GAODENG
SHUXUE
XITIJI

高等数学习题集

大连工学院出版社

高等数学习题集

曹绳武　王振中
编
王[illegible]　张[illegible]

大连工学院出版社

高等数学习题集

Gaodeng Shuxue Xitiji

曹绳武　王振中　于远许　张风香　编

大连工学院出版社出版发行　　辽宁省新华书店经销
(大连市甘井子区凌水桥)　　吉林大学印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　印张：14　字数：350 千字
1987年7月第1版　　1987年7月第1次印刷
印数：00001—15 000册

责任编辑：张亚军　高晓凌
封面设计：羊　戈　责任校对：李　鸽　钱京娅

统一书号：13400·9　　ISBN 7-5611-0022-1/O·1
定价：2.48元

前言

这本《高等数学习题集》是为工科院校的大学生编写的。他们在学习高等数学时，除了要做一定量的基本习题外，还需要做一些有适当难度的综合性习题，以便加深对所学课程内容的理解、灵活地掌握运算方法和提高自己的解题技巧，培养解题、解决问题的能力。本习题集就是为适应这种要求而编写的。对于在校的或社会上的准备报考工科研究生的读者，本书也可供他们在应试之前复习高等数学时参考之用。

本习题集是根据高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的《高等数学教学基本要求》，按照高等数学通用教材的章节顺序编写的，因此它可以与通用教材配合使用。习题集各章均由例题、基本题和杂题三部分组成（例题约100个，基本题约1430个，杂题约900个），例题是为了配合杂题选解的，计算题都附有答案，为了启发思考、提供解题方法大部分杂题给出了提示，书末附录备有常见公式以便查找。准备报考研究生的读者，可以阅读完例题之后，越过基本题而进入杂题，对于在校的大学生可以演算基本题后，再阅读例题并选作一部分杂题，对高等数学要求较低的某些专业的学生，做基本题后再选做少量杂题就够了。

本书大部分习题是应用数学系许多老师在教学过程中积累起来的，我们在编选时，参考了有关资料，并吸收了我院及一些兄弟院校近年来研究生的试题，为此谨向有关的同志致谢。

参加本书编写的人员有：曹绳武、王振中、于远许和张凤翥四人。

应用数学系领导为我们提供完成编写工作的条件；我们的

工作还得到了许多老师的关心、支持和帮助；在此，我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，本习题集一定还有许多缺点和错误，恳请多加批评、指正。

编者

987年3月

目　录

第一章　函数与极限

一、例　　题

例 1　设$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 求$f[f(x)]$。

解　$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0,\\ 1, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$ 先求$f(x)\geqslant 0$及$f(x)<0$的区域。由$f(x)\geqslant 0$得$1+x\geqslant 0$，于是$x\geqslant -1$；由$f(x)<0$得$1+x<0$，于是$x<-1$。所以

$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

又当$x<-1$时，$f(x)=1+x$，故有

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1,\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

例 2　设$f(x)$满足方程$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中$a$、$b$、$c$为常数，且$|a|\neq|b|$，求$f(x)$的表达式并证明$f(x)$是奇函数。

解
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \qquad (1)$$

在式(1)中用$\frac{1}{x}$代x，则得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx \qquad (2)$$

由式(1)、(2)消去$f\left(\frac{1}{x}\right)$，得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx,$$

故
$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right).$$

由于 $f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=\frac{-c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)$

$$=-f(x),$$

所以，$f(x)$是奇函数。

例3 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\dots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right).$$

解 若采用连乘记号，则

$$原式=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}\ .$$

由于
$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1},$$

而
$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)},$$

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}=\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}$$

$$=\frac{1}{3}(n^2+n+1),$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

注　记号$\prod$表示连乘，例如$\prod\limits_{k=1}^{n}a_k=a_1a_2\cdots a_n$。

例4　已知$\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$，求$a$、$b$。

解　因为

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{25x^2-(ax^2-bx+c)}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x^2+bx-c}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x+b-\frac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=2,$$

所以
$$\begin{cases}25-a=0,\\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=2,\end{cases}$$

解此两式，得

$$a=25,\qquad b=20.$$

例5　设$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)(n=0,1,2,\cdots)$，其中$a>0$，$x_0>0$。（1）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$是否存在；（2）若存在，试求其值。

解　(1)由

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)=\frac{x_{n-1}^2+a}{2x_{n-1}}$$

$$\geqslant\frac{2\sqrt{a}\,x_{n-1}}{2x_{n-1}}=\sqrt{a}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

可见数列$\{x_n\}$有下界$\sqrt{a}$。又因为

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0,$$

所以数列$\{x_n\}$单调减少，由极限存在准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。

(2)对等式$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$两端取极限，得

$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right),$$

解之得　$$x=\pm\sqrt{a}.$$

因为$x_n>0$，所以取$x=\sqrt{a}$（负值舍去），即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}.$$

例6　设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$$

试讨论$f(x)$在$x=0$处的连续性。

解　因为

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to -0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=1,$$

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to \pm 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to +0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\ln e = 1,$$

故$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$，但$f(0)=0$，所以

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0),$$

因此，$f(x)$在 $x=0$ 处不连续。

例 7 设函数

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$

是连续函数，求 a、b的值。

解 当$|x|<1$ 时，$f(x)=ax^2+bx$，

当$|x|>1$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$，

当 $x=1$ 时， $f(1)=\frac{1}{2}(1+a+b)$，

当$x=-1$时，$f(-1)=\frac{1}{2}(-1+a-b)$。

因为函数 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，有

$$a+b=1=\frac{1}{2}(1+a+b),$$

即 $$a+b=1 \tag{1}$$

又函数$f(x)$在 $x=-1$处连续，有

$$a-b=-1=\frac{1}{2}(-1+a-b),$$

即
$$a-b=-1, \tag{2}$$

解(1)、(2)两式，可得

$$a=0, \qquad b=1.$$

例 8 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$a<c<d<b$。证明在$[a,b]$内至少存在一点ξ，使

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$$

成立，其中p，q均为任意正常数。

证明 因为$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，所以此函数在区间$[a,b]$上能取得最大值M和最小值m，且有

$$(p+q)m\leqslant pf(c)+qf(d)\leqslant(p+q)M,$$

即

$$m\leqslant\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant M.$$

由介值定理可知，在$[a,b]$内至少存在一点ξ，使得

$$\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}=f(\xi)$$

即

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

二、基 本 题

1. 函数

求下列函数的定义域，并用区间符号表示(1.1～1.12)：

1.1 $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.　　　**1.2** $y=\sqrt{x^2-1}$.

1.3 $y=2^{\frac{1}{x}}$.　　　**1.4** $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$.

1.5 $y=\frac{1}{x^2+3x+6}$. 1.6 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$.

1.7 $y=\frac{x-4}{\sqrt{2+x-x^2}}$. 1.8 $y=\frac{x}{\sin x}$.

1.9 $y=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x, & 0<x<2\end{cases}$. 1.10 $y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$.

1.11 $y=\sqrt{3-x}+\frac{1}{\ln(x+1)}$.

1.12 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

1.13 设$\varphi(x)=|x-3|+|x-1|$，求$\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(2)$，$\varphi(3)$，$\varphi(-1)$和$\varphi(-2)$。

1.14 设$f(x)=x^2$，证明：

(1) $f(-x)=f(x)$；

(2) $f(y)-f(x)=(y-x)(y+x)$；

(3) $f(x+h)-f(x)=2xh+h^2$；

(4) $f(t^2)=[f(t)]^2$。

1.15 设$\varphi(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$，证明$\varphi(u)+\varphi(v)=\varphi\left(\frac{u+v}{1+uv}\right)$。

1.16 若$f(x)=\frac{x}{x-1}$，求$f(2)$，$f(0)$，$f[f(x_0)]$，$f(x_0+1)$，其中$x_0\neq 0$。

作出下列函数的图形(1.17～1.20)：

1.17 $y=|x|+x$. 1.18 $y=\sqrt{\sin^2 x}$.

1.19 $y=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$. 1.20 $y=|x^2-1|$.

1.21 设$y=f(x)$和$y=\varphi(x)$的图形是已知的，如何作出$y=f(x)+\varphi(x)$的图形？

(1) 试作 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图形；

(2) 试作 $y=\sin x+\cos x$ 的图形。

1.22 设 $y=f(x)$ 的图形是已知的，如何作出 $y=f(x-a)$ 与 $y=f(x)+b$ 以及 $y=hf(x)$ 和 $y=f(-x)$ 的图形（a, b, h 为常数）。试作出下列函数图形：

(1) $y=\ln(x+1)$；　　(2) $y=\frac{x+1}{x-1}$；

(3) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$；　　(4) $y=\lg 2x$；

(5) $y=\sin^2\frac{x}{2}$；　　(6) $y=\sin 2x$。

1.23 证明 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，并利用这个结果作函数 $y=\sin x+\cos x$ 的图形。

1.24 对于二次函数 $f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$，若有三个彼此相异的实数 α_1, α_2, α_3，使 $f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=f(\alpha_3)=0$，证明 $a_0=a_1=a_2=0$。

1.25 求满足下列性质的二次函数 $g(x)=ax^2+bx+c$：

(1) $g(-1)=5$, $g(0)=2$, $g(1)=7$；

(2) $g(3)=7$, $g(5)=5$, $g(7)=3$。

1.26 设 $f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$，且 $a^2+bc\neq 0$，证明

$$f[f(x)]=x \qquad \left(x\neq\frac{a}{c}\right).$$

1.27 设 $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$，$g(x)=x+\sqrt{x^2-1}$，证明 $g(\sqrt{x^2+1})=f(x)\ (x\geqslant 0)$；$f(\sqrt{x^2-1})=g(x)\ (x\geqslant 1)$。

1.28 $y=x$、$y=\sqrt{x^2}$ 以及 $y=(\sqrt{x})^2$ 是否表示同一

函数？为什么？并作出它们的图形。

1.29　设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求$f(x)$。

1.30　设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$　$(x>0)$，求$f(x)$。

1.31　指出下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1)　$y=x^4-x^2$；　　(2)　$y=x^2-x$；

(3)　$y=\cos x$；　　(4)　$y=\sin x$；

(5)　$y=\operatorname{tg} x$；　　(6)　$y=\lg x$；

(7)　$y=2^x$；　　(8)　$y=2^{-x^2}$；

(9)　$y=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$　　$(a>0,\ a\neq 1)$；

(10)　$y=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$　　$(a>0,\ a\neq 1)$；

(11)　$y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$　　$(a>0,\ a\neq 1)$；

(12)　$y=x\cdot\frac{a^x+1}{a^x-1}$　　$(a>0,\ a\neq 1)$。

1.32　证明函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 为奇函数。并问 $y=\log_a(x-\sqrt{x^2-1})$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 是否为奇函数？

1.33　设 $y=f(x)$和 $y=g(x)$ 都定义在对称区间$(-l,l)$内，试证明：

(1)　若 $f(x)$、$g(x)$ 均为偶函数，则 $f(x)\cdot g(x)$ 为偶函数；

(2)　若$f(x)$、$g(x)$ 均为奇函数，则 $f(x)\cdot g(x)$ 为偶函数；