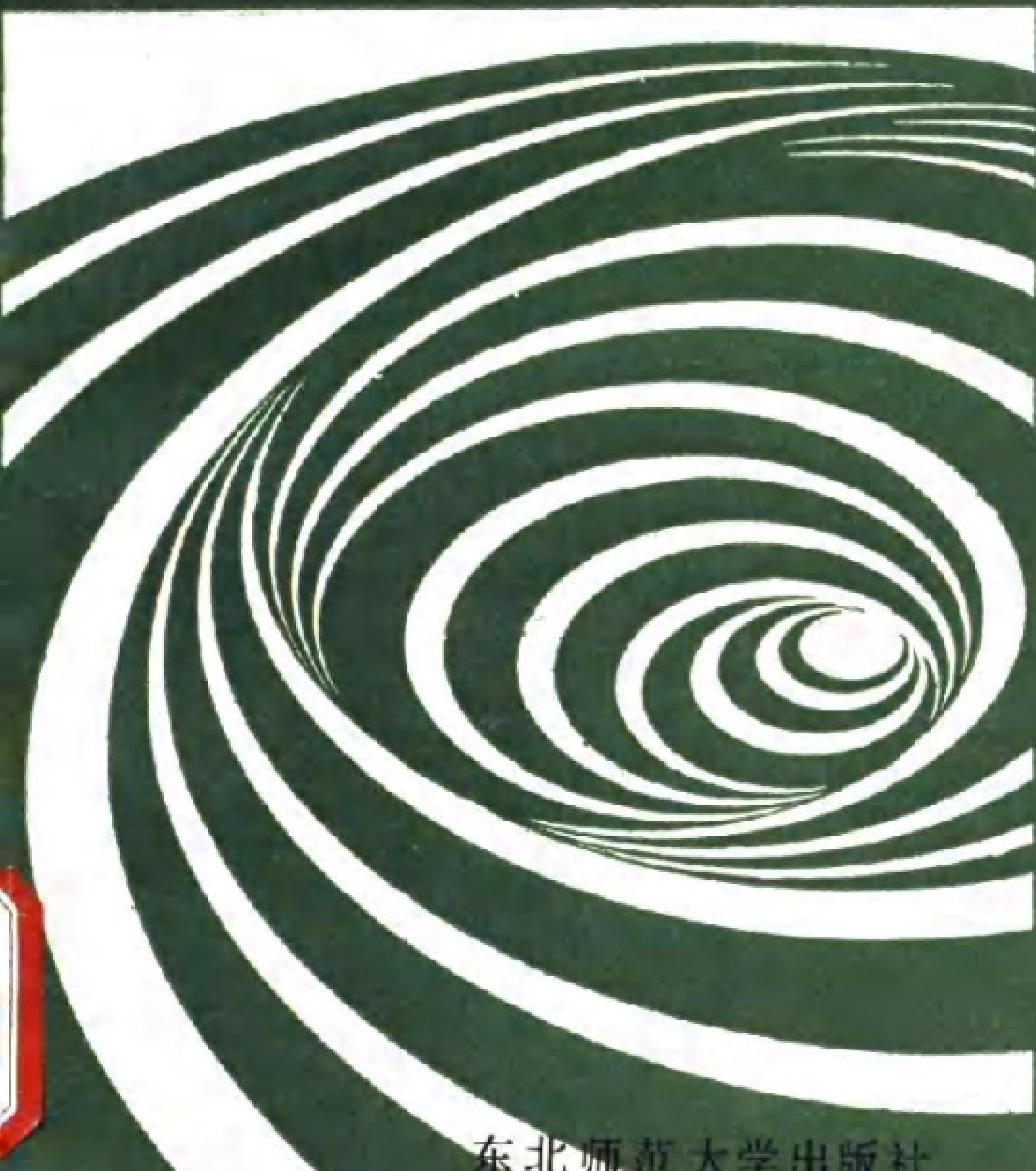
杨宝俊 王宝昌 张伯军 编著

弹性波理论

TAN XING BO LI LUN



东北师范大学出版社

弹性波理论

杨宝俊 王宝昌 张伯军 编著

东北师范大学出版社

前　言

弹性波理论是理论物理的重要分支之一，它的任务是在材料力学实验定律的基础上，进一步引进数学方法来研究弹性物体受力与变形间的静、动态关系问题。由于弹性波具有传播距离远、穿透能力强、物性特征明显等特殊优点，近年来，特别是在电子计算机技术迅速发展的今天，已被广泛应用于地震勘探、水利工程、建筑工程、海洋勘测以及爆破技术等众多领域，并在很多同类问题的研究方面有取代其他方法的趋势。

本书是以地球物理等专业的学生和科技人员为主要对象编写的专业基础理论教材。书中系统地阐述了应力分析，应变分析，应力与应变的关系以及弹性波动方程，弹性波的传，播弹性波的激发等重要基础理论，并对地震中经常遇到的主应力、主应变、平面波、球面波、柱面波、瑞利波、洛夫波等给予了特殊的强调，同时对上述理论在其具体应用方面及有关前沿问题进行了必要的介绍。编者希望通过本书的学习，能够使读者对弹性波理论的研究方法、内容及典型计算问题有一个较为全面的了解，为进一步学习专业和从事科学研究奠定良好的基础。

本书采用的是近年来国内外参考书及有关文献中较为常用的哑指标规则，并对其作了较为详细的论述。为配合学生自学，加深学生对教材内容的进一步理解，书中配有相应的例题、习题及习题参考答案，书后还设有附录和参考书目。

本书是作者在总结多年教学、科研经验的基础上编写而成的。全书共分十章，其中，第一、二、三、四章由张伯军编写，第五、六、七、八章由王宝昌编写，第九、十章由杨宝俊编写。

全书由杨宝俊统稿。

本书在编写过程中，得到了纪英楠教授、王为民教授、何樵登教授的大力支持和协助，在此谨向他们表示衷心的感谢。由于编者水平所限，错误、疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编 著 者

1988年10月于长春地质学院

目　　录

第一章　基础知识

本章主要叙述哑指标规则和材料力学中关于应力、应变的概念，为进一步学习奠定基础。特别是哑指标规则，在以后的运算中会经常遇到，应予以足够的重视。

§1—1　哑指标和克罗尼克尔符号

一、哑 指 标

在笛卡尔坐标系中，我们习惯以x、y、z表示坐标轴，以$\boldsymbol{A}$表示某一向量（一阶张量），以B表示二阶张量，以Σ表示求和，如

$$u=\sum_{i=1}^{3}a_i x_i=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \tag{1.1}$$

等等。若采用哑指标规则，则将以x_i（$i=1$，2，3）表示坐标轴，以A_i表示向量$\boldsymbol{A}$在x_i坐标轴上的三个分量，以B_{ji}表示二阶张量B在x_i坐标系中的九个分量，求和时省略求和符号Σ，如以a_ix_i表示$\sum\limits_{i=1}^{3}a_ix_i$等等。由此可见，采用哑指标规则，就是用一些添加角标（即指标）的符号，代替那些直接表明自身意义的符号。这样的代换会给运算与书写带来许多方便。

按照上述替换关系，下面的矢量式

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{B}+\boldsymbol{D} \tag{1.2}$$

可写成

$$C_i = A_j B_{ji} + D_i \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{1.3}$$

由于（1.2）式可展开为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= C_1\boldsymbol{i}_1 + C_2\boldsymbol{i}_2 + C_3\boldsymbol{i}_3 \\
&= (A_1\boldsymbol{i}_1 + A_2\boldsymbol{i}_2 + A_3\boldsymbol{i}_3)[B_{11}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + B_{12}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 \\
&\quad + B_{13}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3 + B_{21}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1 + B_{22}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + B_{23}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 \\
&\quad + B_{31}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 + B_{32}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2 + B_{33}\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3] + (D_1\boldsymbol{i}_1 \\
&\quad + D_2\boldsymbol{i}_2 + D_3\boldsymbol{i}_3) \\
&= (A_{11}B_1 + A_2B_{21} + A_3B_{31})\boldsymbol{i}_1 \\
&\quad + (A_1B_{12} + A_2B_{22} + A_3B_{32})\boldsymbol{i}_2 \\
&\quad + (A_1B_{13} + A_2B_{23} + A_3B_{33})\boldsymbol{i}_3 \\
&\quad + (D_1\boldsymbol{i}_1 + D_2\boldsymbol{i}_2 + D_3\boldsymbol{i}_3)
\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}
C_1 &= A_1B_{11} + A_2B_{21} + A_3B_{31} + D_1 \\
C_2 &= A_1B_{12} + A_2B_{22} + A_3B_{32} + D_2 \\
C_3 &= A_1B_{13} + A_2B_{23} + A_3B_{33} + D_3
\end{aligned} \tag{1.4}$$

而（1.3）式的意义应为

$$C_i = \sum_{j=1}^{3} A_j B_{ji} + D_i \tag{1.5}$$

将其进行展开，则得

$$\begin{aligned}
C_1 &= \sum_{j=1}^{3} A_j B_{j1} + D_1 \\
&= A_1B_{11} + A_2B_{21} + A_3B_{31} + D_1 \\
C_2 &= \sum_{j=1}^{3} A_j B_{j2} + D_2 \\
&= A_1B_{12} + A_2B_{22} + A_3B_{32} + D_2 \\
C_3 &= \sum_{j=1}^{3} A_j B_{j3} + D_3 \\
&= A_1B_{13} + A_2B_{23} + A_3B_{33} + D_3
\end{aligned} \tag{1.6}$$

由此可见，这里的C_1，C_2，C_3与（1.4）式完全一致，故C_i与$\boldsymbol{C}$是同一矢量的不同表示形式。

对于（1.3）式，如果将其写为如下形式，即

$$C_l = A_k B_{kl} + D_l \quad (l,\ k=1,\ 2,\ 3) \tag{1.7}$$

则根据（1.3）式的展开过程可知，（1.7）式与（1.3）式完全相同，不同的只是用k、l代换j、i罢了。

至此，对哑指标规则可作如下归纳：

1．如果表达式中的某一项出现重复指标〔如（1.3）式中的j〕，则意味着对该指标求和（从1到3）。而对其他单独出现的指标〔如（1.3）式中的i〕，则意味着可分别取1，2，3。

2．同一等式中的不同项，单独出现的指标数目和符号必须相同，如（1.3）式中的每一项单独出现的指标都只有一个，并且符号都是i。

3．同一等式中的某项有重复出现的指标，将重复指标换记为别的符号，并不影响结果〔如（1.7）式中的k代换（1.3）式中的j〕。

4．同一等式中所有项内单独出现的某一指标，都换记为别的符号，并不影响结果〔如（1.7）式中的l代换（1.3）式中的i〕。

〔例1—1〕 试对下列用哑指标表示的各式进行展开：

（1）$\varepsilon = e_{ji} n_j n_i$

（2）$\dfrac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$

解 （1）从式中可以看出，等式右端的指标j和i都为重复出现的指标。根据哑指标规则1可知，应对j和i分别从1到3求和。为清楚起见，我们先对j求和，将i视为不变，有

$$\varepsilon = e_{1i} n_1 n_i + e_{2i} n_2 n_i + e_{3i} n_3 n_i$$

再考虑到将i从1到3求和，则

$$\begin{aligned}\varepsilon = {} & e_{11} n_1 n_1 + e_{12} n_1 n_2 + e_{13} n_1 n_3 + e_{21} n_2 n_1 + e_{22} n_2 n_2 \\ & + e_{23} n_2 n_3 + e_{31} n_3 n_1 + e_{32} n_3 n_2 + e_{33} n_3 n_3\end{aligned}$$

此式中的前、中、后3项分别是$e_{1i} n_1 n_i$、$e_{2i} n_2 n_i$、$e_{3i} n_3 n_i$的求和展开式。如果此求和式中存在3个或更多个重复指标（如

$\varepsilon=e_{ji}n_{ik}n_{kj}$等）时，则依旧按上述规律，逐一对重复指标求和即可。

（2）从前面给出的式子中可以看出，等式左端的第一项有重复指标j，其他各项仅有单独指标 i，根据哑指标规则可知，对j应从1到3求和，对i应分别取1，2，3。如此，当i取1时，上述所给等式成为

$$\frac{\partial\sigma_{j1}}{\partial x_j}+\rho f_1=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

再对j求和，得

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+\rho f_1=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

与此对应，$i=2$时有

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}+\rho f_2=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$i=3$时有

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+\rho f_3=\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

由此知，就表达式中的某一项来说，只要存在复重指标，则无论该项是乘式形式还是除式形式，是代数形式还是微分形式，都应予以求和。对表达式中出现的单独指标，则应分别取1，2，3。

二、克罗尼克尔符号

正同前面讲过的用 B_{ji}表示任一二阶张量时一样，如果用二阶张量δ_{ji}（即克罗尼克尔符号）表示一特殊形式的二阶张量即二阶单位张量，则根据二阶张量δ_{ji}的矩阵表示

$$\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31}\\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{32}\\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33}\end{pmatrix} \tag{1.8}$$

和二阶单位张量的矩阵表示

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

知

$$\delta_{ji}=\begin{cases}1 & 当i=j时\\ 0 & 当i\neq j时\end{cases} \tag{1.10}$$

此式即为克罗尼克尔符号的定义式。根据此定义知，δ_{ji}的矩阵表示式（即单位矩阵）具有与任意矩阵相乘时得原矩阵的性质（参照线性代数）。正是这样的性质，决定了δ_{ji}在运算过程中的特殊性。

首先，我们使δ_{ji}作用于任意矢量A_i上，成为$\delta_{ji}A_i$。根据哑指标规则，i为重复指标，故应有

$$\delta_{ji}A_i=\delta_{j1}A_1+\delta_{j2}A_2+\delta_{j3}A_3$$

当$j=1$时

$$\delta_{1i}A_i=\delta_{11}A_1+\delta_{12}A_2+\delta_{13}A_3=A_1$$

同理，$j=2$时

$$\delta_{2i}A_i=A_2$$

$j=3$时

$$\delta_{3i}A_i=A_3$$

这与A_j（$j=1,2,3$）完全一致。因此可建立如下等式：

$$\delta_{ji}A_i=A_j \tag{1.11}$$

其次，我们再使δ_{ji}作用于任意二阶张量B_{ik}上成为$\delta_{ji}B_{ik}$，按哑指标规则，i为重复指标，故应有

$$\delta_{ji}B_{ik}=\delta_{j1}B_{1k}+\delta_{j2}B_{2k}+\delta_{j3}B_{3k}$$

因为$j\neq i$时，$\delta_{ji}=0$。因此，当j取1时，等式右端只有第一项不为零，且当k取1，2，3时，得三个分量B_{11}，B_{12}，B_{13}；而j取2时，等式右端第二项不为零，当k取1，2，3时，也得三个分量B_{21}，B_{22}，B_{23}；同理，j取3时，得三个分量B_{31}，B_{32}，

B_{33}。这九个分量与二阶张量 B_{jk} 的九个分量完全一致。因此，又可建立如下的关系式：

$$\delta_{ji}B_{ik}=B_{jk} \tag{1.12}$$

从（1.11）与（1.12）式可以看出，二阶单位张量 δ_{ji} 作用于任意阶张量时，只需将任意阶张量中与δ_{ji}对应出现的重复指标〔如（1.11）与（1.12）式中的i〕用 δ_{ji} 内的另一单独指标（如前两式中的 j）替换即可。比如

$$\delta_{ji}B_{jl}=B_{il}$$

$$\delta_{ji}B_{iklm}=B_{jklm}$$

$$\delta_{ji}B_{ji}=B_{jj}=B_{ii} \qquad \text{（缩并）}$$

等等。反过来，如果见到B_{jk}，应该立即想到它可以写成$\delta_{ji}B_{ik}$。

三、循环符号δ_{klm}

为按哑指标规则进行矢量叉乘运算，我们引入一特殊的三阶张量δ_{klm}（即循环符号），使其为

$$\delta_{klm}=\begin{cases} 0 & \text{当 } klm \text{ 三个间有任意两个或三个相等时} \\ 1 & \text{当 } klm \text{ 为123，231，312排列时} \\ -1 & \text{当 } klm \text{ 为132，321，213排列时} \end{cases} \tag{1.13}$$

如 $\delta_{113}=\delta_{111}=\delta_{232}=\delta_{331}=0$，$\delta_{231}=1$，$\delta_{132}=-1$等等。为记忆方便，我们可将角标1，2，3分别标在圆周的对称位置上（如图1—1）。由图1—1与定义式（1.13）可以看出，无论以1，2，3哪一个数字指标为起点，按其顺时循环排列（或称偶序）时，δ_{klm}为+1，逆时循环排列（或称奇序）时为-1，出现重复数字指标排列时为0。

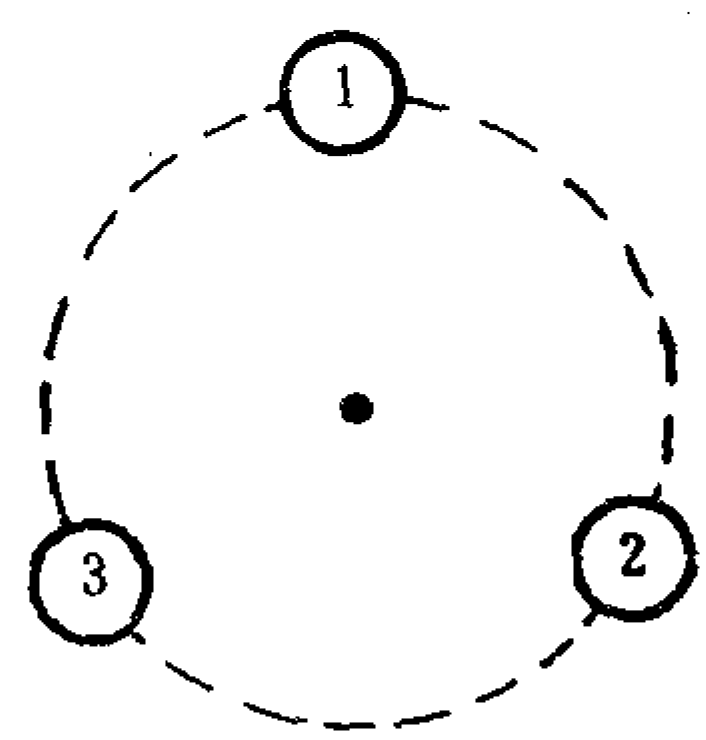


图 1—1

根据δ_{klm}的定义，我们可以证明矢量式

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$$

可以写成

$$A_k = \delta_{klm} B_l C_m \tag{1.14}$$

的形式。因为按哑指标规则，当上式中单独指标k取 1 时，有

$$\begin{aligned}A_1 &= \delta_{111} B_1 C_1 + \delta_{112} B_1 C_2 + \delta_{113} B_1 C_3 \\ &\quad + \delta_{121} B_2 C_1 + \delta_{122} B_2 C_2 + \delta_{123} B_2 C_3 \\ &\quad + \delta_{131} B_3 C_1 + \delta_{132} B_3 C_2 + \delta_{133} B_3 C_3 \\ &= \delta_{123} B_2 C_3 + \delta_{132} B_3 C_2 \\ &= B_2 C_3 - B_3 C_2\end{aligned}$$

k取2时有

$$\begin{aligned}A_2 &= \delta_{231} B_3 C_1 + \delta_{213} B_1 C_3 \\ &= B_3 C_1 - B_1 C_3\end{aligned}$$

k取3时有

$$\begin{aligned}A_3 &= \delta_{312} B_1 C_2 + \delta_{321} B_2 C_1 \\ &= B_1 C_2 - B_2 C_1\end{aligned}$$

而对$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$按叉乘法则展开，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_1 \boldsymbol{i}_1 + A_2 \boldsymbol{i}_2 + A_3 \boldsymbol{i}_3 \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \\ &= (B_2 C_3 - B_3 C_2) \boldsymbol{i}_1 + (B_3 C_1 - B_1 C_3) \boldsymbol{i}_2 \\ &\quad + (B_1 C_2 - B_2 C_1) \boldsymbol{i}_3\end{aligned}$$

此式中的分量A_1、A_2、A_3与按（1.14）式展开的结果完全相同。

四、微分符号

利用上述符号规则，微分算符∇的分量形式可以用$\frac{\partial}{\partial x_i}$来表示。譬如，对空间任意标量场$\Phi$求梯度，则由梯度的定义知

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \boldsymbol{i}_3$$

如果将$\nabla\Phi$换记为$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$，由于$i$可以取1，2，3，故应有$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}$，$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}$，$\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}$，这三个值正是$\nabla\Phi$的三个分量。

与此对应，对某一矢量场$\boldsymbol{A}$求散度，则可将$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$写成$\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$，因为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

与

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

完全一致。

对某一矢量场$\boldsymbol{A}$求旋度时，$\nabla\times\boldsymbol{A}$的三个分量可以用$\delta_{klm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}$表示，如$k=1$时

$$\begin{aligned}\delta_{klm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}&=\delta_{1lm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}\\&=\delta_{123}\frac{\partial A_3}{\partial x_2}+\delta_{132}\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\\&=\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\end{aligned}$$

$k=2$时

$$\delta_{2lm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}=\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}$$

$k=3$时

$$\delta_{3lm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}=\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

此结果与$\nabla\times\boldsymbol{A}$展开时的三个分量相同。类似地，我们还有$\nabla^2\Phi$可

记为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi$$

$\oint_S A\cdot n ds=\int_V \nabla\cdot A dV$（高斯定理）可记为

$$\oint_S A_i n_i ds=\int_V \frac{\partial A_i}{\partial x_i}dV$$

$\oint_l A\cdot dl=\int_S \nabla\times A\cdot n ds$（斯托克斯定理）可记为

$$\oint_l A_k dx_k=\int_S \delta_{klm}\frac{\partial A_m}{\partial x_l}n_k ds$$

等等。这里值得注意的是，采用上述符号规则表达一个具有矢量性的结果时，它仅仅表达了该矢量在 x_i 坐标轴上的分量值的大小。当然，只要知道一个矢量在各坐标轴上的分量值，这个矢量即被确定。

§1—2 应力的概念

为了从分子结合力的角度讨论应力的概念，我们给出分子与分子之间结合力的数学表示式（参见固体力学），即

$$F(r)=\frac{a'}{r^{m+1}}-\frac{b'}{r^{n+1}} \tag{1.15}$$

其中a'、b'、m、n（$n>m$）为与材料有关的常数，r 为两个分子间的距离。$F(r)$随r变化的情形如图1—2所示。

从图中可以看出，构成宏观物体的分子与分子之间同时存在着吸引力与排斥力，当 $r=r_0$ 时，吸引力与排斥力相互抵消，分子处于平衡位置。如果设想某宏观物体是由大量的处于平衡位置的分子所组成，那么我们称该宏观物体所处的状态为自然状态。由式（1.15）知，自然状态的宏观物体也有内力作用，但此内力没有改变物体自身形态的能力，对外不显力的作用。如果对此处