高等数学

中册

（第二版）

主编 朱弘毅 副主编 沐国宝

上海科学技术出版社

高等专科学校学习指导丛书

高等数学

中 册

（第二版）

主　编　朱弘毅

副主编　沐国宝

——上海科学技术出版社——

高等专科学校学习指导丛书

高 等 数 学

中 册

（第二版）

主 编 朱弘毅

副主编 沐国宝

上海科学技术出版社出版、发行

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.75 字数 144 000

1998年6月第2版 1998年6月第3次印刷

印数：12 001—16 000

ISBN 7-5323-4563-7/O·215

定价：6.60元

前　言

本书分上、中、下三册，是与上海高等专科学校试用教材《高等数学》(上海科学技术出版社 1998 年第三版)配套的学习指导书。

编写本书的目的，是为高等数学的初学者在学习过程中提供一个指导老师，帮助他们解决学习中的困难。在编这本书时，我们注意到初学者往往对这门课程中的基本概念和重要理论的理解不透彻或产生错误，对掌握解题的方法和技巧感到困难，由于教材本身受篇幅的限制，不能针对学生在学习中可能遇到的诸多问题一一详述。因此，我们编写了这套与教材配套的学习指导书，希望能有助于初学者正确理解有关的概念和理论，更好地掌握解决问题的方法和技巧。

本书每章由内容提要、例题、习题选解、单元检测题四部分组成。例题及习题选解中题目一般都是较典型或较难的习题，单元检测题中，我们既考虑到知识的覆盖面，又注意突出重点内容来命题，分 A、B 两卷，其内容相近，要求基本相同。

上、中册附有高等数学试卷，下册附有线性代数、线性规划、概率论、数理统计试卷。

全书由朱弘毅主编，邵振和、沐国宝、张宛平分别为上、中、下册副主编，参加编写的还有周家华、邵建润、陆信芳、陈孩未、王建军、金毛弟、孙劼、张瑞瑾等。陆晋奎、秦跃堂、曹颖中等提供部分习题解答。

限于编者水平，加之时间仓促，书中的问题一定不少。恳请使用本书的师生提出宝贵意见。

编　者

1998 年 2 月

目　录

第八章　向量代数与空间解析几何 …… 1
一、内容提要 …… 1
二、例题 …… 8
三、习题选解 …… 20
四、单元检测题 …… 38

第九章　多元函数微分学 …… 43
一、内容提要 …… 43
二、例题 …… 50
三、习题选解 …… 60
四、单元检测题 …… 74

第十章　多元函数的积分 …… 76
一、二重积分与三重积分部分 …… 76
(一) 内容提要 …… 76
(二) 例题 …… 82
(三) 习题选解 …… 87
二、曲线积分与曲面积分部分 …… 101
(一) 内容提要 …… 101
(二) 例题 …… 106
(三) 习题选解 …… 112

三、单元检测题…………………………………………… 134

第十一章　级数…………………………………………… 137
一、内容提要…………………………………………… 137
二、例题…………………………………………… 145
三、习题选解…………………………………………… 157
四、单元检测题…………………………………………… 167

附录…………………………………………… 169
一、高等数学试卷…………………………………………… 169
二、单元检测题和高等数学试卷答案与提示………… 176

第八章　向量代数与空间解析几何

一、内容提要

1. 空间直角坐标系与向量代数

(1) 对照平面直角坐标系，建立空间直角坐标系　在空间任取定点 O，以 O 为原点在空间作三条互相垂直的数轴。这三条数轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴．三个坐标轴正向构成右手系，这样的三条坐标轴就构成了空间直角坐标系．由此建立起空间一点 M 与一个有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系．

(2) 既有大小，又有方向的量称为向量　向量的大小称为模．在坐标系中向量$\boldsymbol{a}$及模$|\boldsymbol{a}|$可表示为

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

与向量$\boldsymbol{a}$同方向的单位向量，记$\boldsymbol{a}^0$，即

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{i}+\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{j}+\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{k}.$$

向量$\boldsymbol{a}$与 x、y、z 轴的夹角记为 α、β、γ $(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$ 称 α、β、γ 为向量$\boldsymbol{a}$的方向角，称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量$\boldsymbol{a}$的方向余弦，并且

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}.$$

(3) 把向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的起点放在一起，以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为邻边作平行四边形，则从起点到对顶点的向量称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量$\boldsymbol{a}$与数λ的乘积是一个向量，记为$\lambda\boldsymbol{a}$称为向量的数乘. 当$\lambda>0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$方向相同；当$\lambda=0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$是零向量；当$\lambda<0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$方向相反. $\lambda\boldsymbol{a}$的模是$|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的数量积等于$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$，记为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$.

向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的向量积定义为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})\boldsymbol{n}^0$，其中$\boldsymbol{n}^0$是同时垂直$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的单位向量，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{n}^0$符合右手法则.

(4) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\lambda\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的坐标表示

若$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

(5) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为向量，λ、μ为实数，有下性质：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

$$\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a},$$

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a}),$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c},$$

$$(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a},$$

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}).$$

非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$的充要条件为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$　或

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$的充要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　或

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

2. 平面方程的几种常见形式(点法式、一般式、截距式)及其关系

名　称	方　　程	备　　注
点法式	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	平面通过点(x_0,y_0,z_0)，且法向量为$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$
一般式	$Ax+By+Cz+D=0$	法向量$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ $(a,b,c\neq0)$	a,b,c 分别为平面在 x,y,z 轴上的截距

直线方程的几种常见形式(点向式、参数式、一般式)及其关系.

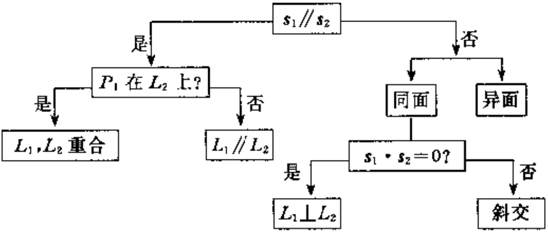
名　称	方　　程	备　　注
点向式	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$	直线通过点(x_0,y_0,z_0)，且方向向量为$\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$
参数式	$x=x_0+lt$ $y=y_0+mt$ $z=z_0+nt$	直线通过点(x_0,y_0,z_0)，且方向向量为$\boldsymbol{s}=\{l,m,n\}$，t 为参数.

(续表)

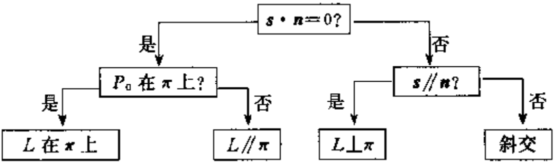
名称	方程	备注
一般式	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的交线.

3. 直线与直线、平面与平面、直线与平面的位置关系及点到平面的距离

(1) 直线与直线的关系,设直线 L_1,L_2 的方向向量分别为$\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$,$P_1$ 为 L_1 上的某一点. 直线 L_1 与 L_2 的位置关系是为



(2) 直线与平面的位置关系　设平面 π 的法向量为$\boldsymbol{n}$,直线 L 的方向向量为$\boldsymbol{s}$,P_0 为 L 上的一定点. 直线 L 与平面 π 的位置关系为

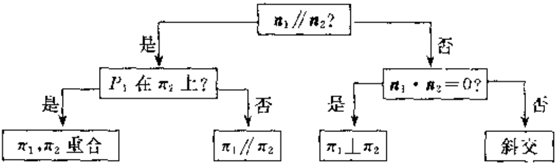


直线 L 与平面 π 的夹角公式为

$$\sin(\widehat{\pi,L}) = |\cos(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})| = |\boldsymbol{s}^0 \cdot \boldsymbol{n}^0|$$

(3) 平面与平面的关系　设平面 π_1,π_2 的法向量分别为

$\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, P_1$ 为 π_1 上某一点. π_1 与 π_2 的位置关系为



平面 π_1 与 π_2 的夹角公式为

$$\cos(\pi_1 \hat{,} \pi_2) = \cos(\boldsymbol{n}_1 \hat{,} \boldsymbol{n}_2) = \boldsymbol{n}_1{}^0 \cdot \boldsymbol{n}_2{}^0$$

(4) 点到平面的距离　设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 外的一点,由 P_0 作平面 π 的垂线,其垂足是 $P_1(x_1, y_1, z_1)$,又取 π 上另一点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$,则 P_0 到 π 的距离 d 为

$$d = |\overrightarrow{P_2P_0} \cos(\overrightarrow{P_2P_0} \hat{,} \boldsymbol{n})| = \frac{|\overrightarrow{P_2P_0} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4. 空间曲面方程的概念,常见曲面(球面、柱面、旋转面)的概念及其方程的建立. 使读者熟悉常见曲面的图形及方程特征

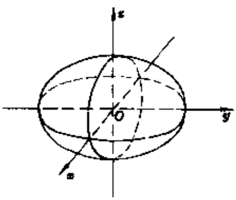
使读者理解空间曲线作为两曲面交线的概念及其在坐标面上的投影概念,用截痕法讨论常用二次曲面(椭球面、椭圆抛物面、单叶双曲面和双叶双曲面)的图形.

名称	曲　面　方　程	曲面形成及方程特征
球面	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$	空间中与某一定点(x_0, y_0, z_0)等距离 R 的点的轨迹,球心(x_0, y_0, z_0),半径 R. 它是关于 x, y, z 的二次方程,且 x^2, y^2, z^2 项系数相同,不含 xy, yz, zx 等乘积项.

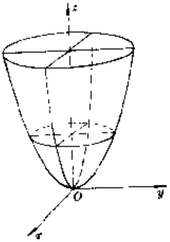
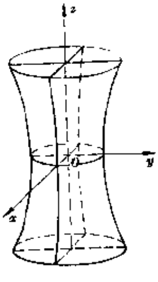
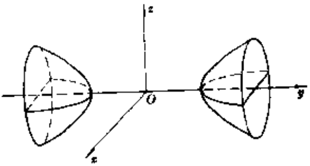
(续表)

名称	曲面方程	曲面形成及方程特征
柱面	$F(x,y)=0$，准线 $\begin{cases}F(x,y)=0\\z=0\end{cases}$ 母线平行于 z 轴	平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的轨迹称为柱面. 定曲线 C 称为柱面的准线，动直线 L 称为柱面的母线. 柱面方程中只出现两个变量，其母线平行于不出现的那个变量的同名轴.
	$G(y,z)=0$，准线 $\begin{cases}G(y,z)=0\\x=0\end{cases}$ 母线平行于 x 轴	
	$H(z,x)=0$，准线 $\begin{cases}H(z,x)=0\\y=0\end{cases}$ 母线平行于 y 轴	
旋转曲面	$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$ 母线 C：$\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$ 旋转轴 Ox 轴	一平面曲线 C 绕同一平面上的一条定直线 l 旋转所形成的曲面. 曲线 C 称为旋转曲面的母线，直线 l 称为旋转曲面的轴. 以坐标轴为旋转轴的旋转曲面方程中含有两个变量的平方和.
	$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$ 母线 C：$\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$ 旋转轴 Oy 轴	

常用二次曲面方程及图形列表如下：

曲面名称	标准方程	图形
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0,b>0,c>0)$	

（续表）

曲面名称	标准方程	图　形
椭　圆 抛物面	$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$ $(p>0,q>0)$	
单　叶 双曲面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0,b>0,c>0)$	
双　叶 双曲面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ $(a>0,b>0,c>0)$	

二、例　　题

例1　求点 $M(3,-4,1)$关于(1)各坐标面,(2)各坐标轴,(3)坐标原点的对称点的坐标.

解　(1) 设点 $M(3,-4,1)$关于 xOy 面的对称点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,则 MM_1 的中点的横坐标、纵坐标分别为 3,-4. 而竖坐标在 xOy 面上为 0. 为$(3,-4,0)$. 所以有$\frac{x_1+3}{2}=3,\frac{y_1-4}{2}=-4,\frac{z_1+1}{2}=0$,从而得 M_1 的坐标$(3,-4,-1)$.

同样可求得 M 关于 yOz,zOx 平面的对称点分别为$(-3,-4,1),(3,4,1)$.

(2) 设 M 关于 Ox 轴的对称点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,则 MM_2 的中点为$(3,0,0)$,所以有$\frac{x_2+3}{2}=3,\frac{y_2-4}{2}=0,\frac{z_2+1}{2}=0$,从而得 M_2 的坐标为$(3,4,-1)$.

同样可求得 M 关于 Oy,Oz 轴的对称点分别为$(-3,-4,-1),(-3,4,1)$.

(3) 设点 M 关于原点的对称点为 $M_3(x_3,y_3,z_3)$. 则 MM_3 的中点坐标为$(0,0,0)$. 所以有$\frac{x_3+3}{2}=0,\frac{y_3-4}{2}=0,\frac{z_3+1}{2}=0$,从而得 $M_3(-3,4,-1)$.

例2　已知:两点 $M_1(1,0,3)$和 $M_2(1,5,-1)$. 求:

(1) $\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式;(2) $\overrightarrow{M_1M_2}$的模;

(3) 与$\overrightarrow{M_1M_2}$方向一致的单位向量;

(4) 与 Ox 轴的方向角.

解　(1) $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-1,5-0,-1-3\}=\{0,5,-4\}$;

(2) $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{0^2+5^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$;

(3) $\overrightarrow{M_1M_2}^0=\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\dfrac{1}{\sqrt{41}}\{0,5,-4\}$;

(4) 与 Ox 轴的方向余弦为 $\cos\alpha=0$,故方向角为$\dfrac{\pi}{2}$.

例 3 设向量$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$的终点 B 的坐标为 $(2,-1,7)$,求它始点 A 的坐标及$\boldsymbol{a}$的方向余弦.

解 设始点 A 的坐标(x,y,z),由$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$,得

$\{4,-4,7\}=\{2-x,-1-y,7-z\}$. 从而得 $x=-2,y=3,z=0$. 即始点坐标为$(-2,3,0)$.

又∵ $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}=9$.

所以方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{4}{9},\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{-4}{9},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{7}{9}.$$

例 4 已知:一为 10 牛的力$\boldsymbol{F}$与 Oy 轴成 45°,与 Oz 轴成 60°. 求此力$\boldsymbol{F}$.

解 设力$\boldsymbol{F}$的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$.

由题意,得 $\beta=45^\circ,\gamma=60^\circ$,

$$\therefore\quad \cos^2\alpha=1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4},\ \cos\alpha=\pm\frac{1}{2}.$$

因此所求力$\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$

$$=10\left\{\pm\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\{\pm5,5\sqrt{2},5\}.$$

例 5 在 xOy 平面上,求垂直于$\boldsymbol{a}=\{2,-1,2\}$并与它有等长的向量.

解 设所求向量为$\boldsymbol{b}=\{x,y,0\}$，

$\because$ $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$，

$\therefore$ $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x^2+y^2+0^2}=3$.

即
$$x^2+y^2=9 \quad ①$$

又 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\therefore$ $2x-y=0$. ②

由①，②可解，得$x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，$y=\pm\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

即所求向量为

$$\left\{\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{6}{\sqrt{5}},0\right\} \text{ 及 } \left\{-\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{6}{\sqrt{5}},0\right\}.$$

例 6 设$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，

(1) 当$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$时，求$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$，

(2) 当$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{3}$时，求$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=6\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}\\&=-11\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|&=11|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=11|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})\\&=11\times2\times1\times1=22.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=6|\boldsymbol{a}|^2+7|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})-3|\boldsymbol{b}|^2\\&=6\times2^2+7\times2\times1\times\frac{1}{2}-3\times1^2=28.\end{aligned}$$

例 7 设三个力$\boldsymbol{F}_1=\{2,-3,1\}$，$\boldsymbol{F}_2=\{2,-2,1\}$，$\boldsymbol{F}_3=\{-1,1,3\}$. 同时作用于一质点，使质点沿直线方向从$A$点$(1,0,0)$位移到$B$点$(0,0,1)$，求合力$\boldsymbol{F}$所作的功（力的单位为牛，距离单位为米）并求合力$\boldsymbol{F}$与位移$\overrightarrow{AB}$的夹角.