

# 尊里叶光学教程

黄婉云 编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

# 傅里叶光学教程

黄婉云 编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

**傅里叶光学教程**

黄婉云 编

\*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

天津黎明印刷厂印刷

\*

开本：850×1168 1/32 印张：9 字数：219千

1985年5月第1版 1985年5月第1次印刷

印数：1—9,000

统一书号：13243.63 定价：2.30元

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了傅里叶光学的基本理论和主要应用,对其数学基础作了简单明了的阐述,内容安排、文字表达力求适合教学要求,比较注意与普通物理光学知识的衔接和呼应,着重讲清物理概念。

本书可作为理工科物理、光学等专业的选修课或专业基础课教材,也可用作有关专业研究生的基础课教材,还可供从事应用光学、光学信息处理、光学全息、遥感技术等方面的研究人员参考。

# 前 言

用光学方法实现二维函数的傅里叶变换，在频率域中描述和处理光学信息，这是傅里叶光学的基本内容。傅里叶分析方法早在十九世纪末、二十世纪初便成功地应用于光学领域，具有代表性的是阿贝关于显微镜的两次成像理论和阿贝-波特实验。本世纪三十年代泽尼克发明的相衬显微镜是傅里叶光学早期的卓越成就。六十年代激光器出现以后，人们获得了相干性很好的新光源，使傅里叶光学得到迅速发展。大量遥感图象和医学图象的获得，使光学图象处理成为光学应用领域的重要内容。傅里叶光学已成为现代光学中具有广泛应用的新分支。

本书是根据编者在北京师范大学物理系几年来选修课讲义修改而成的。内容共分八章，第一章阐述了与傅里叶光学有关的常用的数学知识，在阐述时比较注意数学概念和运算与光学现象的结合，以有助于学习后面几章时能比较熟练地运用这些数学知识。第二章在阐明光场复振幅概念的基础上，着重分析了二维傅里叶变换在光学上的意义，这一章的基本思想贯穿全书始终，是比较重要的一章。第三、四两章阐述了标量衍射理论，在阐述时注意把衍射公式和傅里叶变换联系起来，以便能运用傅里叶变换公式及其性质去解决常见的衍射问题。透镜是光学系统的基本元件，傅里叶分析方法在光学中卓有成效的应用是与透镜能实现傅里叶变换分不开的。第五章比较全面地讨论了薄透镜的傅里叶变换性质。傅里叶光学的三个重要应用方面在最后三章分别讨论。这三章重点叙述应用原理，希望对从事不同方面实际工作的读者都能有所帮助。

本书是作为教材编写的，内容安排、习题选择及文字表达力求适合**教学**特点。本书可用作理工科本科高年级的选修课或专业基础课教材，也可用于有关专业研究生的基础课教材。

本书在编写过程中得到了北京师范大学物理系许多师生的支持。北京邮电学院徐大雄同志对全书作了细致的审阅并提出了宝贵的修改意见。西北工业学院刘木兴同志、重庆师范学院李廷芬同志、江西师范学院黄华惠同志在试用本教材中都提出了宝贵的意见和建议。北京师范大学物理系1983年光学教师进修班的同志们，也对本书提出了很多宝贵意见。乐寒梅同志绘制了全部插图。编者谨此一并致谢。

由于编者水平不高，实践经验不足，编写时间又比较仓促，书中错误和缺点一定不少，恳请广大教师和读者不吝指正。

编 者

1984年3月于北京

# 目 录

第一章	数学预备知识 .....	( 1 )
§ 1-1	几个常用函数 .....	( 1 )
§ 1-2	卷积 .....	( 5 )
§ 1-3	$\delta$ 函数 .....	( 11 )
§ 1-4	傅里叶级数 .....	( 17 )
§ 1-5	傅里叶变换 .....	( 22 )
§ 1-6	可分离变量函数的傅里叶变换 .....	( 30 )
§ 1-7	常用傅里叶变换对 .....	( 34 )
第二章	二维傅里叶分析 .....	( 41 )
§ 2-1	平面波和球面波的复振幅 .....	( 41 )
§ 2-2	光场中任一平面上的复振幅 .....	( 44 )
§ 2-3	二维傅里叶分析 .....	( 51 )
§ 2-4	线性系统和线性空不变系统 .....	( 55 )
第三章	衍射理论基础 .....	( 63 )
§ 3-1	衍射现象和惠更斯-菲涅耳原理 .....	( 64 )
§ 3-2	基尔霍夫衍射公式 .....	( 67 )
§ 3-3	基尔霍夫衍射公式的讨论和瑞利-索末菲衍射公式 .....	( 75 )
§ 3-4	叠加积分和惠更斯-菲涅耳原理 .....	( 80 )
§ 3-5	衍射公式在频率域中的表述 .....	( 82 )
§ 3-6	非单色光场的衍射公式 .....	( 87 )
第四章	菲涅耳衍射、夫琅和费衍射和傅里叶变换 .....	( 94 )
§ 4-1	菲涅耳衍射和夫琅和费衍射的划分 .....	( 94 )
§ 4-2	夫琅和费衍射 .....	( 101 )
§ 4-3	菲涅耳衍射 .....	( 115 )

第五章	透镜的傅里叶变换特性 .....	(123)
§ 5-1	光波通过薄透镜后的位相变化 .....	(123)
§ 5-2	透镜的傅里叶变换特性 .....	(129)
§ 5-3	透镜孔径对透镜傅里叶变换的影响 .....	(139)
第六章	光学成像系统的传递函数 .....	(145)
§ 6-1	透镜、衍射受限系统的点扩展函数 .....	(145)
§ 6-2	相干照明下衍射受限系统的成像规律 .....	(153)
§ 6-3	衍射受限系统的相干传递函数 .....	(157)
§ 6-4	非相干照明下的物像关系 光学传递函数 .....	(165)
§ 6-5	对于光学传递函数的讨论 .....	(174)
§ 6-6	有像差系统的传递函数 .....	(181)
第七章	光学全息 .....	(187)
§ 7-1	全息照相原理概述 .....	(187)
§ 7-2	菲涅耳全息图 .....	(190)
§ 7-3	像全息 .....	(193)
§ 7-4	彩虹全息 .....	(202)
§ 7-5	傅里叶变换全息 .....	(208)
§ 7-6	全息干涉计量 .....	(217)
§ 7-7	全息光学元件 .....	(225)
第八章	光学信息处理 .....	(237)
§ 8-1	用相干系统实现的基本运算 .....	(238)
§ 8-2	阿贝-波特实验和频率域处理举例 .....	(246)
§ 8-3	相关运算和特征识别 .....	(254)
§ 8-4	散斑现象及其应用举例 .....	(257)
§ 8-5	非相干光处理系统 .....	(264)
§ 8-6	白光信息处理概述 .....	(267)
§ 8-7	用非银盐记录介质实现黑白图象假彩色化 .....	(271)



# 第一章 数学预备知识

以后各章要用到的一些数学知识，主要内容在本章叙述。内容的选择完全根据应用的需要，所以没有十分考虑数学上的系统性和严格性。这些内容所以单作一章而没有作为附录，主要原因有两个，首先，我们希望本章内容比一般附录阐述得更详细一点；其次希望有关数学概念和运算的引入能密切结合光学现象，这样有利于读者能较快地运用这些数学工具来处理光学问题。

## § 1-1. 几个常用函数

### 一、矩形函数

矩形函数是最常用的函数之一，它定义为：

$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \left| \frac{x-x_0}{a} \right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (1-1)$$

函数图象见图 1-1(a)。当  $x_0=0$ ,  $a=1$  时，矩形函数为  $\text{rect}(x)$ ，它以  $x=0$  对称，宽度为 1，高度为 1（见图 1-1(b)）。当自变量  $x$  代表时间变量时，光学中可以用它来描写照相机快门，定义式 (1-1) 中的  $|a|$  便是曝光时间。

二维矩形函数的定义是：

$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$$

$$= \begin{cases} 1 & \left| \frac{x-x_0}{a} \right| \leq \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{y-y_0}{b} \right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (1-2)$$

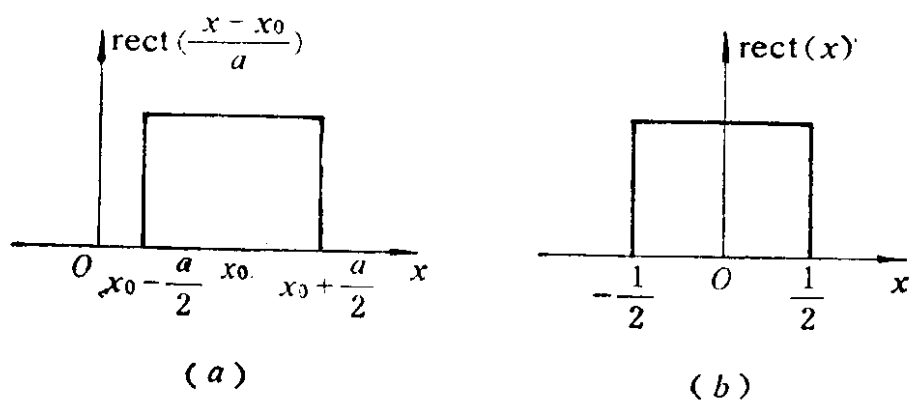


图 1-1

图 1-2 是二维矩形函数，二维矩形函数可以用来描写不透明屏上矩形孔的透过系数。由式 (1-2) 描写的矩形孔长为  $|a|$ ，宽为  $|b|$ ，中心在  $x = x_0$ ， $y = y_0$  点。二维矩形函数还可以用来截取  $xy$  平面上一个矩形图象或是作为矩形光阑的数学表达式。无限大不透明屏上的单缝的透过率也可以用矩形函数来描述，若单缝以  $x = x_0$  为中心线，宽度为  $a$ ，则描述它透过率的函数  $f(x, y)$  可写作

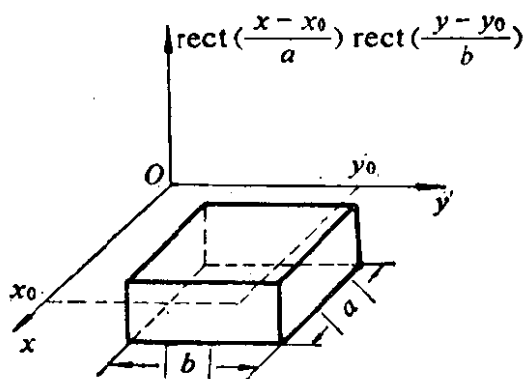


图 1-2

$$f(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)$$

## 二、sinc 函数

sinc 函数定义为

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{x-x_0}{h}\right) = \frac{\sin\left(\pi \frac{x-x_0}{b}\right)}{\pi \frac{x-x_0}{b}} \quad (1-3)$$

由上式定义的 sinc 函数在  $x = x_0$  处有最大值，其值为 1，两个第一级零值之间的宽度（称为 sinc 函数的主瓣宽度）为  $2|b|$ ，显然该宽度随着  $|b|$  的减小而减小。在普通物理光学中，我们已经知道单缝夫琅和费衍射的振幅分布函数是 sinc 函数，并且主瓣宽度与缝宽成反比。sinc 函数和矩形函数（单缝）之间的这一紧密联系，使 sinc 函数在傅里叶变换中经常用到。对于  $x_0 = 0$ ， $b = 1$  的情况，式 (1-3) 记作  $\operatorname{sinc}(x)$ ，它的函数值可在数学用表上查到，图象如图 1-3 所示。

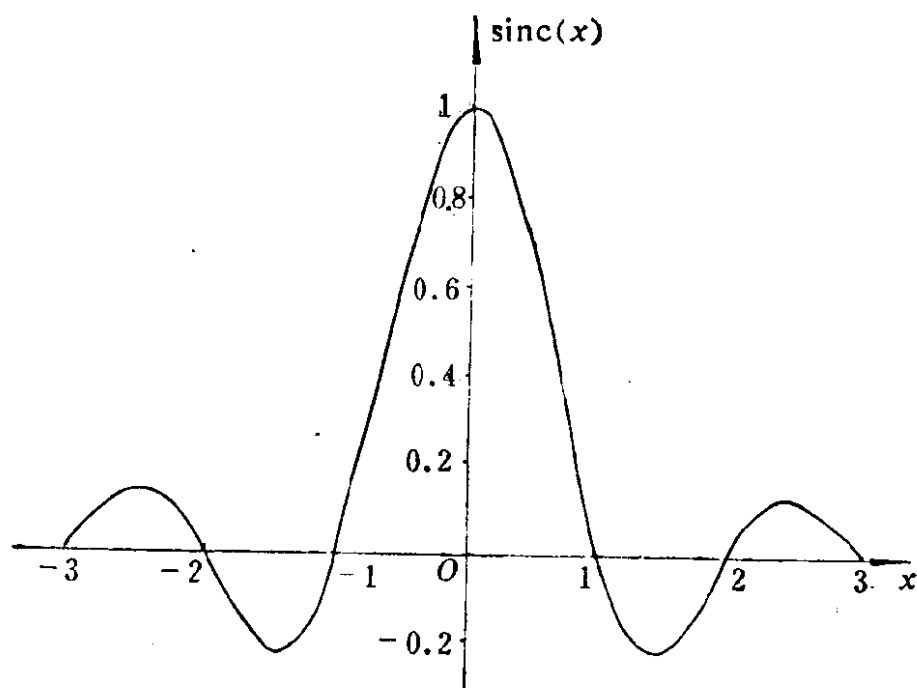


图 1-3

### 三、符号函数

符号函数(图 1-4(a))  $\operatorname{sgn}(x)$  定义为

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

#### 四、三角函数

三角函数(图 1-4(b))  $\Lambda(x)$  定义为

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

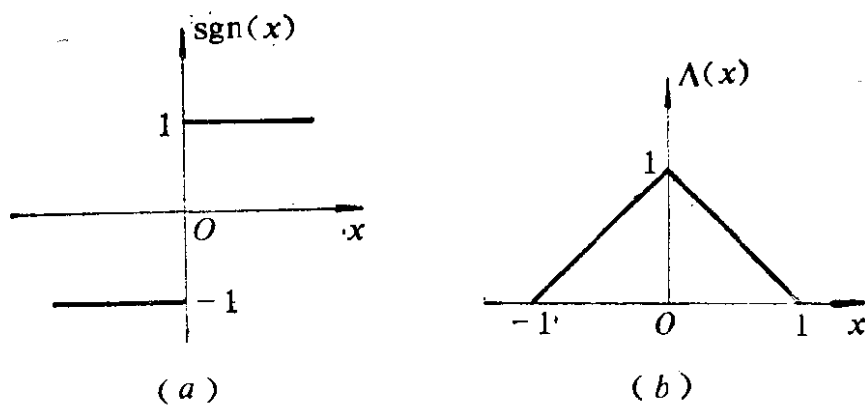


图 1-4

#### 五、圆域函数

圆域函数(图 1-5)在直角坐标中写成  $\operatorname{circ}(\sqrt{x^2 + y^2})$ , 在极坐标中写作  $\operatorname{circ}(r)$ , 它的定义是

$$\operatorname{circ}(r) = \operatorname{circ}(\sqrt{x^2 + y^2}) = \begin{cases} 1 & r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1-4)

它用来描写无限大不透明屏上圆孔的透过率函数。circ( $r$ )描写的是中心在原点半径为1的圆孔。中心在 $(x_0, y_0)$ 半径为 $a$ 的圆孔可用函数 $f(x, y)$ 描写

$$f(x, y) = \text{circ} \left[ \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{a} \right]$$

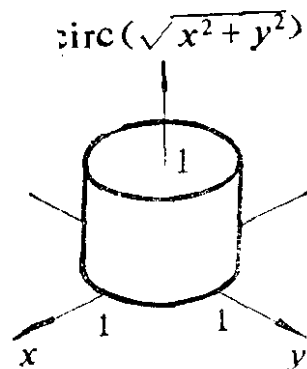


图 1-5

## § 1-2 卷 积

### 一、概念引入

首先讨论一个光学问题。图 1-6 中  $L_1$  和  $L_2$  是两个焦距都为  $f$  的透镜， $L_1$  和  $L_2$  之间放入缝宽为  $a$  的单缝（如图）。在  $L_1$  的前焦面上有一灯丝像，它与  $x_0$  方向一致，其强度分布为  $I_0(x_0)$ ，通过系统后，求像平面（ $L_2$  的后焦面）上的强度分布。显然这是

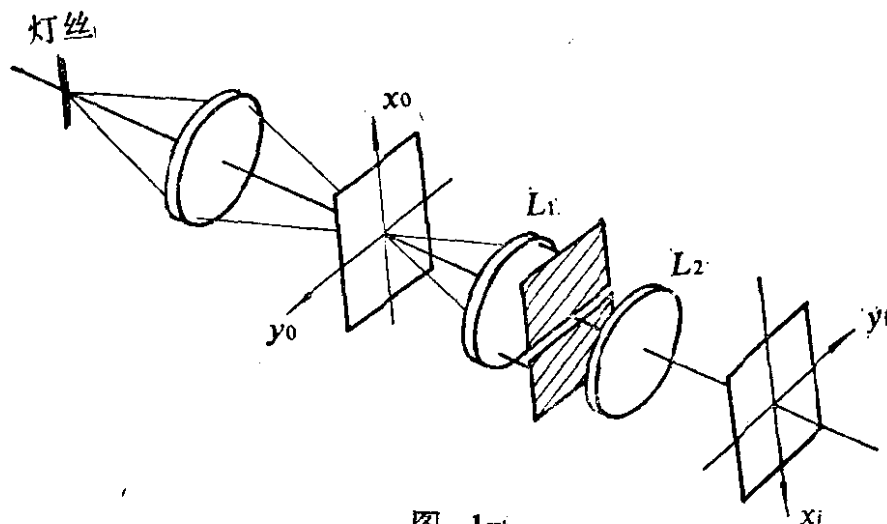


图 1-6

单缝夫琅和费衍射问题。根据单缝夫琅和费衍射的强度公式， $x_0 = 0$  处的点光源  $I_0(0) \Delta x_0$  通过系统后的像强度分布  $\Delta I_i(x_i)$

为

$$\Delta I_i(x_i) = I_0(0) \Delta x_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda}}{\left( \frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda} \right)^2}$$

其中  $\varphi = \tan^{-1}(x_i/f)$ 。位于  $x_0$  处的点光源  $I_0(x_0) \Delta x_0$  经过系统后得到的像强度分布  $\Delta I_i(x_i, x_0)$  为

$$\Delta I_i(x_i, x_0) = I_0(x_0) \Delta x_0 \frac{\sin^2 \left[ \frac{\pi a}{\lambda} (\sin \varphi - \sin \theta) \right]}{\left[ \frac{\pi a}{\lambda} (\sin \varphi - \sin \theta) \right]^2} \quad (1-5)$$

公式 (1-5) 是斜入射情况下单缝夫琅和费衍射的强度公式，其中  $\theta = \tan^{-1}(x_0/f)$ 。如果只讨论近轴条件下图 1-6 的像强度分布，则公式 (1-5) 可简化为

$$\Delta I_i(x_i, x_0) = I_0(x_0) \Delta x_0 \frac{\sin^2 \left[ \frac{\pi a (x_i - x_0)}{\lambda f} \right]}{\left[ \frac{\pi a (x_i - x_0)}{\lambda f} \right]^2} \quad (1-6)$$

公式 (1-6) 表示  $x_0$  处点光源  $I_0(x_0) \Delta x_0$  通过系统后的像强分布。它对于满足近轴条件的一切  $x_0$  都是成立的。它表明，位于不同  $x_0$  处的点光源，除  $I(x_0) \Delta x_0$  可能不同以外，通过系统后它们所得的强度分布“形式”是一样的。若  $x_0 = 0$  处的单位强度的点光源对应的像强度分布为

$$P(x_i) = \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi a x_i}{\lambda f} \right)}{\left( \frac{\pi a x_i}{\lambda f} \right)^2}$$

则  $x_0$  处单位强度点光源对应的像强度分布为  $P(x_i - x_0)$ ，它只

是  $P(x_i)$  在  $x_i$  方向上平移了  $x_0$ 。公式 (1-6) 可用  $P(x_i)$  表示为

$$\Delta I_i(x_i, x_0) = I_0(x_0) \Delta x_0 P(x_i - x_0)$$

物平面上的线光源上的每一点，都会在像平面上形成一个确定的强度分布。因为线光源上各点之间是完全不相干的，所以各点在像平面上得到的光强分布之间也是完全不相干的，这样，像平面上某一点  $x_i$  处的总强度  $I_i(x_i)$  应该是所有这些强度分布在该点所取值之和（非相干叠加）。于是  $I_i(x_i)$  可表示为

$$I_i(x_i) = I_0(0) \Delta \xi P(x_i) + I_0(\xi_1) \Delta \xi P(x_i - \xi_1) \\ + I_0(\xi_2) \Delta \xi P(x_i - \xi_2) + \dots$$

当  $\Delta \xi \rightarrow 0$ ， $\xi$  取遍所有的  $x_0$ ， $I_i(x_i)$  可用积分式表示为

$$I_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(\xi) P(x_i - \xi) d\xi \quad (1-7)$$

积分式 (1-7) 这种运算便是  $I_0(x)$  对  $P(x)$  的卷积运算。

## 二、卷积定义

函数  $f(x)$  和  $h(x)$ ，其卷积运算用符号  $f(x) * h(x)$  表示，定义为如下积分

$$f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) h(x - \xi) d\xi \quad (1-8)$$

光学图象大多是平面图象，用二维函数表示。傅里叶光学中的卷积运算大多是二维函数的卷积，二维函数  $f(x, y)$  和  $h(x, y)$  的卷积表示为

$$f(x, y) * h(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \quad (1-9)$$

如果  $f(x, y)$  和  $h(x, y)$  描述的是两个真实的光学量，则  $f(x, y) * h(x, y)$  总是存在的。

## 三、卷积的性质及例题

### 1. 卷积符合交换律，即

$$f(x, y) * h(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

证明：由公式 (1-9)

$$f(x, y) * h(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

令  $\xi' = x - \xi$ ,  $\eta' = y - \eta$ , 则

$$\begin{aligned} f(x, y) * h(x, y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi', y - \eta') h(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \\ &= h(x, y) * f(x, y) \end{aligned}$$

2. 卷积满足线性运算。

设函数  $f(x, y)$ 、 $h(x, y)$  和  $g(x, y)$ ,  $a$ 、 $b$  为任意常数,

则

$$\begin{aligned} [af(x, y) + bh(x, y)] * g(x, y) \\ = af(x, y) * g(x, y) + bh(x, y) * g(x, y) \end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned} f(x, y) * [ah(x, y) + bg(x, y)] \\ = af(x, y) * h(x, y) + bf(x, y) * g(x, y) \end{aligned}$$

3. 卷积位移不变性。

若  $f(x, y) * h(x, y) = g(x, y)$

则  $f(x - x_0, y - y_0) * h(x, y) = g(x - x_0, y - y_0)$

证明：  $f(x - x_0, y - y_0) * h(x, y)$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi - x_0, \eta - y_0) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

令  $\xi' = \xi - x_0$ ,  $\eta' = \eta - y_0$ , 则

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi', \eta') h(x - x_0 - \xi', y - y_0 - \eta') d\xi' d\eta' \\ &= g(x - x_0, y - y_0) \end{aligned}$$



同理  $f(x, y) * h(x - x_0, y - y_0) = g(x - x_0, y - y_0)$

以上性质表明, 当  $f(x, y)$  和  $h(x, y)$  中任一函数在  $x, y$  方向分别平移  $x_0, y_0$  以后, 其卷积所得函数形状和大小不变, 只是在  $x, y$  方向上同样平移了  $x_0$  和  $y_0$ .

例 已知  $f(x) = \text{rect}(x)$ ,  $h(x) = \text{rect}\left(\frac{x-1}{2}\right)$

求:  $f(x) * h(x)$

$$\text{解: } f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\xi) \text{rect}\left(\frac{x-\xi-1}{2}\right) d\xi$$

根据公式 (1-1), 上式可写作

$$f(x) * h(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \text{rect}\left(\frac{x-\xi-1}{2}\right) d\xi$$

同样根据公式 (1-1) 有

$$\text{rect}\left(\frac{x-\xi-1}{2}\right) = \begin{cases} 1 & x-2 \leq \xi \leq x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

于是有:

$$-\infty \leq x \leq -\frac{1}{2} \quad f(x) * h(x) = 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad f(x) * h(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^x d\xi \\ = x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \quad f(x) * h(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\xi = 1 \quad ?$$

$$\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \quad f(x) * h(x) = \int_{x-2}^{\frac{1}{2}} d\xi$$