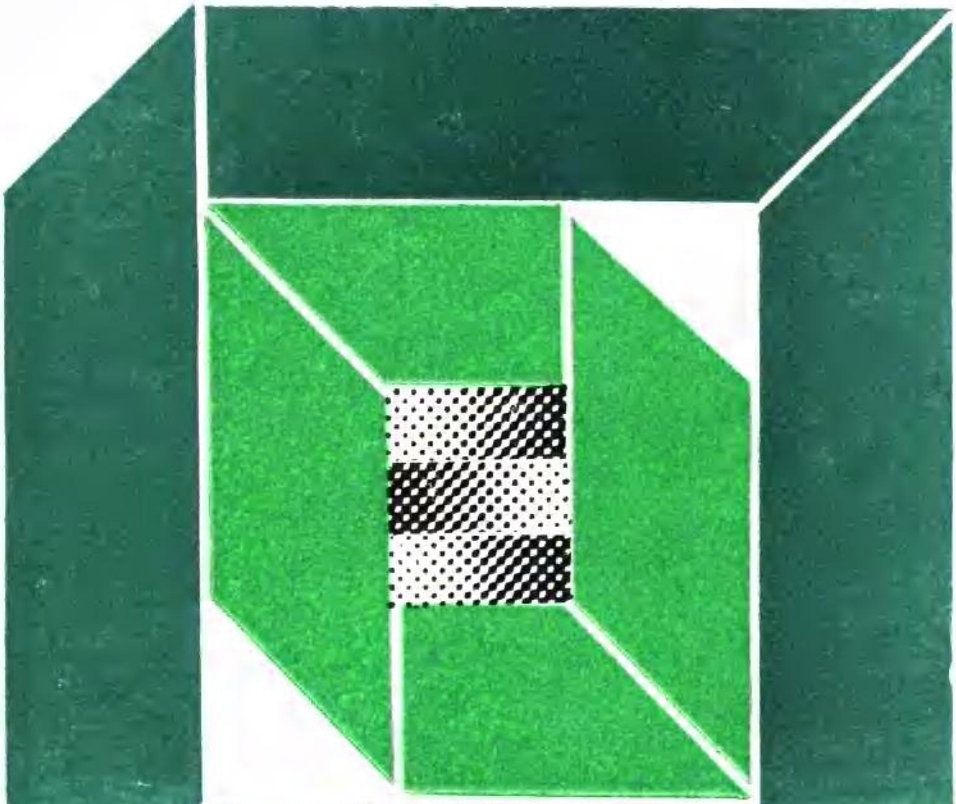
JI HE BIAN HUAN —— FANG FA YU XI TI

高等学校教学参考书

几何变换

——方法与习题

冉正立 主编



高等教育出版社

高等学校教学参考书

几何变换

——方法与习题

冉正立　主编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书内容包括几何变换概述，斜投影，考洛托夫、波比索夫二氏辅助投影法，亲似变换，透射变换，位似变换，平面场的异素对应，以曲线为投影线的投影，以曲面为投影面的投影，反演变换，二次变换等十一章。

本书经高等工业学校画法几何及制图课程教学指导委员会评审通过并推荐出版。编者以综合法叙述本书内容，为教师、工程技术人员、研究生及工科大学生提供了一本较为系统的、简明有用的参考书，并附有习题，有助于进一步深入研究。

（京）112号

高等学校教学参考书

几 何 变 换

——方法与习题

冉正立 主编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 13.75 字数 310 000

1992年5月 第1版 1992年 5 月 第1次印刷

印数 0001—2 673

ISBN 7-04-003094-2/TH·245

定价 7.45 元

前　言

几何变换是工程图学的一个重要分支。不少学者对各种几何变换方法的理论和应用进行了深入研究。编者以综合法著述此书，为教师、工程技术人员、研究生、大学生提供了一本较为系统的、简明有用的参考书。并附有习题，有助于进一步深入研究.、

本书由重庆大学冉正立主编，北京航空航天大学陈剑南教授主审。参加本书编写工作的还有郑长福、冯裕霞、李文祥同志。

由于水平有限，一定存在不少缺点和错误，请同志们批评指正。

编　者

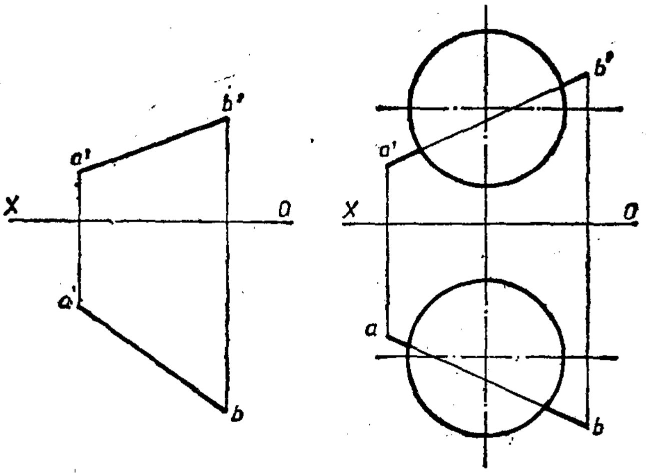
1989 年 6 月

目　　录

第一章 概 述

一、特殊与一般

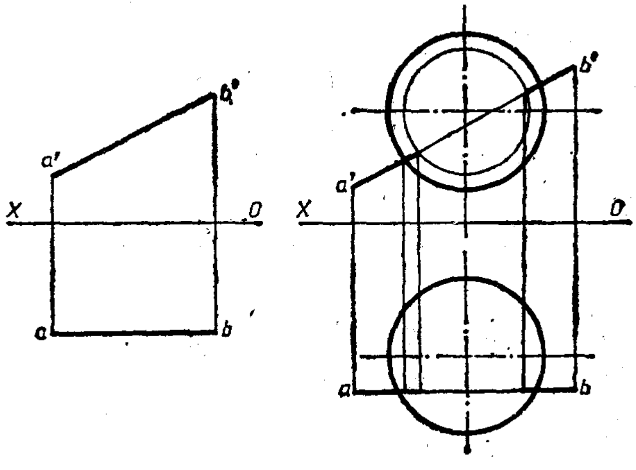
画法几何中的图解作图，包括定量、定位两类。如图 1-1a)所示，求直线 AB 的实长，为定量作图。如图 1-1b)所示，求直线 AB 与球面的交点，则为定位作图。



a) b)

图 1-1

由于点、线、面、体等几何元素相对于投影面的位置不同，以及各几何元素之间的相对位置或其形状不同，定量、定位问题的解决，其难易程度之差别是很大的。在图 1-1 中，直线 AB 相对于投影面处于一般位置，求 AB 直线的实长或者求直线 AB 与球面的交点，都必须进行一定的作图



a) b)

图 1-2

步骤，才能得出其结果。但在图 1-2a)中，直线 AB 为特殊位置直线，其正面投影 $a'b'$ 就反映实长。在图 1-2b)中，也因直线 AB 为特殊位置直线，求直线 AB 与球面的交点，就简单得多。

又如图 1-3 所示，求锥面与圆球表面的相贯线，尽管锥面的直素线为一般位置直线，但另一曲面为圆球，还是不难作出其相贯线。在图 1-4 中，除锥面外，另一曲面为椭圆抛物面，求作其相贯线就比较困难。

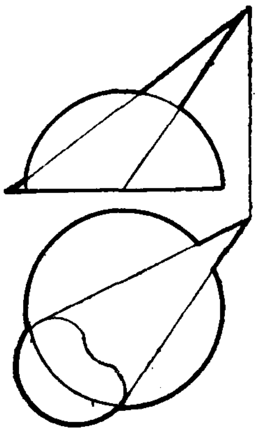


图 1-3

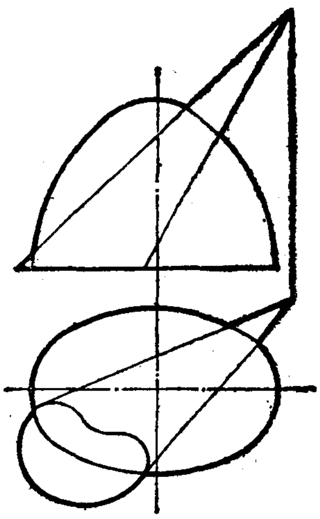


图 1-4

分析比较图 1-1 与图 1-2，可以看出，在图 1-2 中直线 AB 位置特殊，有利于解题。在图 1-3 中圆球表面形状特殊，也有利于解题，但对其他一些曲面，如椭球面、椭圆抛物面等，其作图就繁难得多。

由上所述，“特殊”有利于解题，“一般”困难多些。能不能找出“特殊”与“一般”的关系，把“一般”变换为“特殊”，在“特殊”情况下，进行作图，得出答案，再按原来的规律，反变换为“一般”情况，作出其解答呢？本书所述的几何变换，就可以解决这方面的一些有关作图问题。

二、几何变换及其研究意义

“对应”指客观事物的“存在”，而“变换”则是指客观事物的“转化”，是一种“运动”。既然是运动，就有方向性。如果把沿某一方向的运动称为变换，则其反方向的运动就叫反变换。在画法几何中，将某一物体向平面进行投影，画出其平面图形，实际上，就是根据一定条件，在两者之间进行变换。如果把空间物体投影为平面图形叫变换，那末，由平面图形“还原”（想像）成空间物体，则叫反变换。

几何元素之间的变换就叫几何变换，本书著述的几何变换方法有：斜投影，考、波二氏辅助投影法，亲似变换，透射变换，位似变换，异素变换，圆弧投影法，椭圆弧投影法，螺旋线投影法，以曲面为投影面的投影，反演变换，二次变换等的理论和方法等，并附有习题。研究这些方法有以下意义：

1. 为解题作图提供了灵活多样的方法。

如图 1-5 所示，求交叉二直线的距离，不仅可以用画法几何中常见的换面法、旋转法作图，也可以用本书所述的有关方法得到同样结果。

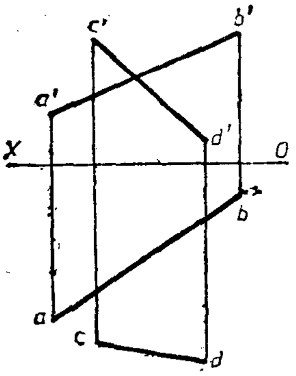


图 1-5

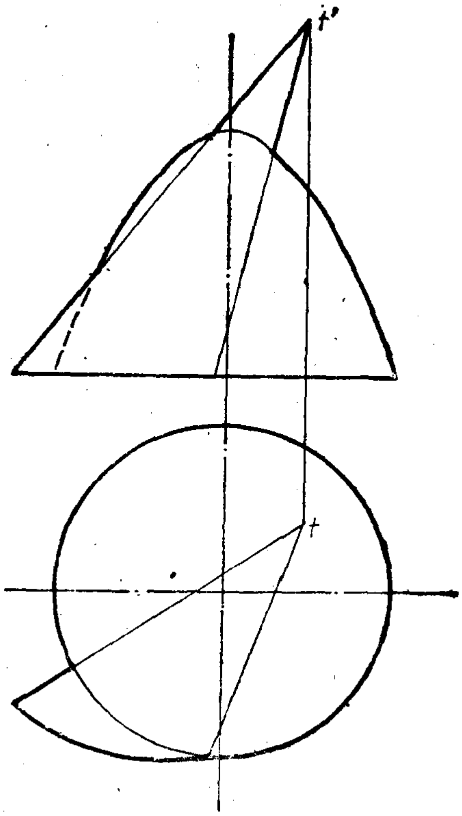


图 1-6

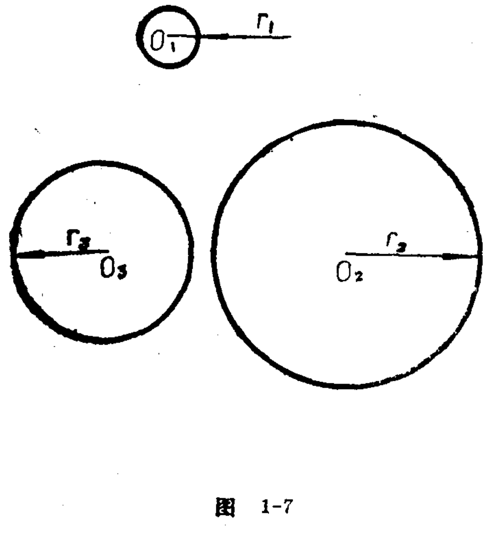


图 1-7

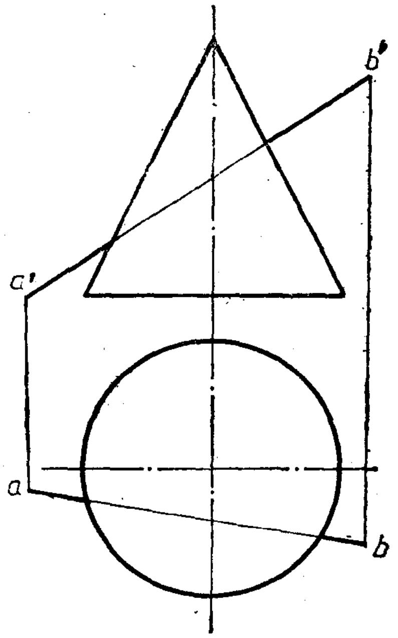


图 1-8

2. 为解某些难题提供了可能性

如图 1-6 所示，求锥面 T 与回转抛物面的截交线，用一般画法几何方法难于作出，而用本书所述之透射变换，加上换面法，即可准确地作出其截交线。

3. 为解某些工程实际问题提供理论根据

如图 1-7，设有三平行轴，轴心位置为 O_1、O_2、O_3，装有节圆半径为 r_1、r_2、r_3 的三个齿轮，拟设计一齿轮同时驱动三个齿轮，即可用本书所述之反演变换求得该齿轮的位置和节圆半径。

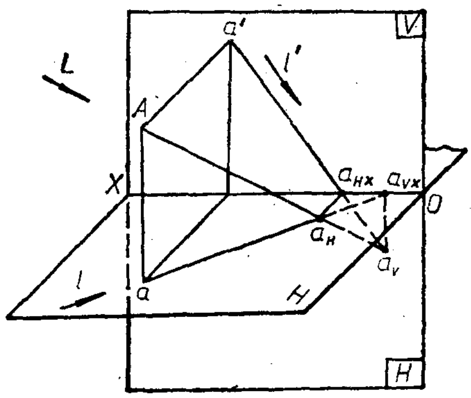
4. 对学生的能力培养有重要意义

如图 1-8，求直线 AB 与锥面的交点，若用画法几何中的素线平面法作图，即使其作图的全部图线不变，该图也可以理解为斜投影或亲似变换作图。这种不同概念的理解，概念上的融会贯通，思维的拓广，对学生的能力培养是有其重要意义的。

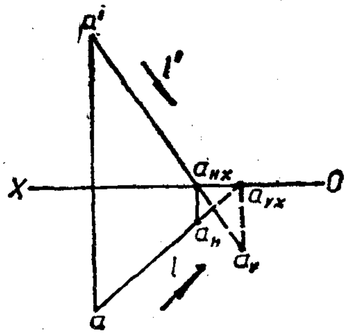
第二章　斜　投　影

一、在基本投影面 H 和 V 上的斜投影

如图 2-1 和图 2-2，空间有一点 A，其水平投影为 a，正面投影为 a'。若以直线 $L(l, l')$ 指示的方向为投影方向，使点 A 向水平投影面 H 和正面投影面 V 进行斜投影，则可得出其斜投影 a_H 和 a_V。

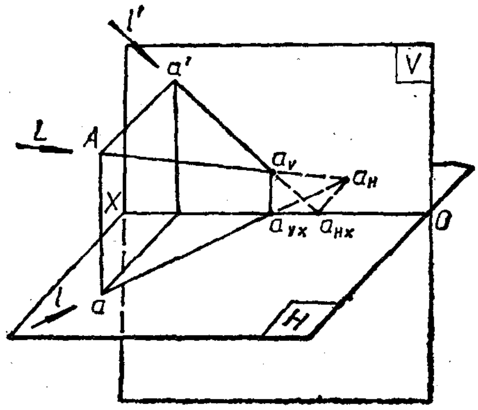


a)

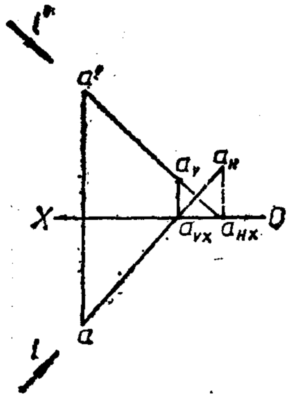


b)

图　2-1



a)



b)

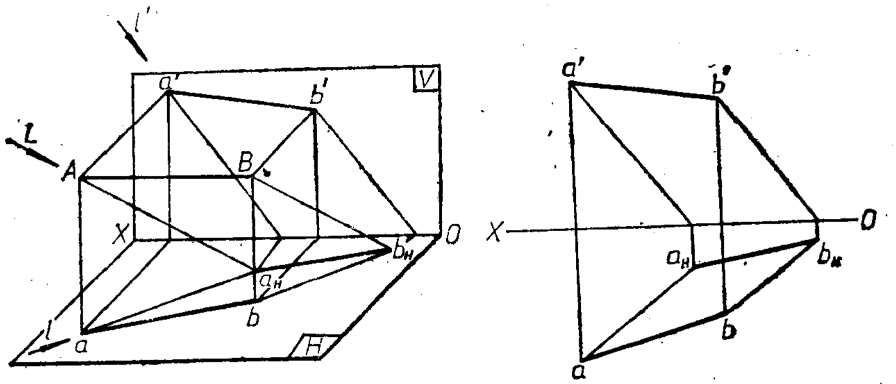
图　2-2

在图 2-1b) 中，过点 a'，平行于 l' 作直线与 OX 轴相交于点 a_{HX}，再过点 a_{HX} 垂直于 OX 轴作直线与过点 a 平行于 l 的直线相交，则可得出点 A 在 H 面上的斜投影 a_H。延长 aa_H 与 OX 轴相交于点 a_{VX}，再过点 a_{VX}，垂直 OX 轴作直线与 $a'a_{HX}$ 的延长线相交，则可得出点 A 在 V 面

上的斜投影 a_V。

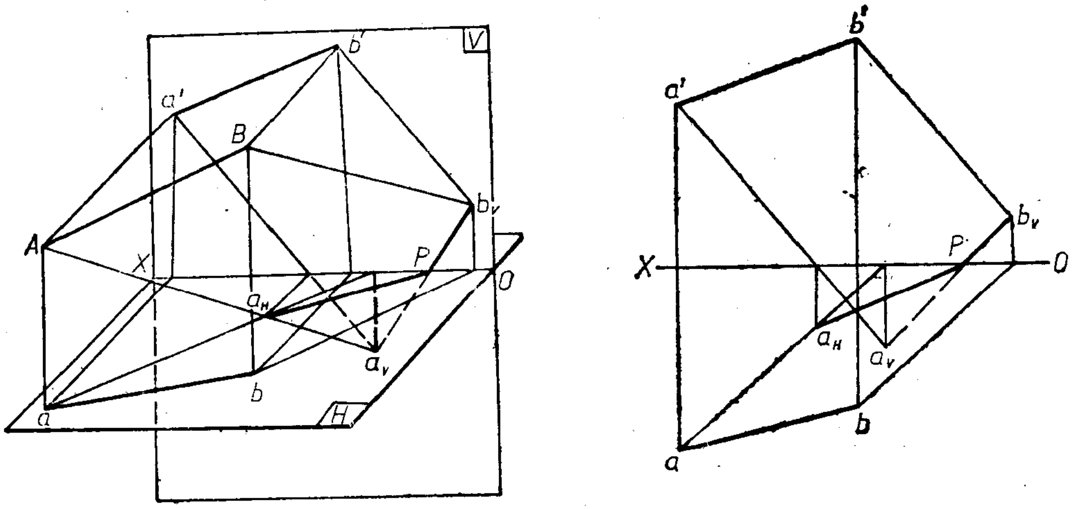
在图 2-2b)中，表示了 a_V、a_H 的另一个作图方法。

图 2-3 和图 2-4 表示了一般位置直线 AB 在 H 和 V 面上的斜投影作图。



a)　　b)

图 2-3



a)　　b)

图 2-4

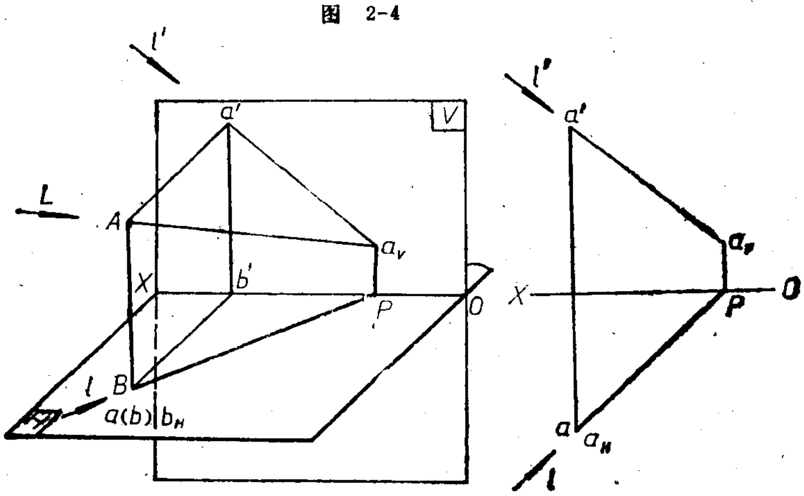


图 2-5

在图 2-4 中，直线 AB 在 H 和 V 面上的斜投影的可见部份成一折线 a_Hpb_V，其转折点 p，可以连接 a_Vb_V 或 a_Hb_H(图中未画出)与 OX 轴相交求得。这一折线，实际上就是一般所说的直线 AB 在 H 和 V 面上的落影。

图 2-5 给出了一铅垂直线 AB 在 H 和 V 面上的斜投影。

图 2-6 给出了一般位置直线 AB 在 H 面上的斜投影。因投影方向 L 平行于直线 AB，所以其斜投影重合为一点 a_Hb_H。

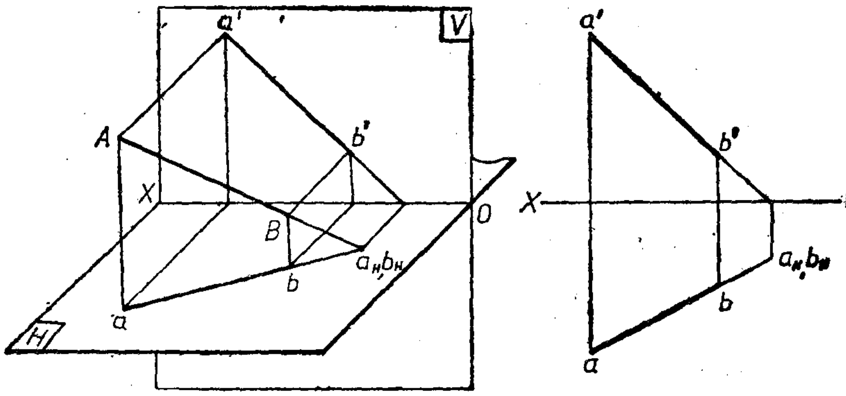


图 2-6

图 2-7、图 2-8、图 2-9 都是平面的斜投影。当投影方向平行于平面时，则其斜投影积聚为一直线，如图 2-9 所示。

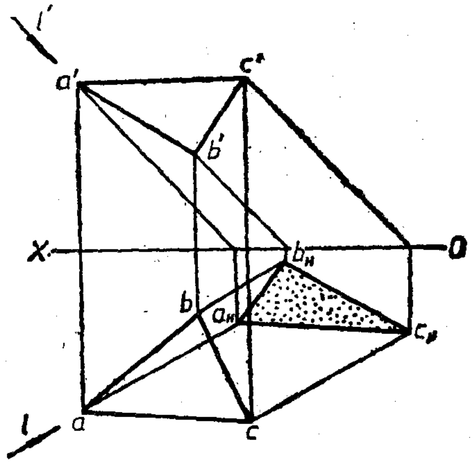


图 2-7

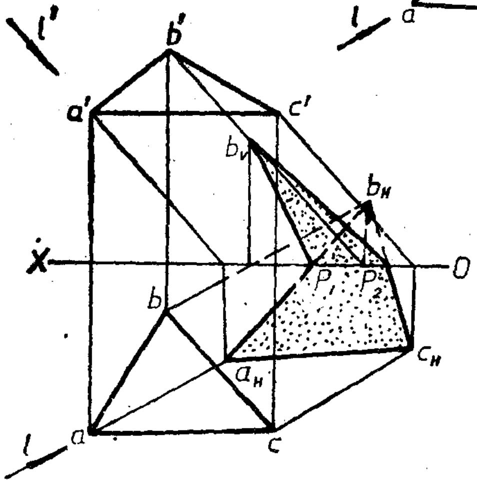


图 2-8

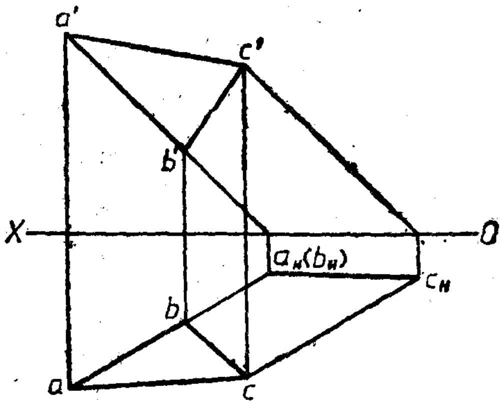


图 2-9

［例一］ 求直线 AB 与平面 $\square CDEF$ 的交点(图 2-10)。

解: 取斜投影方向 L 平行于平面 $\square CDEF$。使平面 $\square CDEF$ 在 H 或 V 面上之斜投影积聚为一直线，作出其交点的斜投影。之后，返回至正投影，即可作出其交点的水平投影和正面投影。

作图:

1. 取斜投影方向 L 平行于直线 DC;
2. 作出直线 AB 和平面 $\square CDEF$ 的斜投影 a_Hb_H 和 $c_Hd_He_Hf_H$;
3. 注出交点 k_H 之后，返回至正投影，即得所求交点 K 的水平投影 k 和正面投影 k'。

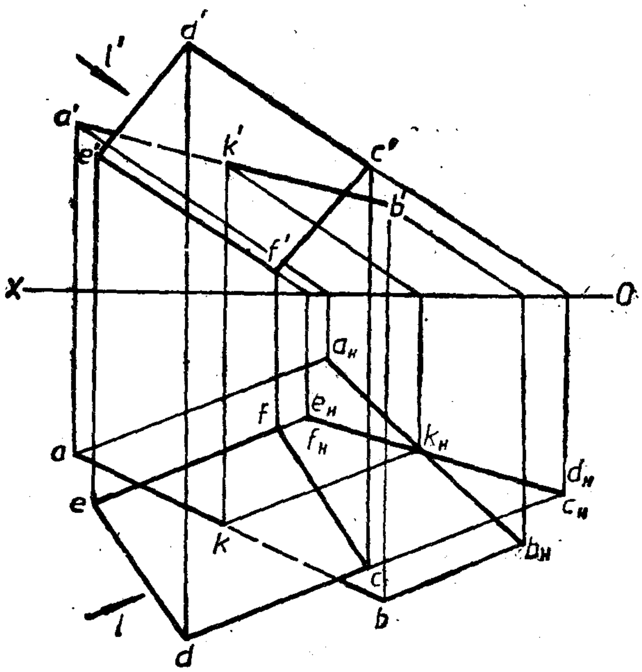


图 2-10

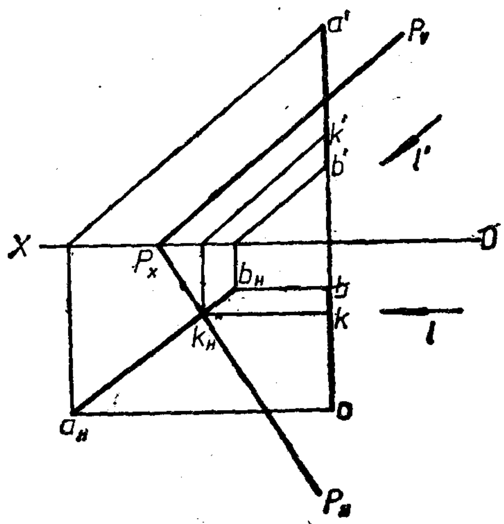


图 2-11

［例二］ 求侧平线 AB 与迹线平面 $P(P_H, P_V)$ 的交点(图 2-11)。

解: 取斜投影方向 L 平行于平面 P，使平面 P 在 H 或 V 面上的斜投影积聚为 P_H 或 P_V，作出交点的斜投影，返回至正投影，即可作出交点的水平投影和正面投影。

作图: 略。

［例三］ 求二平面 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的交线(图 2-12)。

解: 取斜投影方向平行于两个平面 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中的任一平面，向投影面 H 或 V 进行斜投影，使其中之一的平面(如图示 $\triangle DEF$)积聚为一直线 d_He_H，作出两个平面交线的斜投影。之后，返回至正投影，即可作出其交线的水平投影和正面投影。

作图:

1. 取斜投影方向 L 平行于直线 EF;
2. 作出平面 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的斜投影 $a_Hb_Hc_H$ 和 $d_He_Hf_H$;

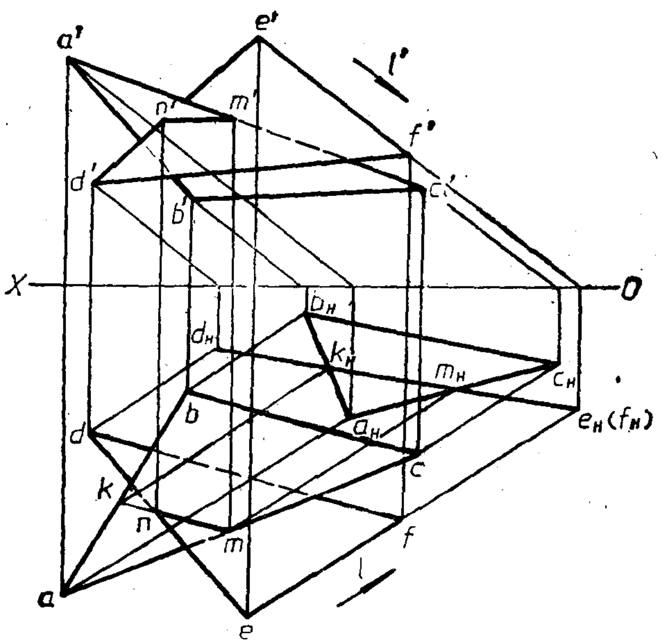


图 2-12

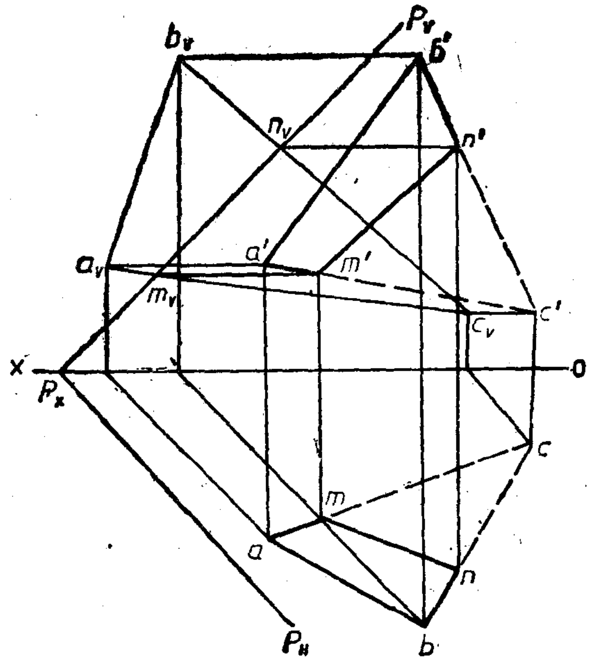


图 2-13

3. 注出交线的斜投影 k_Hm_H。之后，返回至正投影，即可作出其水平投影 mn 和正面投影 $m'n'$。

［**例四**］ 求平面△ABC 与迹线平面 $P(P_H, P_V)$的交线(图 2-13)。

解：略。

作图：略。

［**例五**］ 判断点 K 是否在侧平线 AB 上(图 2-14)。

解：任选一斜投影方向，将点 K 和直线 AB 向投影面 H 或 V 进行斜投影，根据点 K 的

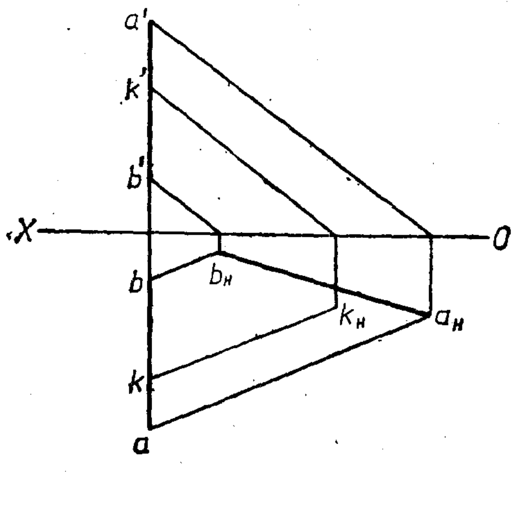


图 2-14

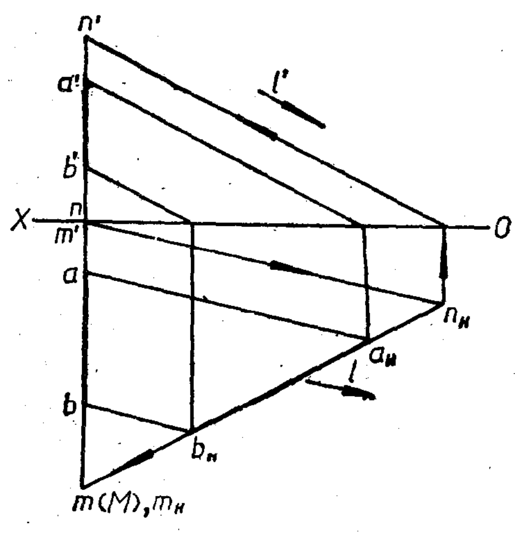


图 2-15

斜投影 k_H 是否在直线 AB 的斜投影 a_Hb_H 上，即可判断点 K 是否在侧平线 AB 上。

作图： 略。

[例六] 求作侧平线 AB 的水平迹点 $M(m, m')$ 和正面迹点 $N(n, n')$(图 2-15)。

解： 侧平线 AB 的水平迹点 M 的正面投影 m' 和正面迹点 N 的水平投影 n 都在 OX 轴上，且重合为一点。因此，求侧平线 AB 的迹点 M 和 N，实质上是已知直线 AB 上一点的一个投影求作其另一个投影。作法可任选一斜投影方向，在 H 或 V 面上作出直线 AB 和迹点 M、N 的斜投影，之后，返回至正投影，即可作出另一个投影。

作图：

1. 任选一斜投影方向 $L(l, l')$，在水平投影面 H 上作出直线 AB 的斜投影 a_Hb_H；
2. 根据点 n 作出点 N 的斜投影 n_H，再返回至正投影，即可作出点 N 的正面投影 n'；
3. 延长 a_Hb_H 与 ab 相交即可作出水平迹点 M 的水平投影 m。

[例七] 求直线 AB 与三棱柱 S-CDE 表面的交点(图 2-16)。

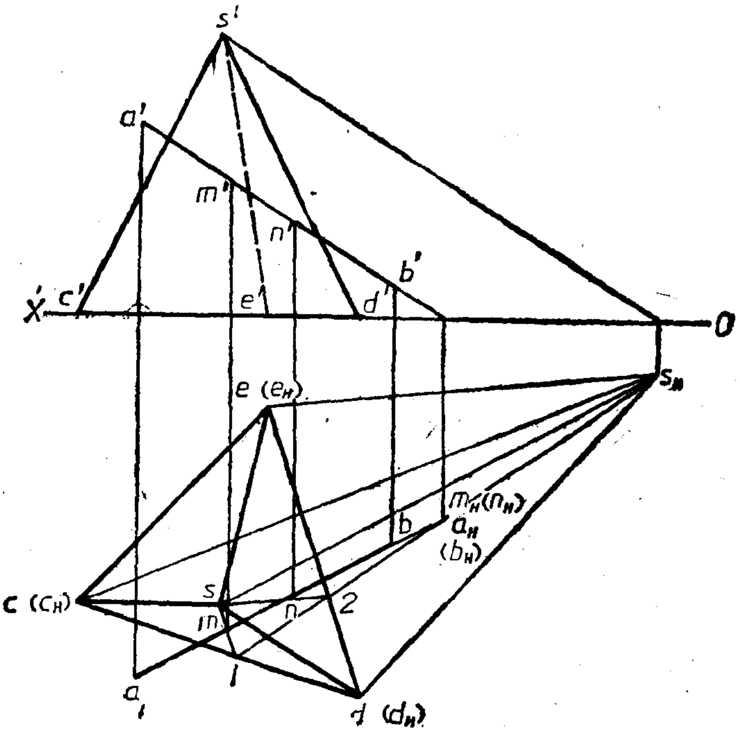


图 2-16

解： 取斜投影方向平行于直线 AB，将直线 AB 和三棱锥 S-CDE 向投影面 H 或 V 进行斜投影，则直线 AB 与三棱锥 S-CDE 的交点和直线 AB 的斜投影积聚为一点。据此，返回至正投影，即可作出所求交点的水平投影和正面投影。

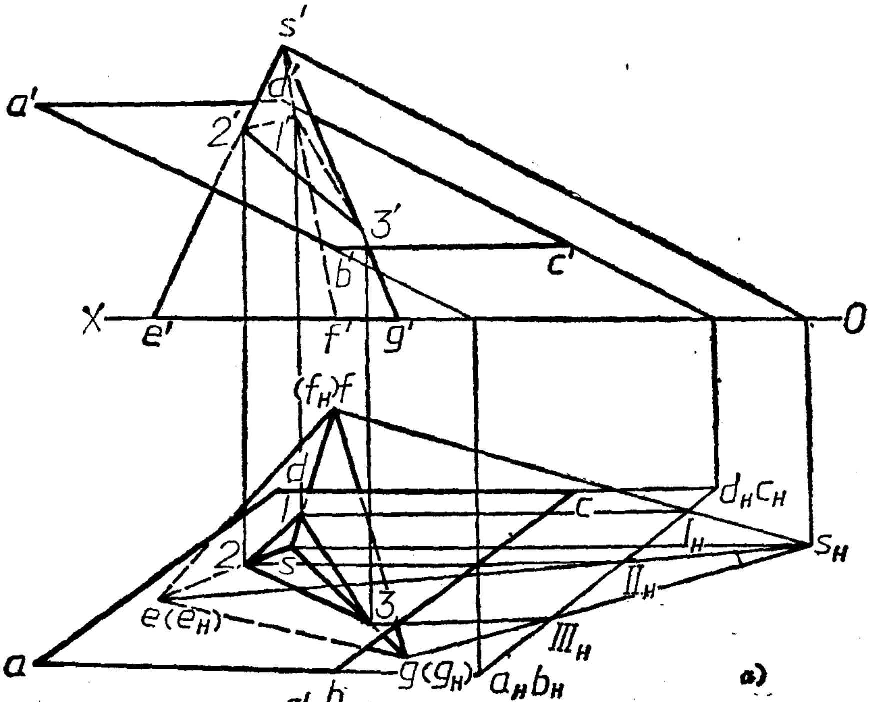
作图：

1. 取斜投影方向平行于直线 AB，向水平投影面 H 进行斜投影，作出直线 AB 和三棱锥 S-CDE 的斜投影 a_Hb_H 和 s_H-$c_Hd_He_H$；

2. 重合于点 $a_H b_H$ 注出 $m_H(n_H)$，连 $s_H m_H(n_H)$ 并延长，与 $\triangle cde$ 相交于 1、2 两点，作出直线 $s1$、$s2$；

3. 直线 ab 与 $s1$、$s2$ 的交点即所求交点的水平投影 m 和 n，由此即可作出其正面投影 m' 和 n'。

［例八］ 求平面 ▱$ABCD$ 与三棱锥 S-EFG 的截交线(图 2—17)。



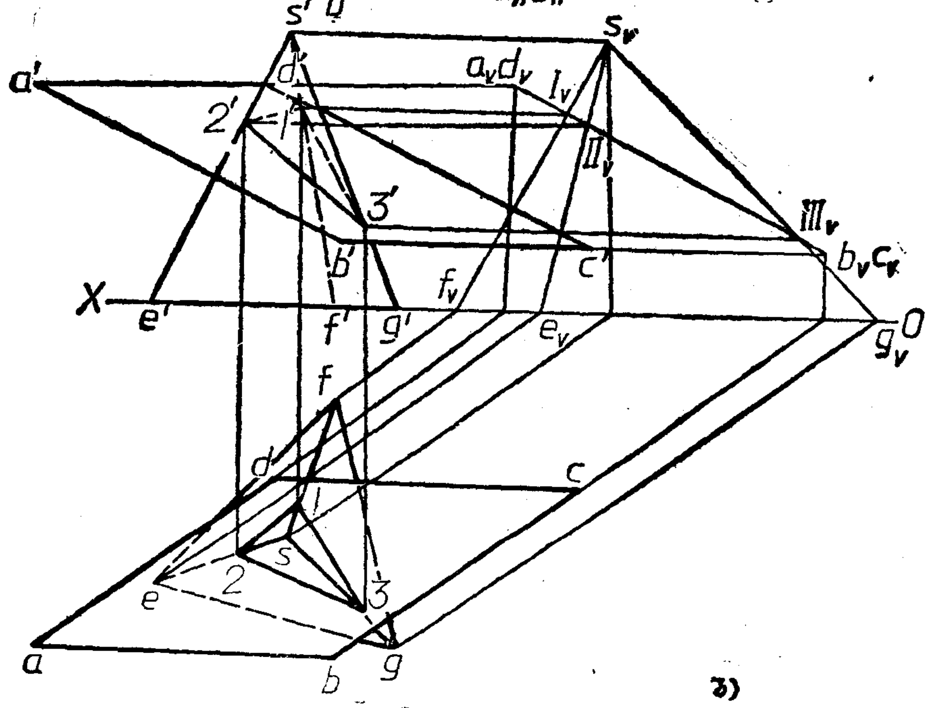


图 2-17

解：取斜投影方向平行于平面▱$ABCD$，将平面▱$ABCD$和三棱锥$S\text{-}EFG$向水平投影面H或正面投影面V进行斜投影，则其截交线和平面▱$ABCD$的斜投影积聚为一直线。据此，返回至正投影，即可作出截交线的水平投影和正面投影。

作图：

1. 如图2-17a)，以平面▱$ABCD$上的正平线方向为斜投影方向，作出平面▱$ABCD$和三棱锥$S\text{-}EFG$的斜投影$a_Hb_Hc_Hd_H$和$s_H\text{-}e_Hf_Hg_H$；

2. 注出交点I_H、II_H、III_H；

3. 返回至正投影，在直线sf, se, sg上分别作出点1、2、3，则△123即为截交线的水平投影，由△123即可作出其正面投影△$1'2'3'$。而在图2-17b)中，则以水平线为斜投影方向，作出了截交线的水平投影和正面投影。

［**例九**］ 求三棱柱与椭圆锥的相贯线(图2-18)。

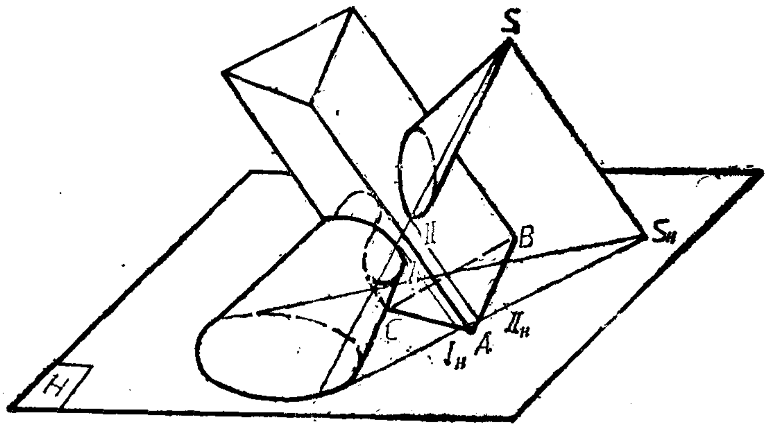


图 2-18

解：取斜投影方向平行于三棱柱的棱线，以棱柱、棱锥底面所在的水平投影面H为斜投影面，使三棱柱投影积聚为三角形ABC，利用其积聚性，取定相贯线上若干点的斜投影，之后，返回至正投影，即可作出相贯线的正面投影和水平投影。

作图：略。

二、在II、IV象限平分角面上的斜投影

如图2-19，直线AB的水平投影ab和正面投影$a'b'$的交点$K(k, k')$，必为II、IV象限平分角面π上的点。该点即为直线AB以其自身所示的方向为斜投影方向，以II、IV象限的平分角面π为投影面的斜投影$a_\pi b_\pi$。

如图2-20，以直线AB所示的方向为斜投影方向，以II、IV象限平分角面为投影面，平面△ABC的斜投影为直线$a_\pi b_\pi c_\pi$。

以II、IV象限平分角面为投影面，选择适当的投影方向，可十分简便地解作画法几何中的有关问题。现举例说明如下：