JIEXIFA
JIEPINGMIAN
JIHE

解析法解平面几何

池伯鼎　马长冰　倪木森

解析法解平面几何

池伯鼎　马长冰　倪木森

福建人民出版社

解析法解平面几何

池伯鼎　马长冰　倪木森

*

福建人民出版社出版

（福州得贵巷27号）

福建省新华书店发行

福建新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　2.75印张　61.7千字

1981年6月第1版

1981年6月第1次印刷

印数：1—11,250

书号：7173·447　　定价：0.23元

内 容 简 介

本书以简练的语言较为系统地阐述了用解析法解决平几问题的基本方法和步骤。全书共分为解析法的基础知识，证明与计算和求点的轨迹初步知识三个部分。书中的例题除了用解析法解外，还附有平几解法或三角解法的简要提示，以便读者对照参考，使知识融会贯通。多数例题在解题之前，都先进行思路分析，找出解题途径。每个部分附有一定数量的练习题。

写 在 前 面

平面几何是研究平面上图形的量的关系和相互位置关系的，它产生于古代测量土地、土木工程等生产实践。

最初，几何没有从算术中划分出来，几何问题在计算上同时也是算术问题。经过漫长的岁月，几何逐渐有了丰富的内容。公元前三世纪，希腊数学家欧几里得进行了整理，写成一本叫做《原本》的书，几何才开始被表述为具有比较严密系统的学科。因此，古代的几何学就被人们称作“欧氏几何”，它的系统现在仍被采用着。

不过，现在我们解答几何问题，除了用经典方法以外，还可以用三角和代数的方法。代数法也就是通常所说的解析法（或坐标法），它是十七世纪初发展起来的。解析法在采用坐标方法的基础上，运用代数方法来研究几何问题。

解析法解平面几何的基本思想就是：选取适当的平面坐标系*，根据所给图形的几何条件，确定图形上有关点的坐标及有关曲线的方程，再通过对点的坐标及曲线方程的计算达到解题的目的。简要地说，就是：用坐标法把几何问题归结为代数问题。

掌握解析法解平几问题，有利于巩固数学基础知识，培养形数结合的观念，提高综合、沟通各科知识的能力。

限于我们的水平和经验，缺点、错误一定不少，请读者不吝指教。

编 者

1980. 10.

---

* 本书仅介绍平面直角坐标系。

目　录

第一章　解析法的基础知识

一　怎样选取适当的直角坐标系

在平面上，任意取定两条互相垂直的、且有公共原点与统一单位长的数轴，这两条数轴合在一起就构成一个平面直角坐标系。

建立直角坐标系后，平面上的点就可以用坐标来表示，平面上的曲线(如直线、线段、圆、圆弧等)也就可以用方程来表示。这样，有关平面几何的问题，便可化为点的坐标与曲线的方程的问题，用代数方法进行研究。

用解析法解平面几何的问题，由于是用代数方法通过对点的坐标及曲线的方程进行运算来解决的，因此解题过程的繁简在很大程度上取决于点的坐标与曲线方程的确定，也就是取决于坐标系的选取。为了使解题简捷，应该根据图形结构的特点，选取适当的坐标系，使有关的点的坐标、曲线的方程易于求得，并且形式简单。一般地说，若图形中有两条互相垂直的直线，则可分别取作X、Y轴；若图形是轴对称的，则可取对称轴为X轴或Y轴；若图形中含有圆，则可取圆心为原点。下面，我们就一些常见的图形，介绍选取坐标系的一般方法。

1．三角形

(1) 任意三角形

对于任意三角形ABC，可以选取点A为原点，直线AB为X轴建立直角坐标系（图1—1）。

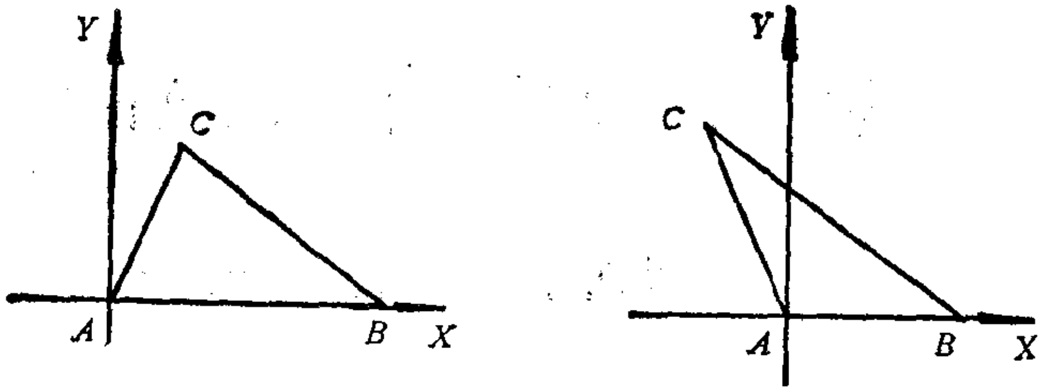

图 1—1

这时，点A的坐标为（0，0），B、C两点的坐标可分别设为（c，0）、（m，h）。

由于我们常把$\triangle ABC$三个内角A、B、C所对的边用a、b、c表示，因此，点B、C的坐标也可分别设为（c，0）、（$b\cos A$，$b\sin A$）。

若$\triangle ABC$是不等边三角形，选取最大边所在直线为X轴，有时是比较方便的。

如果问题涉及$\triangle ABC$的某一边上的高，那么可以取这一边以及这一边上的高所在的直线为坐标轴建立直角坐标系（图1—2）。

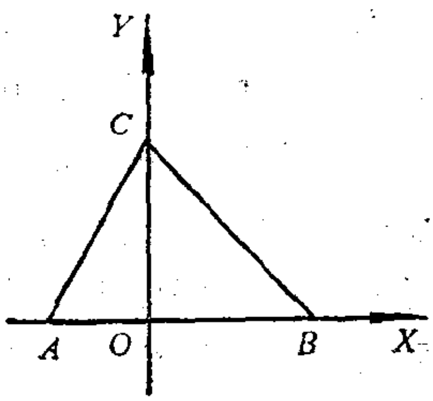

图 1—2

这时，A、B、C三点的坐标可分别设为（m，0）、（n，0）、（0，h）。

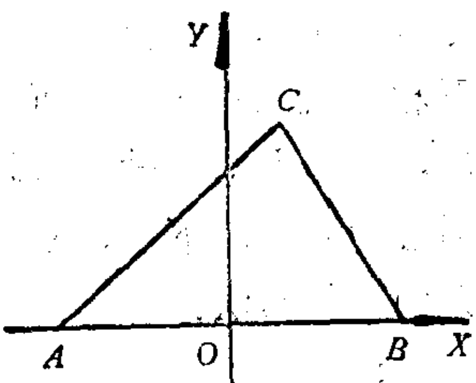

图 1—3

如果问题与$\triangle ABC$某一边的中点有关，或与某一边上的中线有关，那么可以选取这一边所

在直线为一坐标轴、这一边的中垂线为另一坐标轴，建立直角坐标系（图1—3）。

这时，点C的坐标可设为（m、h），A、B两点的坐标可分别设为（$-a$，0）、（a，0）。

（2）直角三角形

在$\triangle ABC$中，若$\angle C=90°$，则可以直线CA、CB为坐标轴建立直角坐标系（图1—4）。

这时，点C的坐标为（0，0），A、B两点的坐标可分别设为（b，0）、（0，a）。

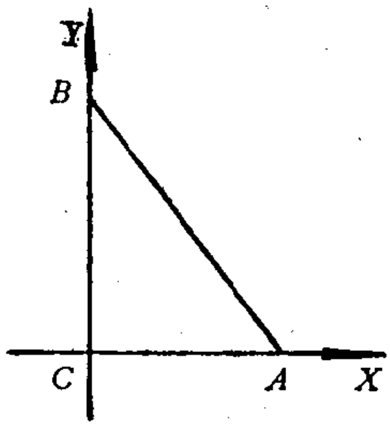

图 1—4

对于直角三角形，有时以斜边及斜边上的高所在直线为X、Y轴建立坐标系（图1—5），或者以斜边所在直线为X轴、斜边的中垂线为Y轴建立坐标系（图1—6）。

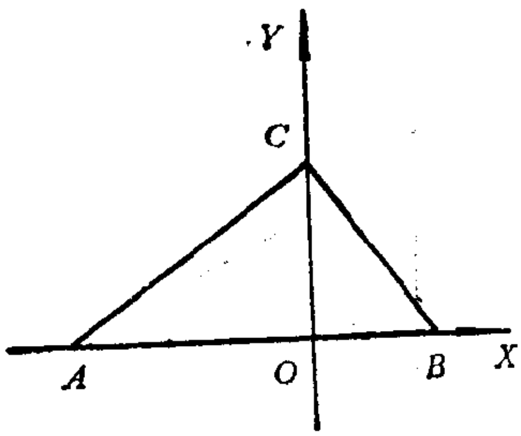

图 1—5

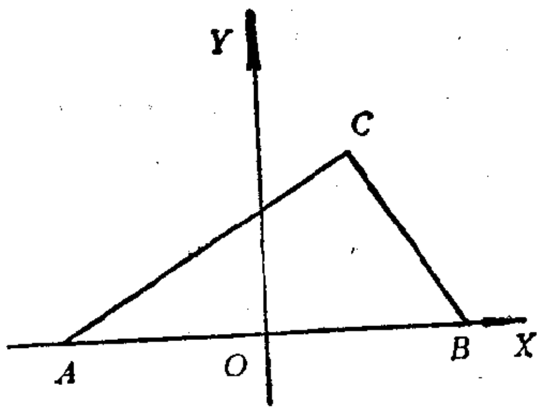

图 1—6

在图1—5的情况下，可设点A、B的坐标分别为（$-a$、0）、（b，0），则点C的坐标为（0，$\sqrt{ab}$）。

在图1—6的情况下，可设点A、B的坐标分别为（$-a$，

0），（a，0）。因为$|OC|=a$，$\angle COB=2\angle A$，因此点C的坐标为（$a\cos 2A$，$a\sin 2A$）。

（3）等腰三角形

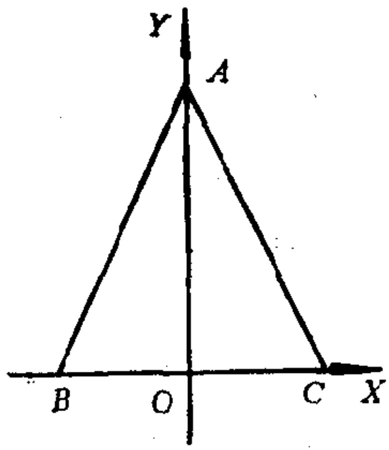

图 1—7

在$\triangle ABC$中，若$AB=AC$，则$\triangle ABC$是以底边BC上的高为对称轴的图形，因此，一般取底边BC及底边上的高所在的直线为坐标轴建立直角坐标系（图1—7）。

这时，B、C两点的坐标可分别设为（$-a$，0）、（a，0），A点的坐标设为（0，h）。

（4）等边三角形

若$\triangle ABC$是等边三角形，可以按等腰三角形的方法建立坐标系，不过设B、C两点的坐标为（$-a$，0）、（a,0）后，A点的坐标应该是（0，$\sqrt{3}a$）。

2.四边形

（1）任意四边形

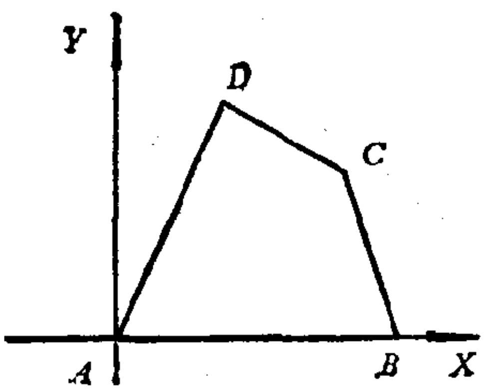

图 1—8

对于任意四边形$ABCD$，若$\angle A$为锐角，一般可取A为原点，直线AB为X轴建立直角坐标系（图1—8）。

这时，A的坐标为（0，0），B、C、D三点的坐标可分别设为（x_B，0）、（x_C，y_C）、（x_D，y_D）。

（2）梯形

对于梯形$ABCD$（$AB\parallel CD$），一般以下底AB所在直

线为X轴、A为原点建立直角坐标系（图1—9）。

这时，点A坐标为（0,0），可设点B的坐标为$(a,\ 0)$。因为$CD \parallel AB$，所以点C与点D的纵坐标相等，可设C、D的坐标分别为$(c,\ h)$、$(d,\ h)$。

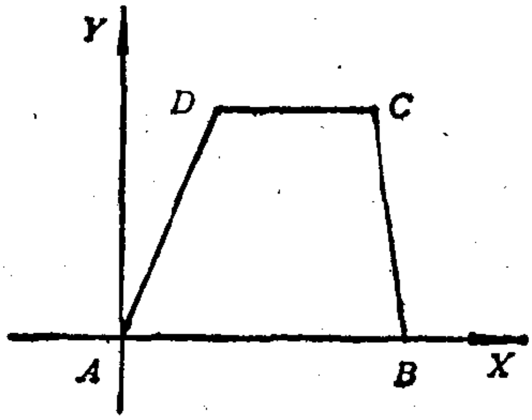

图 1—9

若$ABCD$是直角梯形（如$\angle A=90°$），则可取直线AB与直线AD为坐标轴建立坐标系（图1—10）；若$ABCD$是等腰梯形，则可取直线AB为X轴，两底中点连线为Y轴建立坐标系（图1—11）。

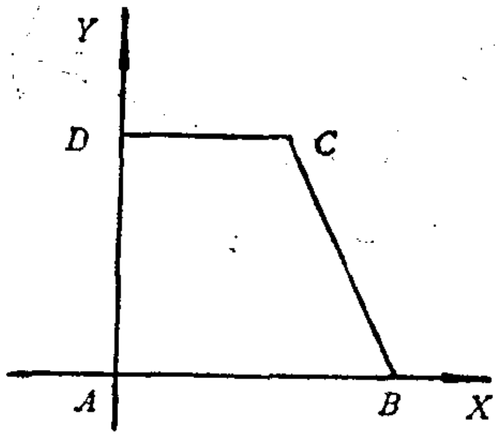

图 1—10

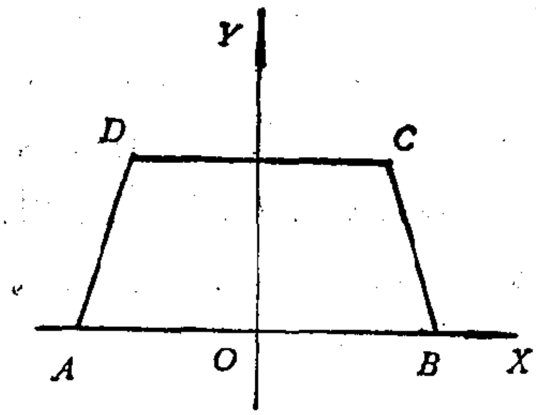

图 1—11

在图1—10的情况下，点A的坐标为（0，0），B、C、D三点的坐标可分别设为$(a,\ 0)$、$(b,\ h)$、$(0,\ h)$、在图1—11的情况下，四顶点的坐标可分别设为$A\ (-a,c)$、$B\ (a,\ 0)$、$C\ (b,\ h)$、$D\ (-b,\ h)$。

（3）平行四边形

对于▱$ABCD$，若$\angle A$为锐角，则可取A为原点、直线

AB为X轴建立直角坐标系（图1—12）。

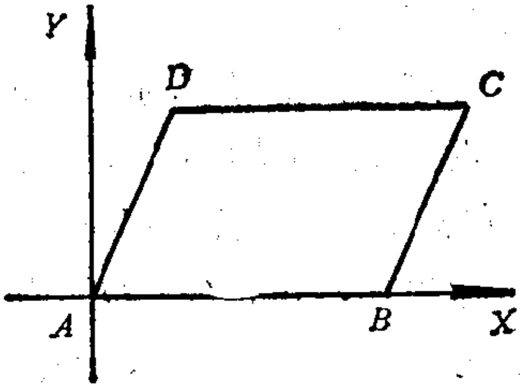

图 1—12

这时，点A的坐标为（0，0），可设点B、D的坐标分别为$(a,0)$和$(c、d)$，那么，点C的坐标为$(a+c, d)$。

如果问题与平行四边形的对角线有关，有时也可以取一条对角线所在直线为X轴，该对角线的中垂线为Y轴建立坐标系（图1—13）。

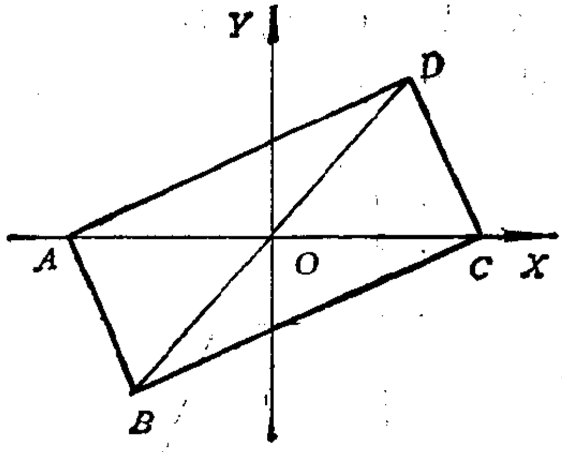

图 1—13

因为平行四边形对角线的两端点关于两对角线交点中心对称，所以可设点A、C的坐标分别为$(-a,0)$、$(a,0)$，点B、D的坐标分别为$(-b、-c)$、(b, c)。

（4）矩形和正方形

对于矩形或正方形$ABCD$，可以取相邻两边所在直线AB和AD为坐标轴建立直角坐标系（图1—14）。

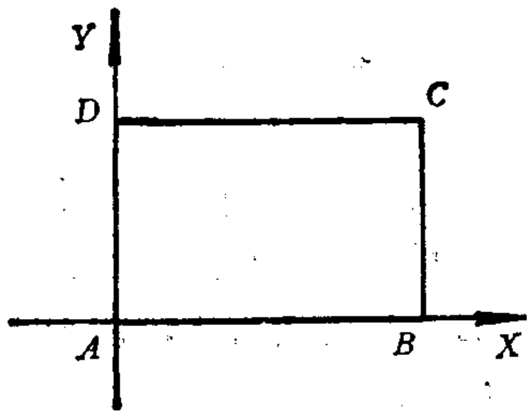

图 1—14

若$ABCD$是矩形，长与宽分别为a、b，则四顶点的坐标分别为$A(0,0)$、$B(a, 0)$、$C(a、b)$、$D(0,b)$；若$ABCD$是边长为a的正方形，则四顶点的坐标分别为$A(0, 0)$、B

$(a,0)$、$C\ (a,a)$、$D\ (0,a)$。

边长为a的正方形$ABCD$，还可以取两条对角线所在直线为坐标轴建立坐标系（图1—15）。

这时，四个顶点的坐标分别为$A\ (-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ 0)$、$B\ (0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a)$、$C(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0)$、$D(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}a)$。

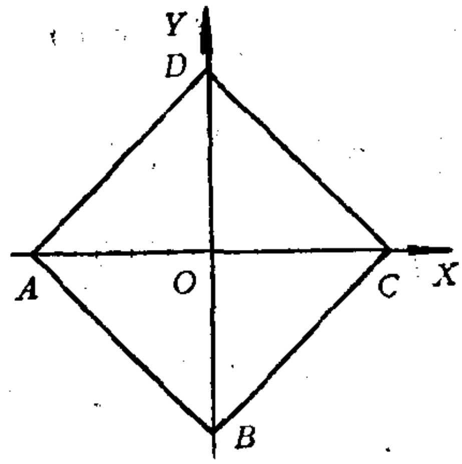

图 1-15

（5）菱形

因为菱形对角线互相垂直且互相平分，故一般以两对角线所在直线为坐标轴建立直角坐标系（图1—16）。

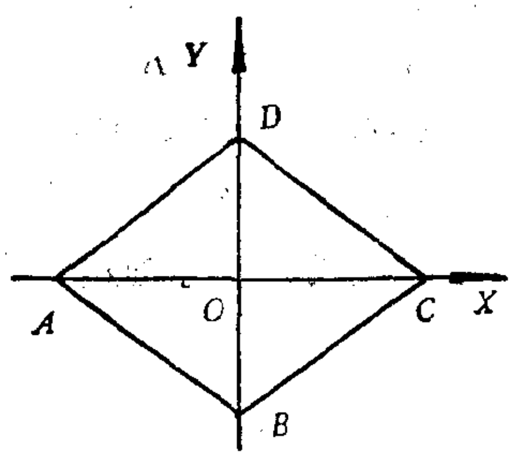

图 1—16

这时，四个顶点的坐标可分别设为$A(-a,\ 0)$，$B(0,\ -b)$，$C(a,0)$，$D(0,b)$。

3.正多边形

一般选取正多边形的中心（外接圆圆心）为原点，中心与一个顶点的连线为X轴建立直角坐标系（图 1—17）。

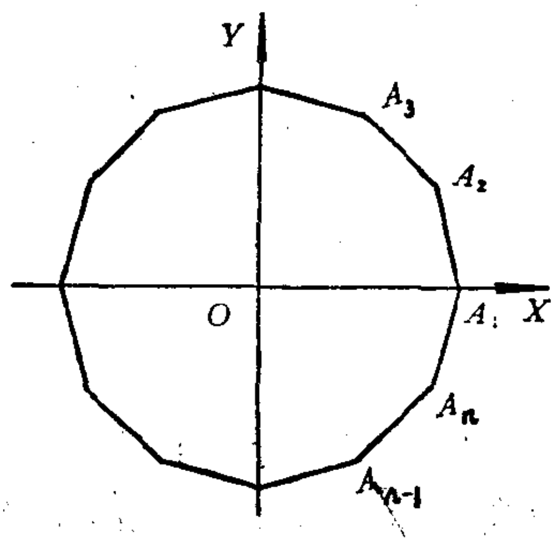

图 1—17

若正多边形$A_1A_2\cdots A_n$的外接圆半径是R，那么各顶

点坐标依次为$A_1(R,0)$、$A_2\left(R\cos\frac{360^\circ}{n}, R\sin\frac{360^\circ}{n}\right)$、

$A_3\left(R\cos\frac{2\times360^\circ}{n}, R\sin\frac{2\times360^\circ}{n}\right)$、…………、

$A_{n-1}\left(R\cos\frac{(n-2)360^\circ}{n}, R\sin\frac{(n-2)360^\circ}{n}\right)$、

$A_n\left(R\cos\frac{(n-1)360^\circ}{n}, R\sin\frac{(n-1)360^\circ}{n}\right)$。

4.圆

对于圆，一般都是取圆心为原点，取直径为坐标轴建立直角坐标系（图1—18）。

若圆的半径为R，则圆上任意一点P的坐标可设为（$R\cos\theta$，$R\sin\theta$），其中，θ是OX到OP的夹角。

若问题涉及圆的切线，有时也可取切线及过切线的直径所在的直线为坐标轴建立坐标系（图1—19）。

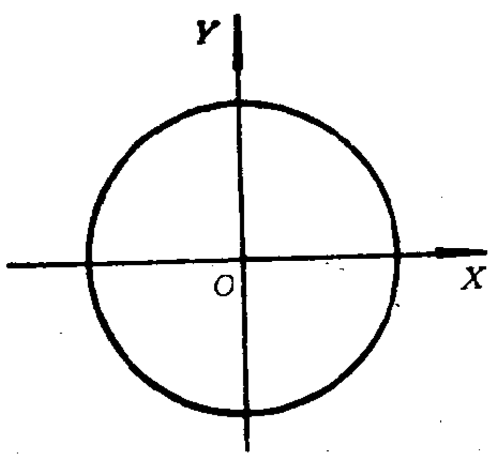

图 1—18

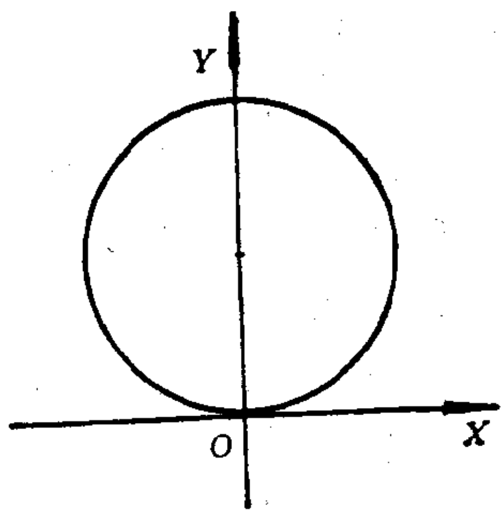

图 1—19

以上我们介绍了对平面几何中常见的一些基本图形选取直角坐标系的方法，如果所给的图形是由几个基本图形复合而成的，一般以比较复杂的基本图形为主考虑怎样建立坐标

系。当然，最重要的是，应该根据已知图形的几何性质和特征建立适当的坐标系。

然而，所选取的坐标系是否最适当，也不是绝对的、唯一的，有的问题可能有几种建立坐标系的方法，它们各有优缺点，对解题繁简的影响相异不大，那么我们任选其中一种就行了。

二 怎样确定曲线的方程

平面几何的图形都是由若干点和曲线（包括直线、线段、射线、圆、圆弧等）组成的。建立了直角坐标系后，平面上的点都有了确定的坐标，曲线也都有了确定的方程。在一定的坐标系下，曲线的方程可由曲线本身的性质推导出来。下面我们介绍直线的几种形式的方程，圆的方程以及与圆有关的直线的方程。*

1. 直线的方程

(1) 截斜式方程

如果一条直线的斜率为k，在Y轴上的截距为b，则直线的方程为

$$y=kx+b.$$

(2) 点斜式方程

如果一条直线过点$P(x_0,y_0)$，其斜率为k，则直线的方程为

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

* 本书略去了这些方程的推导过程，其详细的推导过程可参阅一般的解析几何教科书。

(3) 两点式方程

如果一条直线过$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$两点，且$x_1 \neq x_2$，则直线的方程为

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

方程中的$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$就是$A$、$B$两点连线的斜率。

如果$x_1 = x_2$，则直线平行于Y轴，它的方程具有比较简单的形式

$$x = x_1.$$

(4) 截距式方程

如果一条直线在X、Y轴上的截距分别为a、b，且$a \neq 0$，$b \neq 0$，则直线的方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

(5) 一般式方程

任何一条直线的方程都可以写成

$Ax + By + C = 0$（A、B不同时为零）的形式。

在直线的一般式方程中，若$B \neq 0$，则可以把它化为截斜式方程

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

因此，直线$Ax + By + C = 0$（$B \neq 0$）的斜率是$-\frac{A}{B}$，在Y轴上的截距是$-\frac{C}{B}$。

若$B = 0$，则直线垂直于X轴，直线的斜率不存在。

(6) 参数方程

若直线过点$P(x_0, y_0)$，倾斜角为α，则直线的参数方

程为

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\sin\alpha. \end{cases} \quad (t\text{为参数})$$

t的绝对值是直线上与t对应的点到点P的距离。直线上的点若在点P的上方，则$t>0$；若在点P的下方，则$t<0$。

例1 如图，直角梯形$ABCD$中，下底$AB=4$，高$AD=2$，$\angle ABC=60°$。分别以AB、AD所在的直线为X、Y轴建立直角坐标系，求腰BC和对角线BD所在直线的方程。

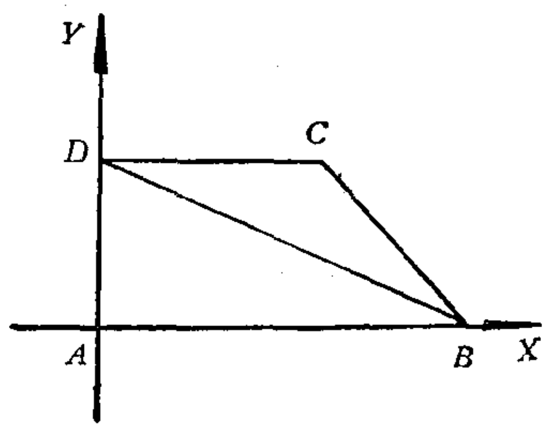

图 1—20

解 由题设知B、D两点的坐标分别为$(4,0)$、$(0,2)$。又直线BC的倾斜角为$120°$（$\angle XBC=180°-60°=120°$），由点斜式方程得腰BC所在直线方程为

$$y-0=\mathrm{tg}120°(x-4),$$

即
$$\sqrt{3}x+y-4\sqrt{3}=0.$$

由两点式方程可得对角线BD所在直线方程为

$$y-0=\frac{0-2}{4-0}(x-4),$$

即
$$x+2y-4=0.$$

〔也可由截距式方程得出直线BD的方程，因为BD在X、Y轴上的截距分别为4、2，所以直线BD的方程为

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1,$$

即
$$x+2y-4=0.$$〕