科學圖書大庫

分析基礎課程—微積分

譯者 繆龍驥 曾俊宏

徐氏基金會出版

世界圖書出版公司

分析基礎課程—微積分

譯者　繆龍驥　曾俊宏

徐氏基金會出版
世界圖書出版公司

分析基础课程——微积分
W．迈耶等著　缪龙骥等译

徐氏基金会　出版
世界图书出版公司
北京朝内大街137号
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

1989年12月第一版　　开本：850×1168　1/32
1989年12月第一次印刷　　印张：9.5
ISBN　7—5062—0484—3
定价：5.90元

经徐氏基金会允许，世界图书出版公司重印，1990。

限国内发行

譯　序

本書係譯自德國W.Meyer，B.Reiners，H.Scheid, G.Taetz，H.Wellstein等人所著之Grundkurs Analysis，內容爲微積分基本理論及應用，原供德國高級中學分析基礎課程教材之用，由於本書取材豐富，編排適當，且深入淺出，解說清晰，特予以譯出，供國內高中及大學同學自習或參考使用。

譯　者

符　號

$\mathbb{N}$ 自然數集合

$\mathbb{N}_0$ 自然數連 0 的集合

$\mathbb{Z}$ 整數集合

$\mathbb{Q}$ 有理數集合

$\mathbb{R}$ 實數集合

$\mathbb{R}^+$ 正實數集合

區　間：

$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a;\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$]a;\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$]-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

$]-\infty;a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$f: D \to \mathbb{R}$, $f: D_f \to \mathbb{R}$	函數 f，有定義域 D 或 D_f
$f+g: x \to f(x)+g(x)$	函數 f 與 g 的和
$f-g: x \to f(x)-g(x)$	函數 f 與 g 的差
$a \cdot f: x \to a \cdot f(x)$	函數 f 的 a 倍，a 是實數
$f \cdot g: x \to f(x)\,g(x)$	函數 f 與 g 的積
$\frac{f}{g}: x \to \frac{f(x)}{g(x)}$	函數 f 與 g 的商
$\frac{1}{f}: x \to \frac{1}{f(x)}$	函數 f 的倒函數
$g \circ f: x \to g(f(x))$	函數 f 與 g 的合成
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	函數 f 對於 x 趨於正無限大或負無限大的極限值
$f(x) \to \pm\infty$ 對於 $x \to \pm\infty$	函數 f 的無限極限
$f'(x_0)$	函數 f 在點 x_0 的導數
$x \to f'(x)$	函數 f 的導函數
$x \to f''(x)$	函數 f 的二階導函數

$x \to f'''(x),\ x \to f^{(n)}(x)$		函數 f 之三階及高階導函數	
$\int_a^b f(x)\,dx$		函數 f 在 [a,b] 上的積分函數	
$F_a: x \to \int_a^x f(t)\,dt$		$F_a(a) = 0$ 的積分函數的確實表示	
$[F(x)]_a^b$		差 $F(b) - F(a)$ 的簡寫	
sin	正弦函數	arcsin	反正弦函數
cos	餘弦函數	arccos	反餘弦函數
tan	正切函數	arctan	反正切函數
$x \to e^x$	自然指數函數，e 函數	$x \to \ln x$	自然對數函數
e	尤拉 Euler 數		
$x \to \operatorname{sgn} x$	符號函數	$x \to \lvert x \rvert$	絕對值函數
$x \to [x]$	整數部分函數	$x \to r(x)$	捨入函數

內容流程

極小程序	擴展部分
1.1 在無限大的極限情形	
1.2 在一點的極限值	1.3 連續性
	1.4 連續函數的形成
	1.5 極值
2.1 導數	
2.2 切線方程式	
2.3 導函數	
2.4 加法規則，因數規則與乘積規則	2.5 連鎖規則與商式規則
	2.6 反函數的導數
2.7 高階導數	3.1 e 函數
	3.2 自然對數函數
4.1 相關極值	
4.2 導數與增減情形	
4.3 凹性與反曲點	
4.4 相關極值的一個充分條件	
4.5 函數圖形	5.1 線性與二次逼近
	5.2 牛頓逼近方法
6.1 面積的近似計算	
6.2 積分函數	
6.3 微積分基本定理	
6.4 原函數	6.5 部分積分法
6.6 體積計算	6.7 數值積分

前　言

本書主要在數學分析的概念與方法上作應用方面的介紹。爲了複習、加強及檢驗理解的目的，在起首先編列第 0 章，在其中將必要的基礎知識以精簡的形式彙列。這一章使得這本書在教學計畫中沒有導引課程時也可使用。

前頁中的流程圖顯示這個課程的核心與擴展的可能性，在跳過若干章節時，不可避免會使以後章節中的習題與前面脫節，但是這些可以往前查考。

書中各節是依主題完整的學習單元設計，其中各學習單元的構造應能給予在方法上發展的激勵：

(1) 預備問題 (1,2) 應使得預備知識靈活，並帶入一場主題導向的討論。將這些放到秤金的天平上去衡量，是不合適的。

(2) 一個或幾個導引例題，多數來自應用範圍，畫出所要介紹數學概念的意義，並且顯示數學概念使得問題的解答成爲可能。

(3) 引渡的課文將例題中一般有效的事項抽出，並將之編成數學形式。

(4) 各節的中心內容，例如定義或定理，都加框列出。

(5) 其後編有注解，(4)中項目的補充指示、證明、擴展、概念範圍。

(6) 一個或幾個範例，多數以正式形式列出，指示如何處理所討論的內容。（在此“例”這個字不是以紅色印出）所作解答盡可能簡單，但學生應給予補充完整。

(7) 習題部分包含一般的、應用的及深入的練習。以紅色數字標示的習題較難，需要較多的計算工作或處理附加的資料。至於特別只能用

小型計算器解答的問題都已放棄，而在問題中用到小型計算器的地方則予以明白指出。當然有時一個能作程式的小型計算器能夠減輕計算工作。

在(2)至(6)中的項目在許多節中加倍編列，一個範例則可能同時也是一個導引例題。

著　者

目　錄

0 基本知識

笛卡兒(René Descartes 1596-1650)寧願從事哲學與數學研究，而不願從事貴族所應擔任的宮廷與軍事職務，他講授點是由坐標以及曲線是由方程式所描述，爲了使抄襲者氣餒，他寫作時常使人難以了解，並且略去證明，在這一點他也成爲在數學中的一個榜樣。

0.1 數與數對

我們在**數線**上表示數： **數線**

負數 ($x < 0$) 0 **正數** ($x > 0$) **正數**

−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 **負數**

爲了表達各種類型的數，我們使用下列符號：

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ **自然數**集； $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$； **自然數**

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ **整數**集； **整數**

$\mathbb{Q}$ = **有理數**集； **有理數**

$\mathbb{R}$ = **實數**集。 **實數**

一個有理數是兩個整數的商（分母$\neq 0$）；其小數表示是有限的或循環的。

一個實數，不是有理數時，叫做**無理數**；其小數表示既不是有限的也不是循環的。例如$\sqrt{5}$、$\sqrt[3]{17}$、π（圓周率）都是無理數。 **無理數**

數集的包含關係爲 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.。

當我們談到一個數的分析時，我們通常是指一個實數；其他的情形我們必須明確說出，是指一個有理數、整數，或者甚至自然數。

區　間　對於 $a,b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$，在 a 與 b 之間的數形成一個**區間**。我們稱

閉區間
$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ 一個**閉區間**，

$[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ 一個半開區間，

開區間
$]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ 一個半開區間，

$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ 一個**開區間**。

一端有界的區間是

$$[a;\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \quad]-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$
$$]a;\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \quad]-\infty;a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

絕對值
不等式
我們用 $|x|$ 表示數 x 的**絕對值**，就是 x 與 $-x$ 兩個數中的正的；其中 $|0| = 0$。**不等式** $|x| \leq 3$ 描述區間 $[-3;3]$，因爲恰好這個區間中的數滿足這個不等式。對於 $r > 0$，不等式 $|x-a| \leq r$ 的意義如同 $-r \leq x-a \leq r$，所以它表示區間 $[a-r;a+r]$。、

坐標系　我們將數對在**坐標系**（圖 0-1）中表現，我們用 $(a|b)$ 表示有 x 坐標 a 及 y 坐標 b 的點。

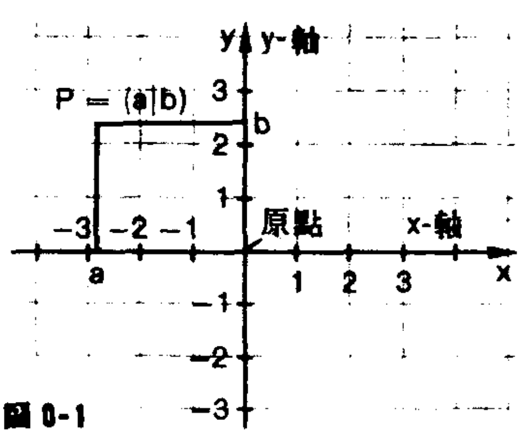


圖 0-1

滿足方程式

$$x^2+y^2 = r^2$$

的所有數對(x|y)的集合，形成繞原點O = (0|0)且有半徑 r 的一個圓（圖0-2）。 **圓**

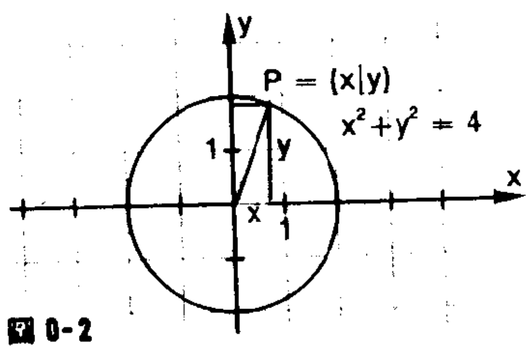


圖 0-2

若M是一個數對集合，我們則稱所對應的點集爲M的圖形。下列**集合圖形** **集合圖形**

$$\{(x|y) | y > x^2 \text{ 及 } y < x+3\}$$

是在圖 0-3 中的紅色區域。

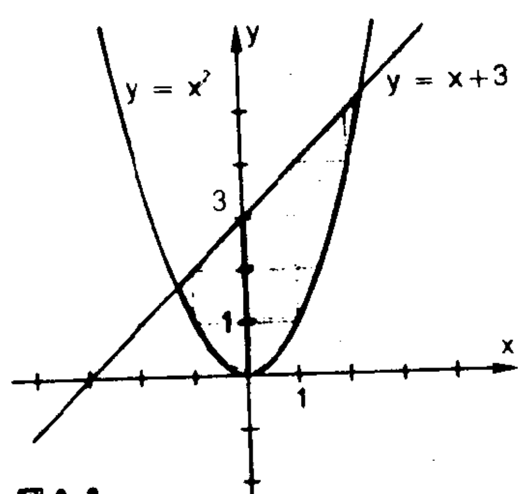


圖 0-3

0.2 函數與其圖形

定義域
函　數

在**定義域** $D \subseteq \mathbb{R}$ 上的一個**函數**將D中每一個數仍對應到一個數。我們寫成

$$f: D \to \mathbb{R} \text{ 或 } f: x \mapsto f(x) \text{ 對於 } x \in D.$$

函數方程式

若數 $x \in D$ 對應到數 y，我們則將它用**函數方程式** $y = f(x)$ 表示。

函數圖形

若 f 是一個函數，則稱集合 $\{(x|y) \mid y = f(x) \text{ 且 } x \in D\}$ 的圖形爲**函數** f 的**圖形**。一個函數 f 的圖形與 y 軸的每個平行線至多相交一點，因爲對於一個 x 值，沒有不同的 y 值滿足 $y = f(x)$ 。

對應 $x \mapsto f(x)$ 時常以一個代數式 $f(x)$ 給出，例如

$$x \mapsto x^2 + 1, \quad x \mapsto \frac{1}{x+1}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

函數式

所用的式子則稱爲**函數式**。

若無其他限制，我們通常考慮函數式是在最大可能的定義域上。

值　表

爲了畫出一個函數的圖形，我們首先列出一個**值表**。爲此我們先要確定，要對定義域的那一部分畫出圖形，在圖 0-4 中是

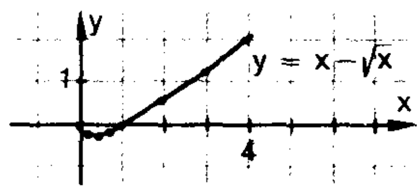
$$f: x \mapsto x - \sqrt{x}$$

值　域

在區間 $[0; 4]$ 上的圖形。f 在 $[0; 4]$ 上所取數值的集合（**值域**）是區間 $[-\frac{1}{4}; 2]$。

絕對值函數
整數部分函數

圖 0-5 顯示**絕對值函數**對於 $x \in [-3; 3]$. 的圖形。在圖 0-6 中的圖形表示**整數部分函數** $x \mapsto [x]$；在此我們用 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數。



x	0	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4
y	0	−0,25	−0,21	−0,12	0	0,59	1,27	2

圖 0-4

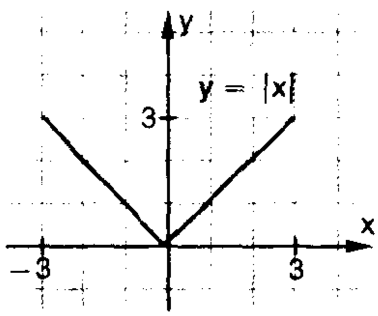


圖 0-5

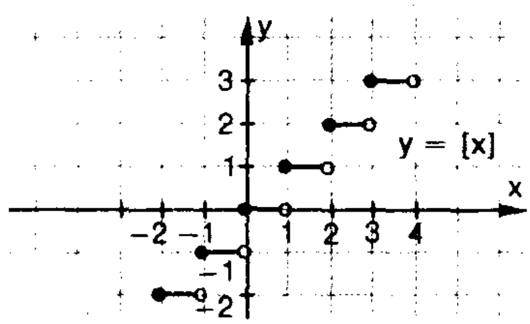


圖 0-6

0.3　線性函數與算術數列

線性函數　　　　**線性函數**

$$x \mapsto ax + b$$

的圖形是一個**直線**，係數 a 是直線的**斜率**，b 是它在 y 軸上的**截部**。我們能夠列出直線方程式 $y = ax + b$，假如我知道直線上兩點：在圖 0-7 中由斜率三角形的相似性得

直　線
斜　率
截　部

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

這是直線方程式的**兩點式**。

兩點式

由斜率 $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$，我們得到**點斜式**