高等学校教学参考书

高等数学学习指导

（上）

上海铁道学院　夏肇源　编
朱学炎　审

中国铁道出版社
1990年·北京

内 容 提 要

本书是为高等工科院校专修科学生编写的一本学习《高等数学》参考书，它可以与西南交通大学孙乃褰老师主编的《高等数学》配套使用，亦可单独使用。

全书分上、下两册，本书为上册，是根据专修课教材《高等数学》（上）编写的，主要介绍了一元、多元函数微积分学、微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何、矩阵与线性方程组等学习时所要掌握的基本概念、定义、定理、基本公式等基础知识及其解题时的一般规律。为了帮助学生学习，书中选编了一定数量的例题和习题。

编写时除考虑专科学生的特殊情况外，还考虑本科生和自学者学习的需要。

高等学校教学参考书

高等数学学习指导（上）

上海铁道学院　夏肇源　编

中国铁道出版社出版、发行

责任编辑　李云国　　封面设计　刘景山

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092毫米 $\frac{1}{32}$ 印张：5.5 字数：125千

1990年2月第1版　第1次印刷

印数：1—5000册　定价：1.15元

ISBN 7-113-00602-7/O·22

前　言

本书是高等工科院校专修科学生学习“高等数学”的一本辅导教材。它可以与西南交通大学孙乃襄老师主编的《高等数学》配套使用，也可以单独使用。

本书内容包括：一元函数微积分学、多元函数微积分学、微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何、矩阵与线性方程组等。每章按下述三个部分编写：

一、内容提要　基本上按孙乃襄老师主编的“高等数学”的顺序，结合编者多年的教学实践体会，采用了如图、表等简明的表达方式，列出每章中的主要概念、定义、性质、定理、公式等基本内容。

二、例题分析　列举的例题，既体现每章的基本内容及具体要求，又通过对这些典型例题的分析，帮助读者弄清基本概念，掌握解题思路，介绍解题中的常用技巧，总结解题方法，归纳常见例题的类型，指出在解题过程中容易产生的错误及应注意的问题，提高读者分析问题和解决问题的能力。

三、练习题　选编了一部分基本题、中档题及铁道中的实际应用题，以充实“高等数学”一书中的习题，供读者复习、巩固、提高所学知识，检查学习效果而用的。

本书也可供电大、职大、业大、函大的学生以及其他自学高等数学的读者使用；也可供在高等工科院校专科讲授高等数学的教师作参考用。

本书承朱学炎教授审阅，他对原稿做了认真细致的修改，在此表示衷心的感谢。

限于编者水平，有不当之处，希望广大读者提出宝贵意见。

编　者

1989年1月于上海铁道学院

目　录

第一章　函　　数

一、内 容 提 要

（一）实数、绝对值、集合

1．实　　数

人们的实践活动总要与数打交道，它是数学中最基本的对象。数可归纳为

$$
\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\left\{\begin{matrix}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{matrix}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\end{cases}\\ \text{无理数}\left\{\begin{matrix}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{matrix}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}\\ \text{虚数}\end{cases}
$$

在高等数学中，所遇到的数，基本上都是实数。

2．绝对值

在高等数学中，经常要用到绝对值的知识，其中关于绝对值的不等式尤为重要。

实数 a 的绝对值定义为

$$
|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{当 } a < 0, \end{cases}
$$

它表示数 a 在数轴上的对应点到原点的距离。

绝对值的基本性质有：

（1）$|a| \geqslant 0$；

（2）$\sqrt{a^2} = |a|$；

（3）$|a+b| \leqslant |a| + |b|$；

（4）$|a-b| \geqslant |a| - |b|$；

（5）$|ab| = |a|\ |b|$；

（6）$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$（$b \neq 0$）。

3. 集　合

集合是数学中一个重要的基础概念，同时它也是一个基本的数学工具，应用也越来越广泛。

按照某一法则规定的研究对象的全体称为集合。集合里的各个对象称为这个集合的元素。

子集　设集合A的元素都属于集合B，则称A是B的子集。记作$A \subseteq B$或$B \supseteq A$，参看图1—1（a）。

并集　集合A和集合B的元素合在一起所成的集合称为A与B的并集，记作$A \cup B$，参看图1—1(b)。

交集　集合A和集合B中的公共元素所成的集合称为A与B的交集，记作$A \cap B$，参看图1—1(c)。

差集　属于集合A而不属于集合B的元素所成的集合称为A与B的差集，记作$A \setminus B$，参看图1—1(d)。

（二）函数的概念

在现实世界中，函数概念是普遍存在的，它是高等数学研究的主要对象。因此，要学好高等数学，必须把函数的一些基本知识理解得很清楚。

函数的定义　设有一个非空的实数集合D，如果对于D中每一个x，有一个对应规则f，按照f都能确定唯一的一个实数y与x对应，则称对应规则f为定义在D上的一个函

数，记作

$$y=f(x),\ x\in D。$$

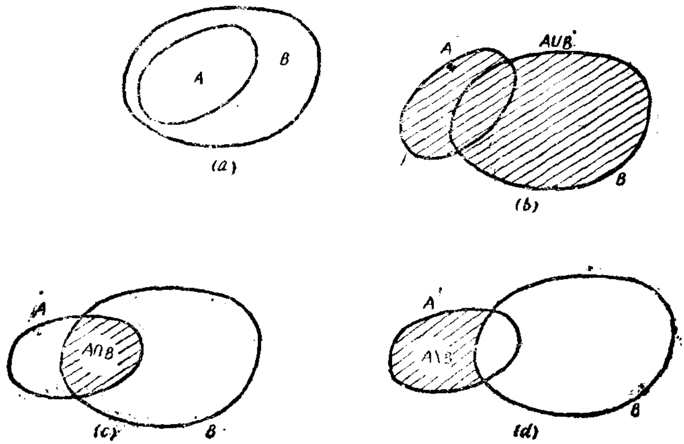


图 1—1

其中：x称为自变量；y称为因变量；集合D称为函数的定义域；所有对应的函数值所成的集合称为函数的值域，记作Z。

直观地说，函数的定义可以用两个圈圈和一个箭头来描述（如图1—2所示）圈圈D、Z分别表示两堆实数，箭头f表示某一规则，如果对于D中的任一个数x，按照这个箭头的规则，在Z中都有唯一确定的数y与x对应，则称对应规则f为函数。

一般地说，函数$y=f(x)$，$x\in D$的几何意义表示在直角坐标系xOy中，在x轴的区间D（或包括孤立的点）上的一条平面曲线。

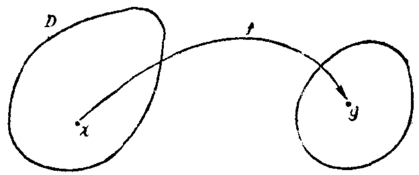


图 1—2

（三）显函数、隐函数、复合函数、参数方程所确定的函数、反函数

在高等数学中，给定的函数基本上是用公式表示的，因为这种表示法便于理论上的分析研究，而用公式表示的函数尤以显函数、隐函数、参数方程所确定的函数为多见。

显函数 形如

$$y=f(x)$$

的给定的函数，则称 y 为 x 的显函数。

隐函数 若自变量为 x 的函数 y 是由方程

$$F(x,y)=0$$

确定的，则称 y 为 x 的隐函数。

参数方程所确定的函数，设 t 为参变量，若自变量为 x 的函数 y 是由方程组

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

确定的，则称 y 为由参数方程所确定的 x 的函数。

复合函数 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，值域为 Z_g，并且 $Z_g\cap D_f\neq\phi$，于是，y 经过中间变量 u 而成为 x 的函数，记作

$$y=f[g(x)],\ x\in D=\{x\mid g(x)\in D_f,\ x\in D_g\}$$

这种函数称为由 $u=g(x)$ 与 $y=f(u)$ 复合而成的复合函数。

用图1—3所示来说明复合函数的含义。

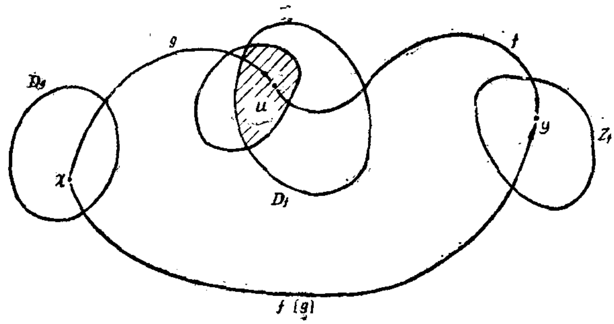


图 1—3

反函数 设函数f的定义域为D，值域为Z，如果对于任意$y\in Z$，存在唯一的$x\in D$，使$f(x)=y$，则称f有反函数，且与f相反的对应规则称为f的反函数，记作

$$x=f^{-1}(y),$$

习惯上，记作

$$y=f^{-1}(x)。$$

（四）函数的性质

1. 单调性

给定函数$y=f(x)$，$x\in D$，且$(a,b)\subseteq D$，如果对于任意x_1、$x_2\in(a, b)$，且$x_1<x_2$，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \qquad (\text{或}f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

成立，则称f在（a，b）内是单调增加的（或单调减小的）。

一般地说，函数$y=f(x)$在（a，b）内是单调增加（或减小）时，它的图形沿着x轴的正向是一条不降（或不升）的曲线。

2. 奇偶性

给定函数$y=f(x)$，其定义域D是关于原点O的对称区

间，如果对于所有$x\in D$，有

$$f(-x)=f(x) \qquad (\text{或} f(-x)=-f(x))$$

成立，则称f为D上的偶函数（或奇函数）。

偶函数的图形关于y轴对称；奇函数的图形关于坐标原点O对称。

奇、偶函数的下列基本性质是很重要的。

（1）两个奇（偶）函数的代数和是奇（偶）函数。

（2）两个奇（偶）函数的乘积是偶函数；奇函数与偶函数的乘积是奇函数。

（3）若$y=f(u)$及$u=g(x)$都是奇函数，则复合函数$y=f[g(x)]$也是奇函数。

（4）若$y=f(u)$是偶函数，$u=g(x)$是奇函数或偶函数，则复合函数$y=f[g(x)]$是偶函数。

（5）若$f(x)$是偶函数，且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$是偶函数。

3. 周期性

给定函数$y=f(x)$，其定义域为D，如果存在一个正数T，对于任意$x\in D$，有

$$f(x+T)=f(x),$$

其中：$x+T\in D$，则称f为周期函数。满足上述关系的T的最小正值称为f的周期。

以T为周期的周期函数$y=f(x)$的图形特点是在x轴上每隔长度T，重复出现这一个周期内的图形。

4. 有界性

给定函数$y=f(x)$，$x\in D$，且$A\subseteq D$，如果存在一个正数M，对于所有$x\in A$，有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称f在A上有界，否则，称f在A上无界。

在A上有界的函数$y=f(x)$的图形，在A上的那一条曲线必界于两条平行于x轴的直线$y=\pm M$之间。

（五）基本初等函数、初等函数

基本初等函数包括：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数。现将常用的一些基本初等函数的有关知识见表1—1。

初等函数 由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次复合而成的，并用一个式子表示的函数称为初等函数。

本课程中所讨论的函数，主要是初等函数。

二、例题分析

根据函数的定义，定义域D与对应规则f是函数关系中的两个要素。因此，如果两个函数具有相同的定义域和对应规则，那么它们是相同的。

【例1】 下列各对函数是否相同？为什么？

（1）$f(x)=\dfrac{x}{x(x-1)}$，　$g(x)=\dfrac{1}{x-1}$；

（2）$f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$，　$g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$；

（3）$y=2\ln x$，$x=2\ln y$；

（4）$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$。

【解】（1）$\because D_f=\{x\,|\,x\neq 0、1, x\in R\}$，

$D_g=\{x\,|\,x\neq 1, x\in R\}$，

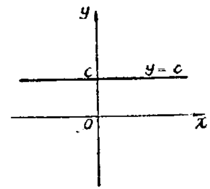
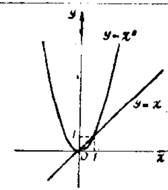
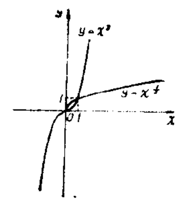
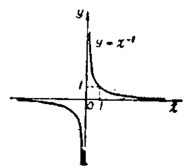
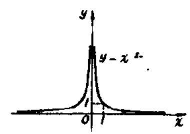
$\therefore$　$f(x)$与$g(x)$是不同的函数。

（2）$\because$　$D_f=\{x\,|\,x>2\}$，$D_g=\{x\,|\,x\leqslant 1$ 或 $x>2\}$，

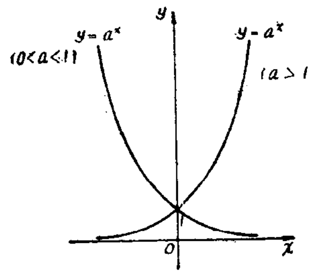
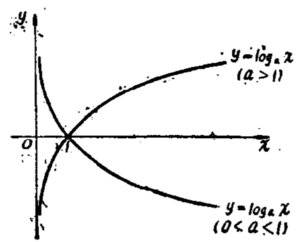
$\therefore$　$f(x)$与$g(x)$是不同的函数。

（3）函数与变量取什么字母是无关的。这两个函数有

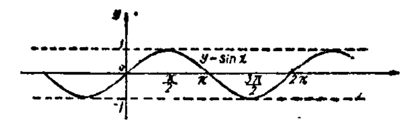
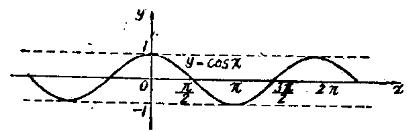
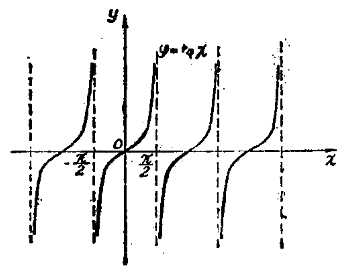
表1—1

<table>
<tr><th>名称</th><th>表达式</th><th>定义域</th><th>图形</th><th>基本性质</th></tr>
<tr><td>常数函数</td><td>$y=c$</td><td>$(-\infty,\ +\infty)$</td><td></td><td>图形是通过点$(0,\ c)$、且平行于 x 轴的直线</td></tr>
<tr><td>幂函数</td><td>$y=x^{a}$
$(a\neq 0)$</td><td>随a而不同，但在$(0, +\infty)$内都有定义。</td>
<td>   </td>
<td>（1）图形通过点$(1,\ 1)$
（2）a为偶数时，$y=x^{a}$为偶函数；a为奇数时，$y=x^{a}$为奇函数
（3）在第一象限内，当$a\gt 0$时，$y=x^{a}$为单调增加的；当$a\lt 0$时，$y=x^{a}$为单调减小的</td></tr>
</table>

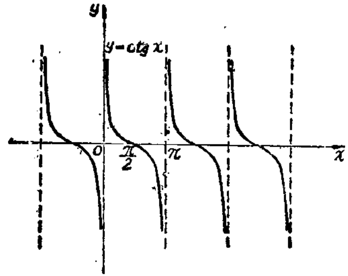
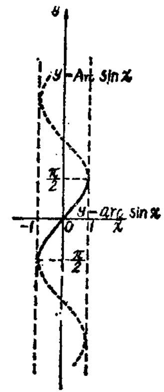
续上表

名称	表达式	定义域	图形	基本性质
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,$ $a\neq 0)$	$(-\infty,\ +\infty)$		（1）图形在x轴上方，且通过点$(0,\ 1)$ （2）当$0<a<1$时，$y=a^x$是单调减小的；当$a>1$时，$y=a^x$是单调增加的，$y\to+\infty(x\to+\infty)$，而$y\to 0(x\to-\infty)$
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,$ $a\neq 1)$	$(0,\ +\infty)$		（1）图形在y轴右侧，且通过点$(1,\ 0)$ （2）当$0<a<1$时，$y=\log_a x$是单调减小的；当$a>1$时，$y=\log_a x$是单调增加的，$y\to+\infty(x\to+\infty)$，而$y\to-\infty(x\to 0^+)$

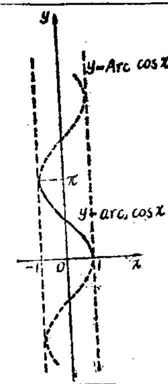
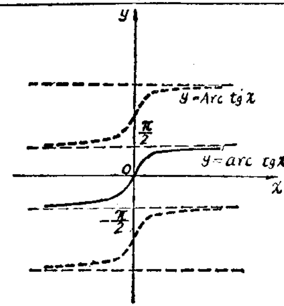
续上表

名称		表达式	定义域	图形	基本性质
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty, +\infty)$		（1）是以2π为周期的奇函数 （2）是有界函数，$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty, +\infty)$		（1）是以2π为周期的偶函数 （2）是有界函数，$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$
	正切函数	$y=\operatorname{tg} x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$		（1）是以π为周期的奇函数 （2）在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内，$y=\operatorname{tg} x$是单调增加的；$y\to\infty\left(x\to\frac{\pi}{2}\right)$

续上表

名称		表达式	定义域	图形	基本性质
三角函数	余切函数	$y=\mathrm{ctg}\,x$	$x \neq k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$)		(1) 是以 π 为周期的奇函数 (2) 在 $(0, \pi)$ 内，$y=\mathrm{ctg}\,x$ 是单调减小的；$y \to \infty\ (x \to 0)$
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1, 1]$		(1) 是单调增加的奇函数 (2) $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$

续上表

名称		表达式	定义域	图形	基本性质
反三角函数	反余弦函数	$y = \arccos x$	$[-1, 1]$		（1）是单调减小的 （2）$0 \leqslant y \leqslant \pi$
	反正切函数	$y = \mathrm{arc\,tg}\,x$	$(-\infty, +\infty)$		（1）是单调增加的奇函数，$y \to \frac{\pi}{2}$（$x \to +\infty$）；$y \to -\frac{\pi}{2}$（$x \to -\infty$） （2）是有界函数，$\lvert \mathrm{arctg}\,x \rvert < \frac{\pi}{2}$