高等学校理工科参考丛书

·孙本旺教授　汪　浩教授主编·

数学分析中的典型例题和解题方法

高等学校理工科参考丛书

孙本旺教授　汪　浩教授主编

数学分析中的典型例题和解题方法

副主编：刘德铭　李运樵
编　委：金治明　张　帜　欧阳合　吴　翊　朱克和
文　鸣　汪文浩　周　宏　屈田兴　邱　克

湖南科学技术出版社

数学分析中的典型例题和解题方法

孙本旺教授
汪　浩教授　主编

责任编辑：胡海清

＊

湖南科学技术出版社出版（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

＊

1981年9月第1版　1985年7月第3次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：12.5　字数：287,000
印数：72,301——104,400
统一书号：13204·39　定价：1.90元

前　言

数学分析是近代数学的基础，是每个理工科学生的必修课，也是现代科学技术中应用最广泛的一门学科．因此，教好、学好这门学科，是十分重要的．为了有助于广大读者学习、掌握它的基本原理、基本概念和基本的解题技巧，我们从教学实际出发，也考虑到今后开展数学竞赛的需要，编写了这本《数学分析中的典型例题和解题方法》．

由于读者对目前流行的大学数学分析教科书及习题集都比较熟悉，所以在选题时，对上述书中较为常见的问题均未选入，而是作为以上内容的补充，选了一些比较新鲜有趣的问题．选题不求全面，但求方法典型而富有启发性．这也可从目录中看出．选入的问题均作了较详细的解答，有的给出多种解法，有一些解法比有的书中所讲的要巧妙些．此外，对部分典型问题，就我们所想到的，作了一些必要的注记：说明问题的背景；解题方法的实质；应注意之点；与其他问题的联系等．书中所选的题是以理科数学分析教材为依据的，因此主要是理论证明题及部分计算题，又因所选的题其解法往往要综合应用数学分析中各方面的知识，所以有时对于把某题应列入哪一类而感到困难，但为便于阅读，将它们或按内容相近或依解法相似而分作四章20节．这样分也许有不合理的地方，但我们还是不揣浅陋地拿出来。

本书所选问题的难度大体相当于波里亚与塞格(G.POlya,G.Szegö)的名著——《分析学中的问题与定理》第一卷或美国数学月刊(American Mathematical Monthly)征求解答问题的水平，所以并不太容易解。虽然我们对所选问题均作了较详细的解答，但仍希望读者自己独立地解题，遇到困难再看解答，这样也许对读者更有帮助。本书可作为大学生的数学分析或高等数学的课外读物，也可以作为教师的教学参考书或辅导材料。假如这本书能对读者的解题技巧及逻辑推理能力的提高有一点帮助，我们就十分高兴了。

在本书编写的准备过程中，沙基昌、沙钰、杨惠鹄、王晓星等同志作了许多工作，裘兆泰同志为本书绘制了插图，侯云同志设计了封面，我们对他们深表感谢，最后还应特别感谢出版社的同志，由于他们的关心和支持，才有可能使本书早日与读者见面。

由于我们水平有限，时间比较仓促，不当与错误之处在所难免，我们恳切希望读者批评指正。

编　者

1981.3.8

目　录

第一章
极限理论中的若干典型例题

极限理论是数学分析的基础，其中数列（有时也称为序列或叙列）的极限是它的重要组成部分，也是本章的主要内容。在本章中，我们选择了一些具有一定技巧性，并且有趣的题目。根据它们的内容与解题方法，分为以下几节：

§1　斯铎兹(Stolz)定理的应用

§2　托布利兹(Toeplitz)定理和数列的变换

§3　利用数列的递推关系求数列的极限

§4　利用数列的构造和性质求数列的极限

§5　区间套定理

§6　不动点原理

§7　累次极限

§1　斯铎兹(Stolz)定理的应用

斯铎兹定理与罗必大(L'Hospital)法则是数学分析中处理"$\frac{\infty}{\infty}$"型及"$\frac{0}{0}$"型极限的两个重要工具。它们分别适用于变量为"离散的"和"连续的"情形。这里通过几个有趣的例子说明斯铎兹定理的应用。下面首先叙述一下定理(不给出证明)。读者可以参看[7]一卷一P. 59，也可参看本节第6题及第9题，在那里我们将给出推广的斯铎兹定理及其证明。

斯铎兹 (Stolz)定理1$\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$. 设$\{a_n\}$是趋于零的数列,$\{b_n\}$是递减趋于零的数列，则当

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}$$

存在或为$+\infty$时，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

也存在或为$+\infty$，且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}.$$

斯铎兹 (Stolz)定理2$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$. 设$b_n<b_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$,且

$$\lim_{n\to+\infty}b_n=+\infty.$$

如果 $$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

存在或为$+\infty$时，则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

也存在或为$+\infty$，且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

1. 命$x_1\in(0,\ 1)$及$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，$n=1,2,\cdots$. 证明$\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=1$.

【证】 由$x_1\in(0,1)$及$x_2=x_1(1-x_1)$，知$x_2\in(0,1)$，用数学归纳法可证明$x_n\in(0,1)$，$n=1,2,\cdots$. 于是

$$0<\frac{x_{n+1}}{x_n}=(1-x_n)<1,\ n=1,2,\cdots$$

所以序列$\{x_n\}$单调减少且有下界，从而$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$存在，在递推公式两边令$n\to+\infty$，得

$$x = x(1-x),$$

所以$x=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x = 0$。

设
$$b_n = \frac{1}{x_n},\quad n=1,2,\cdots,$$

则$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$，且$b_n < b_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，利用斯铎兹(Stolz)定理2，我们有

$$\lim_{n\to+\infty} nx_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{b_n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)-n}{b_{n+1}-b_n}.$$

但由递推公式我们可得

$$b_{n+1}-b_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$$

$$= \frac{1}{1-x_n} \longrightarrow 1,\quad (n\to+\infty)$$

所以
$$\lim_{n\to+\infty} nx_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_{n+1}-b_n} = 1.$$

2. 设函数列$\sin_1 x = \sin x$，$\sin_n x = \sin(\sin_{n-1} x)$，$n=2,3,\cdots$。若$\sin x > 0$，证明$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}\sin_n x = 1$。

【证】 取定x。显然当$n\to+\infty$时，$\sin_n x$单调减少趋于零，于是由斯铎兹(Stolz)定理2有

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin_n^2 x = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{\sin_n^2 x}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)-n}{\dfrac{1}{\sin_{n+1}^2 x} - \dfrac{1}{\sin_n^2 x}},$$

但 $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{\sin_{n+1}^2 x} - \dfrac{1}{\sin_n^2 x}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{\sin^2(\sin_n x)} - \dfrac{1}{\sin_n^2 x}}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\dfrac{1}{\sin^2 t} - \dfrac{1}{t^2}} = 3,$$

所以 $$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} \sin_n x = \sqrt{\lim_{n \to +\infty} n \sin_n^2 (x/3)}$$

$$= 1.$$

【注记】 我们开始解这两个题时，容易想到要用斯铎兹定理，一般很自然地去求

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{\dfrac{1}{n}} 与 \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin_n^2 x}{\dfrac{1}{n}},$$

结果很难求出来。然而改用了求

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\dfrac{1}{x_n}} 与 \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\dfrac{1}{\sin_n^2 x}},$$

便很顺利地解决了问题。可见，对于斯铎兹定理，还应注意灵活地应用它。

此外，这个题选自[6].Pt.I.Chap.4第173题。但此处解法与该书不同，由于应用了斯铎兹定理，所以显得比较简单。

3. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛，又$\{p_n\}$为单调增加的正数数列，且$p_n \to +\infty (n \to +\infty)$，证明

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = 0.$$

【证】 令$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，$n = 1, 2, \cdots$及$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$。则

$$a_1 = A_1, \quad a_n = A_n - A_{n-1}, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

于是

$$\frac{p_1 a_1 + p_1 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n}$$

$$= \frac{p_1 A_1 + p_2 (A_2 - A_1) + \cdots + p_n (A_n - A_{n-1})}{p_n}$$

$$= \frac{A_1 (p_1 - p_2) + A_2 (p_2 - p_3) + \cdots + A_{n-1} (p_{n-1} - p_n)}{p_n} + A_n$$

$$\overset{Df}{=\!=} \frac{B_n}{p_n} + A_n$$

由于$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$，且由斯铎兹定理有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{P_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{B_{n+1} - B_n}{P_{n+1} - P_n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{A_n (P_n - P_{n+1})}{P_{n+1} - P_n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (-A_n) = -A,$$

所以$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots + P_n a_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{B_n}{P_n} + A_n \right) = 0.$

4. 设实数序列$\{S_n\}$，定义它的算术平均数σ_n为

$$\sigma_n = (S_0 + S_1 + \cdots + S_n)/(n+1),$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

对$n\geqslant 1$，令$a_n=S_n-S_{n-1}$. 证明：若

$$\lim_{n\to+\infty} na_n=0,$$

且$\{\sigma_n\}$收敛，则$\{S_n\}$收敛，且

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n.$$

【解】 首先容易验证

$$S_n-\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} ka_k,$$

利用斯铎兹定理有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} ka_k$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} ka_k-\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k}{(n+2)-(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(n+1)a_{n+1}=0.$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n.$

5. 设给定一个序列$\{a_n\}$，使得序列

$$b_n=pa_n+qa_{n+1},\qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

是收敛的，如果$|p|<|q|$，试证$\{a_n\}$收敛.

【证】 由于$|p|<|q|$，故$p+q\neq 0$，$q\neq 0$. 设

$$\lim_{n\to+\infty} b_n=b,$$

作序列$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$如下：

$$\alpha_n=\frac{b}{p+q}-a_n,$$

$$\beta_n = -(b_n - b)/q,\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

再记 $\lambda = -\dfrac{p}{q}$，则得

$$\beta_n + \lambda\alpha_n = \alpha_{n+1},\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

因 $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -(b_n - b)/q = 0$,

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \beta_n + \lambda\alpha_n \\ &= \beta_n + \lambda(\beta_{n-1} + \lambda\alpha_{n-1}) \\ &= \beta_n + \lambda\beta_{n-1} + \lambda^2\alpha_{n-1} \\ &= \cdots = \beta_n + \lambda\beta_{n-1} + \lambda^2\beta_{n-2} + \lambda^{n-1}\beta_1 + \lambda^n\alpha_1\end{aligned}$$

$$= \frac{\beta_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n + \beta_{n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} + \cdots + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^1\beta_1 + \alpha_1}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n},$$

于是 $|\alpha_{n+1}| \leqslant$

$$\frac{|\beta_n|\cdot\left|\frac{1}{\lambda}\right|^n + |\beta_{n-1}|\cdot\left|\frac{1}{\lambda}\right|^{n-1} + \cdots + \left|\frac{1}{\lambda}\right|\cdot|\beta_1| + |\alpha_1|}{\left|\frac{1}{\lambda}\right|^n}.$$

由斯铎兹定理有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|\beta_n|\cdot\left|\frac{1}{\lambda}\right|^n + |\beta_{n-1}|\cdot\left|\frac{1}{\lambda}\right|^{n-1} + \cdots + \left|\frac{1}{\lambda}\right|\cdot|\beta_1| + |\alpha_1|}{\left|\frac{1}{\lambda}\right|^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{|\beta_{n+1}|\cdot\left|\frac{1}{\lambda}\right|^{n+1}}{\left|\frac{1}{\lambda}\right|^{n+1} - \left|\frac{1}{\lambda}\right|^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}|\beta_{n+1}| \times \frac{1}{1-|\lambda|} = 0.$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$.

$$\text{从而}\quad \lim_{n\to+\infty} a_n=\frac{b}{p+q}-\lim_{n\to+\infty} a_n$$

$$=\frac{b}{p+q}.$$

我们不仅证明了$\{a_n\}$极限存在，而且将$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$计算出来了。

6. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型斯铎兹 (Stolz) 定理的推广}\right)$设$T$为正常数，若函数$g(x)$, $f(x)$, $x\in[a,\ +\infty)$满足：

(1) $g(x+T)>g(x)$, $x\in[a,\ +\infty)$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $f(x)$, $g(x)$在$[a,\ +\infty)$的任意子区间上有界；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$.

则
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

【证】 不妨设$g(x)>0$, $x\in[a,\ +\infty)$. 由3) 及极限定义容易推知，对任意给定的$\varepsilon>0$，必有正数$A>a$，使对一切$x\in[A,\ A+T]$及一切自然数P有

$$(l-\varepsilon)[g(x+T)-g(x)]<f(x+T)-f(x)$$
$$<(l+\varepsilon)[g(x+T)-g(x)],$$
$$(l-\varepsilon)[g(x+2T)-g(x+T)]<f(x+2T)-f(x+T)$$
$$<(l+\varepsilon)[g(x+2T)-g(x+T)],$$

$$\cdots\cdots$$

$$(l-\varepsilon)[g(x+PT)-g(x+\overline{P-1}\,T)]<f(x+PT)$$
$$-f(x+\overline{P-1}T)<(l+\varepsilon)[g(x+PT)$$

$$-g\,(x+\overline{P-1}\,T)]$$

上述各式相加有

$$(l-\varepsilon)[g(x+PT)-g(x)]<f(x+PT)-f(x)$$
$$<(l+\varepsilon)[g(x+PT)-g(x)],$$
$$x\in[A,\ A+T],\ P=1,\ 2,\ \cdots \tag{6.1}$$

利用（6.1）的右边不等式可得

$$\frac{f(x+PT)}{g(x+PT)}<\frac{f(x)}{g(x+PT)}+(l-\varepsilon)\left(1-\frac{g(x)}{g(x+PT)}\right).$$

由于显然$f(x)$，$g(x)$在［A，$A+T$］中有界，当 $P\to+\infty$ 时 $g(x+PT)$关于x($x\in[A,\ A+T]$)一致趋于$+\infty$(见【注记1】)，故存在正整数P_0使

$$\frac{f(x+PT)}{g(x+PT)}<l+2\varepsilon,\qquad (P\geqslant P_0,\ x\in[A,\ A+T]),$$

于是对一切$y\geqslant A_0=A+P_0$，恒有

$$\frac{f(y)}{g(y)}<l+2\varepsilon,$$

从而 $$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{f(y)}{g(y)}\leqslant l+2\varepsilon.$$

由ε的任意性，故$\overline{\lim\limits_{y\to+\infty}}\dfrac{f(y)}{g(y)}\leqslant l.$

利用(6.1)的左边不等式同样可得$\underline{\lim\limits_{y\to+\infty}}\dfrac{f(y)}{g(y)}\geqslant l.$

于是 $$\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{g(y)}=\underline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{f(y)}{g(y)}=\overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{f(y)}{g(y)}=l.$$

亦即 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

【注记1】 证明当$P\to+\infty$时$g(x+PT)$关于$x\in[A,\ A+T]$

一致趋于$+\infty$，事实上，对任意给定的正数B，由于$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$，必存在正数$C>A$，使对一切$y>C$有：

$$f(y)>B, \tag{6.2}$$

取正整数P_0，使 $P_0>\dfrac{C-A}{T}$，则对一切$x\in[A,\ A+T]$，只要$P>P_0$，因$x+PT\geqslant A+P_0T>A+C-A=C$，故由(6.2)恒有

$$f(x+PT)>B,$$

所以我们要证的命题为真。

【注记2】 利用这个定理，我们可以解决一系列具体的问题，可参见Б.П. 吉米多维奇《数学分析习题集》（李荣冻译）第608～610题。这些题可直接利用本题结果进行解答。

【注记3】 对$l=+\infty$，$-\infty$的情形本题结论仍真，请读者自证。

7．利用第6题结果证明斯铎兹(Stolz) 定理2。

【证】 我们仅对$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$为有穷数的情形加以证明。对$l$为无穷的情形留给读者自证。

设$b_n<b_{n+1}$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$。要证明$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l$。

作函数

$$g(x)=b_n,\ x\in[n,\ n+1),\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

$$f(x)=a_n,\ x\in[n,\ n+1),\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

取$T=1$，则显然

(1) $g(x+1)>g(x)$，

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$，$f(x)$在$[a,+\infty)$的任意子区间上有