要符合问题的实际意义；对于不具有实际意义用公式表示的函数，只要自变量的取值能使函数关系式有意义就可以了.

函数值指的是将法则 f 施用定义域内某一个具体的值后的所得，也就是将函数关系式中的变量 x 用这个具体的值代替后的结果。

3. 分段函数

用两个或更多的数学式子表示两个变量 x 与 y 之间的对应关系时，函数称为分段函数。

分段函数的定义域是自变量 x 所能取值的各个区间段的总和；分段函数在某一点的函数值，应由这一点所在的区间对应的函数关系式决定。

（二）函数的几种特性

1. 单调性

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义，x_1、x_2 为 (a, b) 内任两点，如果当 $x_1>x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 (a, b) 内为单调增函数；如果当 $x_1>x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 (a,b) 内为单调减函数。

单调增函数，其图形沿 x 轴正向呈上升趋势；单调减函数，其图形沿 x 轴正向呈下降趋势.

函数单调性的判断除了可以用这个定义，还可以利用导数，这在后面会讲到。

2. 奇偶性.

定义在对称区间 $(-a, a)$ $(a>0)$ 上的函数 $y=f(x)$，

如果对于 $(-a, a)$ 内每一点 x 都满足 $f(-x)=f(x)$，称 $y=f(x)$ 为偶函数；如果满足 $f(-x)=-f(x)$，称 $y=f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

3. 周期性.

已知函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 a、使 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立，称 $f(x)$ 为周期函数. 使这个等式成立的最小正数 a 称为函数的周期.

周期函数的图形在周期间反复出现.

4. 有界性

如果存在一个正数 M，对于定义在 $(a、b)$ 内的函数 $y=f(x)$，无论 x 取何值，总有 $|f(x)|\leqslant M$，称 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内有界。

有界函数的图形夹在两条平行线之间.

（三）反函数　复合函数

1. 反函数

在函数 $y=f(x)$ 中，若将 y 看作自变量、x 看作因变量，则由 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称作 $y=f(x)$ 的反函数. $y=f(x)$ 称为直接函数.

一个函数与其反函数是互为反函数的. 它们的图形关于 $y=x$ 这条直线对称. 直接函数的定义域是其反函数的值域；直接函数的值域是其反函数的定义域.

2. 复合函数

如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且由 x 确定的 u 使 $f(u)$ 有定义，则称 y 通过中间变量 u 是 x 的复合函数. 记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 x 是自变

量。

如果把复合函数$y=f[\varphi(x)]$中的f称为外层函数，φ称为内层函数，并记$u=\varphi(x)$的值域为E，$y=f(u)$的定义域为D，则D与E的交集不能是空集，否则$y=f[\varphi(x)]$不存在。这一点应引起注意。

（四）初等函数

1．基本初等函数

常值函数$y=c$（c为常数）、幂函数$y=x^{\alpha}$（α为任意实数）、指数函数$y=a^{x}(a>0、a\neq1)$、对数函数$y=\log_{a}x$（$a>0，a\neq1$）、三角函数$y=\sin x$；$y=\cos x$；$y=\mathrm{tg}\,x$；$y=\mathrm{ctg}x$；$y=\sec x$；$y=\csc x$和反三角函数$y=\arcsin x$；$y=\arccos x$；$y=\mathrm{arc\,tg}x$；$y=\mathrm{arc\,ctg}\,x$，这六种函数统称为基本初等函数。

2．初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次函数复合所构成的并用一个式子表示的函数称为初等函数。

（五）建立函数关系

1．几个常用的经济函数

总成本函数　$c(x)=c_0+c_1(x)$，其中c_0是固定成本，x是产量，$c_1(x)$是可变成本。

总收益函数　$R(x)=px$（p为产品单价）

利润函数　$L(x)=R(x)-c(x)$

需求函数　$Q=f(p)$

供给函数　$x=s(p)$

2．建立函数关系的例子（略）

二、典型例题分析

例 1 下列结论有哪些是正确的?

(1) 函数 $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ 在 R 上表示同一函数;

(2) $y=arctg\dfrac{x}{2}$ 是一个基本初等函数;

(3) 没有既是奇函数又是偶函数的函数

(4) $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间[0.2,2]上是单调减函数

(5) 区间 $(x_0-\delta、x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ 表示以 x_0 为中心、以 δ 为半径的 x_0 点的 δ 邻域

解 (1) 错,因为 $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$ 的定义域是 $x\geqslant1$

而 $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant-1$.

(2) 错,$y=arctg\dfrac{x}{2}$ 是由 $y=arctgu$, $u=\dfrac{x}{2}$ 复合成的复合函数.

(3) 错 $f(x)=0$ 既是奇函数又是偶函数;

(4) ~~对 f(x)=0~~ [0.2 , 2]

(5) 对

例 2 求定义域

(1) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ (2) $y=\arcsin\lg\dfrac{x}{10}$

解 (1) 若 $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ 有意义,须有

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ \sin\sqrt{x}\geqslant 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geqslant 0 \\ 2k\pi\leqslant\sqrt{x}\leqslant(2k+1)\pi \\ \quad (k=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

即 $4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$

(2) 若 $y=\arcsin lg\dfrac{x}{10}$ 有意义，须有

$$\begin{cases} -1\leqslant lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1 \\ \dfrac{x}{10}>0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{10}\leqslant\dfrac{x}{10}\leqslant 10 \\ x>0 \end{cases}$$

即 $1\leqslant x\leqslant 100$。

例 3 设 $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$; $g(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

证明 (1) $f(x)=g(\sqrt{x^2+1}) \quad (x\geqslant 0)$

(2) $f(\sqrt{x^2-1})=g(x) \quad (x\geqslant 1)$

证明 (1) $g(\sqrt{x^2+1})=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(\sqrt{x^2+1})^2-1}$

$$=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1-1}$$

$$=\sqrt{x^2+1}+x \quad (x\geqslant 0)$$

$$=f(x)$$

(2) $f(\sqrt{x^2-1})=\sqrt{(\sqrt{x^2-1})^2+1}+\sqrt{x^2-1}$

$$=\sqrt{x^2-1+1}+\sqrt{x^2-1}$$

$$=x+\sqrt{x^2-1} \quad (x\geqslant 1)$$

$$=g(x)$$

例 4. 已知 $\varphi(x)=x^2$, $\psi(x)=2^x$

求 $\varphi[\varphi(x)]$; $\varphi[\psi(x)]$; $\psi[\varphi(x)]$;

$\psi(\psi(x))$.

解 $\varphi[\varphi(x)]=[\varphi(x)]^2=x^4$

$\varphi[\psi(x)]=[\psi(x)]^2$

$=(2^x)^2$

$=4^x$

$\psi[\varphi(x)]=2^{\varphi(x)}$

$=2^{x^2}$

$\psi[\psi(x)]=2^{\psi(x)}$

$=2^{2^x}$

例5. 已知

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & x\leqslant 1 \\ x+5 & x>1. \end{cases}$$

求 $f(x+a)$ (a 为常数)

解 若 $x+a\leqslant 1$，即 $x\leqslant 1-a$.

$f(x+a)=(x+a)^2+(x+a)$

$=x^2+(2a+1)x+a^2+a$

若 $x+a>1$ 即 $x>1-a$

$f(x+a)=(x+a)+5$

$=x+(a+5)$

于是

$$f(x+a)=\begin{cases} x^2+(2a+1)x+a^2+a & x\leqslant 1-a \\ x+(a+5) & x>1-a \end{cases}$$

在分段函数求值时，必须首先找出自变量的取值所属的那个区间段，然后由相应的函数关系确定函数值

例 6 已知

$$f(x)=\begin{cases} 1+x & x<0 \\ 1 & x\geqslant 0 \end{cases}$$

求 $f[f(x)]$

解 由已知，有

$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x) & f(x)<0\\ 1 & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

那么，何时有 $f(x)\geqslant 0$？何时有 $f(x)<0$。

$$f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$$

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=1>0$。

当 $-1\leqslant x<0$，$f(x)=x+1\geqslant 0$

当 $x<-1$，$f(x)=x+1<0$

即当 $-1\leqslant x$，$f(x)\geqslant 0$

$x<-1$，$f(x)<0$

这样

$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x) & x<-1\\ 1 & -1\leqslant x\end{cases}$$

又，当 $x<-1$ 时，$f(x)=1+x$。

于是有

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x & x<-1\\ 1 & -1\leqslant x\end{cases}$$

这个题目的求解方法，是分段函数求复合函数时常用的手法。

例7 判定函数的奇偶性

(1) $f(x)=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$

(2) $f(x)=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$

解 (1) $f(-x)=(2+\sqrt{3})^{-x}+(2-\sqrt{3})^{-x}$