高等学校试用教材

离散数学基础

蔡高火　编著

广西师范大学出版社

内　容　简　介

本书除比较系统地介绍离散数学的传统基本内容外，为适应高等师范院校数学专业的需要，还阐述了组合分析等内容．全书包括集合论、数理逻辑、组合分析、图论和代数系统等五个部分，共八章．

本书可作为高等院校计算机专业和高等师范院校数学专业教材或参考书，也可供中等学校数学教师和计算机工作者参考．

（桂）新登字 04 号

离 散 数 学 基 础

蔡高火　编著

责任编辑：麦瑞钿　　　封面设计：罗克中

广西师范大学出版社出版　　　邮政编码：541001

（广西桂林市中华路 36 号）

广西新华书店发行　　　湖南省地质测绘印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32　印张：11.625　字数：300 千字

1992 年 8 月第 1 版　　1993 年 4 月第 2 次印刷

印数：2001—3500 册

ISBN 7-5633-1318-4/G・1072

定价：5.30 元

前　言

离散数学是以离散量为研究对象的一门学科,它形成于本世纪70年代.由于计算机科学的发展和计算机应用领域的日益广泛,迫切需要一些适当的数学工具来解决计算机各领域中提出的理论问题.同时,计算机的进步,也为许多单靠人工操作难以实现的计算问题提供了强有力的计算工具.离散数学作为一门学科,就是在这样的背景下建立和发展起来的.离散数学的内容十分丰富,涉及的面也很广,诸如集合论、组合论、图论、代数系统、数理逻辑、形式语言、可计算性理论、自动机理论、离散概率等,都属于离散数学讨论的范畴.

离散数学最先是作为理工科院校计算机专业的一门重要的专业基础课开设的,最近几年离散数学逐步受到重视,开设这门课程的专业也越来越多,不少师范院校的数学专业也把离散数学列为选修或必修课程.本书就是为计算机专业和高等师范院校数学专业编写的教学用书,并经过了多年的教学实践.本书的取材既考虑了计算机专业的需要,也考虑了高等师范院校数学专业的要求,并对所选题材作了精心的安排.全书由五个部分组成,共八章,第一至第三章为集合论的基本知识(含集合、二元关系和映射),第四、第五章为数理逻辑(含命题逻辑和谓词逻辑),第六章为组合分析,第七章为图论,第八章为代数系统.各部分内容具有相对的独立性.各专业可以根据本专业的要求和教学时数的多少,来确定选择讲授其中的内容.例如,对计算机专业来说,可以不讲授组合分析;对于数学专业来说,如果集合论的基础知识已在其它课程中讲授过,抽象代数又已作为一门独立课程开设,那么可以只讲授数理逻

辑、组合分析和图论;如果课时较少,也可以只讲授组合分析和图论两章,甚至还可以把数理逻辑、组合分析、图论作为专题讲座的材料,分散在若干个学期里对学生进行讲授.

本书除可作为教材外,对没有学习过离散数学的中学数学教师来说,也很有参考价值,阅读本书不但可以扩大知识面,而且对指导中学生开展课外活动也将会有所帮助.

本书在阐述基本内容时,力求做到通俗易懂,便于自学,但又不失严谨性.书中选配有一定数量的例题,每小节都配有相当数量的习题.通过这些例题和习题,可以帮助读者加深对教材内容的理解,掌握具体的解题方法和处理问题的思想方法.书末还附有习题答案或提示,供自学本书的读者参考.

苏健基教授和吴淑岩副教授仔细认真地审阅了本书的书稿,提出了许多宝贵的意见和建议,特别是苏健基教授对全书进行了审定,在此谨对他们表示衷心的感谢.

本书的出版还得到了广西师范大学数学系领导、系教材评审小组老师们的热情支持,以及广西师范大学出版社的赞助,在此对他们也表示衷心的感谢.

此外,在本书的编写过程中,曾参阅了许多专家、学者的著作,在此谨向有关作者表示谢意.

由于本人的水平有限,错误和缺点在所难免,诚恳希望读者和使用本教材的老师们批评指正.

编　者

1992年2月于桂林

目　　录

第一章　集　合

集合论问世至今，只有一百来年的历史．德国数学家 G・康托尔(G. Cantor，1845～1918)最初发表集合论著作时，集合论的重要性还仅仅为少数几个数学家所赏识．然而，今天集合论已成为数学的一个分支，集合论的思想已渗透到几乎所有的数学分支，可以说，集合论是现代数学大厦的基石，所有数学概念的精确定义，都是建立在集合论基础上的；集合论的语言已成为全世界数学家的公共用语．

本章不准备对集合论作深入的讨论，只介绍关于(朴素)集合论的基本知识．

§1　集合论的基本概念

1.1　集合、元素及其表示法

集合是现代数学中最基本的概念之一，也是数学中的一个原始概念，因此无法用更简单的概念给它以精确的定义，正如几何中的点、直线一样，我们只能对它作适当的直观的描述和说明．

一些确定的事物(对象)，把它们作为整体看待，这个整体就称为**集合**(简称为**集**)．这句话不能当作是集合的定义来理解，因为“整体”与“集合”实质上是同义词而已．

关于集合，有一点很重要，就是集合中包含的事物(对象)必须是完全确定的，即对任何一个事物(对象)，都要求能确切地判断它是否属于这个集合，不能模棱两可，也不能兼而有之．例如，“一切非负实数”构成一个集合；“小于 5 的整数”也构成一个集合．但是，“绝对值充分小的所有实数”就不能看作是一个集合，因为“充分

小"的含义不明确，究竟绝对值小于或等于多少才算充分小呢？比如 0.03 算不算是绝对值充分小的数呢？无法给出确切的回答.

我们把构成集合的每一个事物（对象），称为这个集合的**元素**，也就是说，集合中的每一个事物（对象）都称为该集合的元素. 如果一个集合是由某些数构成的，那么这个集合的元素就是数；如果一个集合是某个固定平面上的点所组成，那么它的元素就是该平面上的点.

习惯上用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素.

若 a 是集合 A 的元素，就记作 $a\in A$，读作"a 属于 A".

若 a 不是集合 A 的元素，就记作 $a\notin A$，读作"a 不属于 A".

对于集合，有两种常用的表示方法：列举法和描述法.

(1) **列举法**　就是列举出集合的所有元素，并把这些元素写在花括号内. 例如，设 A 是由五个英文元音字母 a,e,i,o,u 组成的集合，则集合 A 可以表示成

$$A=\{a,e,i,o,u\}.$$

又如，由绝对值不大于 3 的整数组成的集合 B 可以表示为

$$B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}.$$

一般地，若集合 M 是由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的，则 M 可以表示为

$$M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的书写次序，就是说，对于给定的集合，其元素被重新排列，仍看作是同一个集合. 例如，$\{1,2,3\}$，$\{2,1,3\}$，$\{3,1,2\}$ 都表示同一个集合.

(2) **描述法**　就是把集合中的元素所具有的特征性质描述出来，并把它写在花括号内. 具体的表示方法是：在花括号内先写上一个字母表示该集合的元素，再划一竖线，然后在竖线右边写上这个集合的元素所具有的特征性质. 例如，上述集合 A 和 B 可以用

描述法分别表示为

$$A=\{x \mid x\text{ 是英文元音字母}\},$$

$$B=\{x \mid x\text{ 是整数且 }|x|\leqslant 3\}.$$

又如，方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集合 S 可以用描述法表示为

$$S=\{x \mid x^2-3x+2=0\}.$$

一般地，设 P 表示某性质，若集合 A 是由具有性质 P 的元素 x 所组成，则 A 可以表示为

$$A=\{x \mid x\text{ 具有性质 }P\} \quad \text{或} \quad A=\{x \mid P(x)\}.$$

一个集合 A，若它只含有限个元素，则称它为**有限集**. 例如 $A=\{a,e,i,o,u\}$，$B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$和 $S=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$都是有限集. 含有无限多个元素的集合称为**无限集**①. 例如，全体自然数组成的集合，全体有理数组成的集合，全体正实数组成的集合都是无限集.

下面一些集合是常用的无限集，我们用专门的大写字母来表示这些集合.

全体自然数的集合称为**自然数集**，记作 N；

全体整数的集合称为**整数集**，记作 Z；

全体有理数的集合称为**有理数集**，记作 Q；

全体实数的集合称为**实数集**，记作 R；

全体复数的集合称为**复数集**，记作 C.

此外，有时我们还用 Q^+ 和 R^+ 分别表示正有理数集和正实数集，用 Q^- 和 R^- 分别表示负有理数集和负实数集，等等.

最后，关于集合我们还要指出一点，就是对于一个给定的集合，如无特别说明，总是假定集合中的元素是互不相同的，也就是说，如果集合中的某元素被重复，那么被重复的元素只能算作这个集合中的一个元素. 例如，$D=\{1,2,3\}$ 与 $F=\{1,2,1,6/3,3\}$ 看作

---

① 有限集与无限集的严格定义将在第三章 § 4 给出.

是同一个集合．通常所指的集合，都是假定其中的元素是没有重复的．有时也会遇到允许元素重复出现的情况，此时，我们称它为**多重集**（简称为**重集**）．关于多重集的概念，我们将在第六章中介绍．

1.2　子集

这一段我们讨论集合间的关系：包含关系和相等关系．

定义 1.1　设 A,B 是两个集合，若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 为 B 的**子集**，记作

$$A\subseteq B \quad 或 \quad B\supseteq A.$$

读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”．

由定义 1.1 可以推出下列命题成立：

命题 1　对任何集合 A，都有 $A\subseteq A$．

命题 2　对于集合 A,B,C，若 $A\subseteq B,B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$．

命题 2 可证明如下：

设 $x\in A$，因为 $A\subseteq B$，所以 $x\in B$，又因为 $B\subseteq C$，所以 $x\in C$，因此 $A\subseteq C$．

若 A 不是 B 的子集，就记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$．读作“A 不包含于 B”或“B 不包含 A”．A 不是 B 的子集，意味着 A 中至少有一个元素不属于 B．

如果集合 A 是集合 B 的子集，但 B 中至少有一个元素不属于 A，就称 A 是 B 的**真子集**，记作

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A.$$

下面定义两个集合相等．

定义 1.2　设 A,B 是两个集合，如果 A 与 B 所含的元素完全相同，就称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$．

例如，$A=\{1,2,3,6\}$，$B=\{x|x 是 6 的正因数\}$，则 $A=B$．

如果集合 A 与集合 B 不相等，就记作 $A\neq B$．

关于集合的包含关系与相等关系两者之间的关系，有如下的重要定理：

全

定理 1.1 设 A,B 是两个集合，则 $A=B$ 的充分必要条件是 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

证 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 A 中的每一个元素都是 B 的元素，并且 B 中的每一个元素也都是 A 的元素，因此 A 与 B 含有相同的元素，故 $A=B$.

反过来，若 $A=B$，则 A 与 B 含有完全相同的元素，因此，A 中的每一个元素都是 B 的元素，并且 B 中的每一个元素也都是 A 的元素，故有 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$. ■

这个定理在以后证明两个集合相等时，起着重要的作用. 即我们要证明 $A=B$ 时，通常不是证明 A 与 B 含有相同的元素，而是证明 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 同时成立.

1.3 全集与空集

在集合论的应用中，通常总是把所研究的所有集合，都看作是某个固定的“较大”的集合的子集，这个“较大”的集合就称为**全集**或**论域**. 通常用 I 表示全集. 因此，对所讨论的任何集合 A，都有 $A\subseteq I$.

例如，在平面几何中，全集是由平面内的所有点组成的；在讨论一元不等式的解时，全集是实数集 $\mathbf{R}$；在人口问题的研究中，全集可看作是由居住在地球上的所有人组成的集合，等等.

对于给定的全集 I 和某一特征性质 P，在 I 中可以不存在任何具有性质 P 的元素. 例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，不存在任何实数 x 能满足不等式 $x^2<0$，即在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $\{x\mid x^2<0,x\in\mathbf{R}\}$ 不含任何元素.

我们称不含任何元素的集合为**空集**，通常用 $\varnothing$ 表示空集. 例如，$\{x\mid x^2<0,x\in\mathbf{R}\}$ 就是一个空集，即

$$\varnothing=\{x\mid x^2<0,x\in\mathbf{R}\}.$$

由于空集 $\varnothing$ 不含任何元素，所以对任何一个集合 A 来说，$\varnothing$ 中不存在任何不属于 A 的元素，因此，空集是任何集合的子集，即

下面的命题成立：

命题 3 对任何集合 A，都有 $\varnothing \subseteq A$.

1.4 幂集

对于给定的集合，我们还将讨论它的某些子集，于是需要考虑以集合为元素的集合，遇到这种情形时，为了避免混淆，有时我们称以集合为元素的集合为**集族**或**集类**.

例 1.1 设 $A=\{1,2,3,4\}$，则 A 中含三个元素的子集有：$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$.

令 $A^*=\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$，则 A^* 就是一个集族.

$B^*=\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}\}$ 也是一个集族.

显然，B^* 的每一个元素都是 A^* 的元素，此时我们也称 B^* 是 A^* 的**子(集)族**.

对于给定的集合 A，我们常常要讨论由 A 的所有子集所组成的集族，这个集族通常称为 A 的幂集.

定义 1.3 设 A 是一个集合，由 A 的所有子集构成的集族，称为 A 的**幂集**，用 $P(A)$ 表示.

例 1.2 设 $A=\{a,b,c\}$，则

$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

关于幂集，有如下的定理：

定理 1.2 设 A 是含 n 个元素的有限集，则 $P(A)$ 有 2^n 个元素.

证 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，我们在 $P(A)$ 的元素(即 A 的子集)与 n 位的二进制数 $b_1b_2\cdots b_n$ 之间建立一个对应关系，当 A 的某个子集中出现有 a_i 时，则对应的 b_i 为 1，当不出现有 a_i 时，则对应的 b_i 为 0. 例如 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，对应于 A 的子集 $\{a_1,a_3\}$ 的四位二进制数为 1010，而与二进制数 0111 对应的 A 的子集为 $\{a_2,a_3,a_4\}$. 这样，每一个 A 的子集都唯一地对应着一个 n 位的二进制数；反之，

每一个 n 位的二进制数也对应着 A 的一个子集，因此 $P(A)$ 的元素个数等于 n 位的二进制数的个数. 因为 n 位的二进制数共有 2^n 个，故 $P(A)$ 的元素个数为 2^n. ▌

若用 $|A|$ 表示有限集 A 的元素个数，则有 $|P(A)|=2^{|A|}$.

在结束本节之前，我们还要指出一点，就是必须把以集合 A 为元素的集族 $\{A\}$ 同 A 本身区别开来. 例如，$A=\{1,2\}$，则 $\{A\}$ 是只含一个元素 A 的集族，而 A 是由 1 和 2 两个数组成的集合. 又如，$\varnothing$ 是不含任何元素的空集，而 $\{\varnothing\}$ 则是含有一个元素 $\varnothing$ 的集族.

习题 1.1

1. 用列举法给出下列集合：

(1) 小于 5 的非负整数的集合；(2) 10 到 20 之间的素数的集合；

(3) 不超过 65 的 12 的正整数倍数的集合；

(4) $\{x\mid x^2+x-6=0, x\in\mathbf{Z}\}$；(5) $\{x\mid x$ 是 36 的正因数$, x\in\mathbf{Z}\}$.

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 不超过 100 的自然数的集合；

(2) $\{1,2,3,\cdots,79\}$；(3) 奇整数的集合；

(4) 能被 5 整除的整数的集合；(5) 正偶数的集合.

3. 设全集 $I=\mathbf{Z}$，试确定下列集合哪些是相等的：

$A=\{x\mid x^2-1=15$ 且 $x^3=1\}$；$B=\{x\mid x=2y\}$；

$C=\{x\mid x^2-6x+8=0\}$；$D=\{2x\mid x\in\mathbf{Z}\}$；

$E=\{x\mid x^2+1=0\}$；$F=\{4,2,4,2\}$.

4. 确定下列关系中哪些是正确的，并说明理由.

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$；(2) $\varnothing\in\varnothing$；(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$；(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$；

(5) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$；(6) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$；

(7) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{a,b\}\}$；(8) $\{a,b\}\in\{a,b,\{a,b\}\}$.

5. 设 A,B 是集合，$A\subseteq B$ 与 $A\in B$ 能同时成立吗？并说明理由.

6. 列举下列各集合的所有子集：

(1) $\{1,2,3\}$；(2) $\{1,\{2,3\}\}$；(3) $\{\{1,\{2,3\}\}\}$；

(4) $\{\varnothing\}$；(5) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$；(6) $\{\varnothing,a,\{b\}\}$.

§2 集合的运算

本节我们讨论集合的运算，在这一节里所涉及的所有集合，都假定是全集 I 的子集.

2.1 交集与并集

定义 2.1 设 A,B 是两个集合，由 A 与 B 的公共元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$(可读作"A 交 B")，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

当 $A\cap B=\varnothing$ 时，称 A 与 B **不相交**，或称 A 与 B **分离**.

当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，称 A 与 B **相交**.

例 2.1 设 $A=\{1,2,3,6\}$，$B=\{1,2,5,10\}$，则

$$A\cap B=\{1,2\}.$$

此处，若把 A 与 B 分别看作是 6 与 10 的正因数的集合，则 $A\cap B$ 就是 6 与 10 的正公因数的集合.

例 2.2 设 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid -2<x\leqslant 3, x\in\mathbf{R}\}$，$C=\{x\mid x<0, x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap C$.

解
$$\begin{aligned}A\cap B&=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4, x\in\mathbf{R}\}\cap\{x\mid -2<x\leqslant 3, x\in\mathbf{R}\}\\&=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3, x\in\mathbf{R}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B\cap C&=\{x\mid -2<x\leqslant 3, x\in\mathbf{R}\}\cap\{x\mid x<0, x\in\mathbf{R}\}\\&=\{x\mid -2<x<0, x\in\mathbf{R}\}.\end{aligned}$$

$$A\cap C=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4, x\in\mathbf{R}\}\cap\{x\mid x<0, x\in\mathbf{R}\}=\varnothing.$$

例 2.3 设 $A=\{(x,y)\mid 3x+2y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y=2\}$，求 $A\cap B$.

解
$$\begin{aligned}A\cap B&=\{(x,y)\mid 3x+2y=1\}\cap\{(x,y)\mid x-y=2\}\\&=\{(x,y)\mid 3x+2y=1 \text{ 且 } x-y=2\}\\&=\{(1,-1)\}.\end{aligned}$$

即 $A\cap B=\{(1,-1)\}$ 是二元一次方程组

$$\begin{cases}3x+2y=1,\\ x-y=2\end{cases}$$

的解集合.

定义 2.2 设 A,B 是两个集合,由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的**并集**,记作 $A\cup B$(可读作"A 并 B"),即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

A 与 B 的并集实际上就是 A 的元素与 B 的元素合并而成的集合(重复的元素只取一个).

例 2.4 设 $A=\{1,2,3,6,\}$,$B=\{1,2,5,10\}$,则

$$A\cup B=\{1,2,3,5,6,10\}.$$

例 2.5 设 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid -2<x\leqslant 3,x\in\mathbf{R}\}$,求 $A\cup B$.

解 $A\cup B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 4,x\in\mathbf{R}\}\cup\{x\mid -2<x\leqslant 3,x\in\mathbf{R}\}$

$\qquad=\{x\mid -2<x\leqslant 4,x\in\mathbf{R}\}$.

例 2.6 求不等式 $x^2+x-6\geqslant 0$ 的解集合.

解 $\because$ $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$,

$\therefore$ 不等式 $x^2+x-6\geqslant 0$ 的解集合是

$\{x\mid x^2+x-6\geqslant 0\}=\{x\mid (x+3)(x-2)\geqslant 0\}$

$\quad=\{x\mid (x+3)\geqslant 0 \text{ 且 } x-2\geqslant 0\}\cup\{x\mid x+3\leqslant 0 \text{ 且 } x-2\leqslant 0\}$

$\quad=\{x\mid x\geqslant 2\}\cup\{x\mid x\leqslant -3\}$

$\quad=\{x\mid x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant -3\}$.

由集合的交与并的定义,立即可推知下面的命题 4 成立.

命题 4 对任何集合 A,B,C 都有

(1) $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$; (2) $A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.

集合的包含关系与交、并运算之间有如下的重要关系:

命题 5 设 A,B 是两个集合,则如下两结论成立:

(1) 当且仅当 $A\cap B=A$ 时,$A\subseteq B$;

(2) 当且仅当 $A\cup B=B$ 时,$A\subseteq B$.

证 我们只证明(1).(2)的证明留给读者.

设 $A\cap B=A$,则对任何 $x\in A$,都有 $x\in A\cap B$,从而 $x\in B$,故 $A\subseteq B$.

反过来,设 $A\subseteq B$,若 $x\in A$,则 $x\in B$,从而 $x\in A\cap B$,故 $A\subseteq A\cap B$ 成立;另一方面,由命题 4 知,$A\cap B\subseteq A$,因此根据定理 1.1 得,$A\cap B=A$.

由命题 5 可以直接推得:若 $A\cap B=A$,则必有 $A\cup B=B$;反之也对.

2.2 差集、补集与对称差

定义 2.3 设 A,B 是两个集合,由属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的**差集**,记作 $A-B$(可读作"A 减去 B"),即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\}.$$

例 2.7 设 $A=\{1,2,3,6\}$,$B=\{1,2,5,10\}$,则

$$A-B=\{3,6\},\ B-A=\{5,10\}.$$

由这个例子可以看出,$A-B$ 与 $B-A$ 一般来说是不相等的.

显然,对任何集合 A 来说,都有

$$A-A=\varnothing,\ A-\varnothing=A,\ \varnothing-A=\varnothing.$$

一般地,当 $A\subseteq B$ 时,都有 $A-B=\varnothing$.

定义 2.4 全集 I 与集合 A 的差集 $I-A$,称为 A 的**补集**,记作 $\overline{A}$(可读作"A 的补"),即

$$\overline{A}=\{x\mid x\in I \text{ 但 } x\notin A\}.$$

例如,若全集 I 是实数集,则 $\overline{\mathrm{Q}}$ 是全体无理数组成的集合,此处 Q 是有理数集.

根据集合的交、差以及补的定义,有如下的关系式成立:

$$A-B=A\cap\overline{B}.$$

在以后的讨论中,我们常常用 $A\cap\overline{B}$ 来代替差式 $A-B$.

定义 2.5 设 A,B 是两个集合，$(A-B)\cup(B-A)$ 称为 A 与 B 的**对称差**. 对称差也称为**布尔和**. 我们用 $A\oplus B$ 来表示 A 与 B 的对称差，即

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A).$$

例 2.8 设 $A=\{1,2,3,6,\}$, $B=\{1,2,5,10\}$，则

$$\begin{aligned}A\oplus B&=(A-B)\cup(B-A)\\&=\{3,6\}\cup\{5,10\}\\&=\{3,6,5,10\}.\end{aligned}$$

集合的交与并的概念可以推广到任意多个集合上去.

定义 2.6 设 $\{A_i\mid i\in S\}$ 为全集 I 的子集族，S 为 A_i 的所有下标 i 组成的集合(称为集族 $\{A_i\}$ 的**指标集**). 令

$\bigcap\{A_i\mid i\in S\}=\{x\mid x\in I$，对任何 $i\in S$ 都有 $x\in A_i\}$，

$\bigcup\{A_i\mid i\in S\}=\{x\mid x\in I$，存在 $i\in S$，使得 $x\in A_i\}$，

则称 $\bigcap\{A_i\mid i\in S\}$ 和 $\bigcup\{A_i\mid i\in S\}$ 分别为 $\{A_i\mid i\in S\}$ 的**广义交**和**广义并**. 若指标集 $S=\varnothing$，则规定：

$$\bigcap\{A_i\mid i\in S\}=I,\ \bigcup\{A_i\mid i\in S\}=\varnothing.$$

通常把 $\bigcap\{A_i\mid i\in S\}$ 记作 $\bigcap\limits_{i\in S}A_i$，把 $\bigcup\{A_i\mid i\in S\}$ 记作 $\bigcup\limits_{i\in S}A_i$，而当 $S=\mathbf{N}$ 时，则把 $\bigcap\limits_{i\in\mathbf{N}}A_i$ 记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，把 $\bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}}A_i$ 记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. 特别地，当 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 时，

$$\bigcap_{i\in S}A_i=\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n,$$

$$\bigcup_{i\in S}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n.$$

2.3 文氏图

为了直观地了解集合，可以把它们表示成一种专门的直观图，称为**文氏图**(以英国数学家 John Veen 的名字命名). 在文氏图中，全集 I 用一个矩形区域表示，其它集合用矩形框内的圆形区域表示. 图 1-1 中的阴影区域表示各个图形下边所指出的集合.