运筹学主要内容

最佳管理数学方法

赵新泽 编著

西南交通大学出版社

运筹学主要内容

最佳管理数学方法

赵新泽　编著

西南交通大学出版社

内 容 提 要

本书是为高等学校本科生选修课、专修科和干部班编写的运筹学教材。内容包括了运筹学的主要部分：一般线性规划问题、特殊线性规划中的运输问题和生产组织与计划中的线性规划问题、动态规划的方法和应用、非线性规划问题的优选法（包括正交试验法）、网络方法、单目标决策和多目标决策共八章。

本书的主要特色是：①编入了几年来提出来的很多新方法及其应用；②各部分列举了各种实例，并配有适量的习题；③尽量通俗易懂，深入浅出。

本书适于作高等学校各管理专科、干部班、本科生选修课、职工大学、夜大学、函授大学等的运筹学或管理数学教材。教学时间为５０时左右。

本书也可供各企业领导和管理人员、广大教师、青年、工人为掌握运筹学的主要内容、方法和应用，而进行学习之用。

最佳管理数学方法

ZUIJIA GUANLISHUXUE FANGFA

赵新泽 编著

西南交通大学出版社出版

（四川 峨眉）

四川省新华书店发行

长沙铁道学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：9

字数：210千字 印数：1～3500册

1988年8月第一版 1988年8月第一次印刷

ISBN 7—81022—031—4

O004

定价：1.70元

前　言

运筹学是一门应用广泛、经济价值大、易学、易懂、易用的新兴学科。其其内容很多，本书只写了其主要部分，取名为《最佳管理数学方法》。

本书是在管理专科班和干部班运筹学讲义《最佳管理数学方法》试用两遍后，进一步修改、补充而成的。

在编写与修改中参阅了约30种资料，根据教材的要求和运筹学的特点，又为了使本教材具有一定的特色，充分注意了以下几点：

（1）编入了几年来提出来的新方法和应用实例，如第二章运输问题中的“一次最优法”，“等优元素法”、“多解”；整个第三章；的内容第四章动态规划中的“图解法”和“表解法”等。第五章非线性规划问题的优选法中的“正交试验法”以及第八章多目标决策方法，都是新颖的写法。

（2）既注意了运筹学的数学方法，又注意了运筹学的实际应用，因此，每章的内容均注意遵循“模型——概念——方法——应用”的规律。目的是使读者既搞清概念，掌握方法，又学会方法的实际应用。

（3）各章的内容均配有适量的各种应用习题和答案。

本书受到长沙铁道学院李致中副教授、数学教研室、教材科和教务处的关怀与支特，在此深致谢意。

因水平有限，时间仓促，难免存在缺点和错误，希望指正。

编　者

1987年7月5日

目　录

第一章　一般线性规划问题

线性规划是20世纪40年代发展起来的一门重要的现代应用数学。在经济的各个领域，如工业、农业、交通运输、商业、军事乃至科学技术、管理决策的最优化等，均有着广泛的应用，是规划论、运筹学的一个重要分支，是最优管理的一个主要工具。例如，我国机械工业部1982年对全国重点汽车制造厂的年计划，用线性规划的方法进行优化以后，比原计划仅利润就增加3000多万元。美国1972年统计了107个公司应用线性规划方法解决的问题，占全部问题的19%。

线性规划主要解决两类问题：

（1）在人力、物力、财力一定的情况下，制订出最好的安排方案，使完成的任务量最大，从而使经济效益最高。

（2）在生产任务一定的情况下，制订出最好的方案，使消耗的人力、物力、财力最少（或时间最少），从而使成本最低。

这两个问题实际上是一类问题的两个方面，即两种不同的处理方法。总之，在一定的条件下，通过规划使问题的目标（任务量、利润、成本、时间、……）达到最大或最小。

线性规划的数学模型中，包括条件约束（不等式或方程组）和目标函数内的全部变数都是一次的，即线性的。因此称这种规划为线性规划，这正是线性规划与非线性规划的区别。

由于线性规划应用面广，经济意义大，发展非常迅速，可利用电子计算机解决几千上万个变数的大型规划问题。

线性规划的内容包括一般线性规划问题和特殊线性规划问题两大类。在特殊线性规划问题中，又包含两个部分：运输问题和生产组织与计划中的线性规划问题。

§1 数学模型和主要概念

用线性规划的方法解决管理中的问题时，首先要建立数学模型——把实际问题变为数学问题，这是非常重要的一步。下面通过几个实例来讨论建立线性规划问题的数学模型的方法，进而分析线性规划问题的数学模型的特征。

例1 生产计划问题 某企业在一段时期内规划A_1、A_2两项生产任务，任务A_1每生产一个单位消耗电力 3 千瓦，其他成本2000元，得利润2000元；任务A_2每生产一个单位耗电6 千瓦，其他成本1000元，获利3000元。该企业在A_1与A_2任务中，有电力24千瓦和成本 1 万元可供利用，求其最优生产方案（A_1，A_2各生产多少），使总利润最大。

设A_1、A_2分别生产x_1与x_2（单位）。为清楚起见将问题列如表1-1。

表1—1

任务 单位消耗 项目	A_1	A_2	总
电力（千瓦）	3	6	$\leqslant 24$
其他成本（千元）	2	1	$\leqslant 10$
利润（千元）	2	3	最大
设生产任务量	x_1	x_2	

由题意，该问题的数学模型为：求未知变数x_1与x_2，满足

$$\begin{cases} 3x_1+6x_2\leqslant 24 \\ 2x_1+x_2\leqslant 10 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases} \qquad (1\text{-}1)$$

使总利润

$$s=2x_1+3x_2 \qquad (1\text{-}2)$$

达到最大值。

其中，(1-1)式叫该问题的约束条件（为不等式）。不等式右边的常数24与10，叫约束常数。(1-2)式叫该规划的目标函数。

例2 最佳投资问题 某单位在三年内共有资金10万元，

可向A_1、A_1、A_3、A_4四个项目进行投资，其情况是：

A_1：三年中，在每年年初投资，年利润率为20%，每年年终结算，并可将本利于次年初再行投资；

A_2：三年中于第1年年初投资，两年结算，利润率为50%，而投资额最多5万元；

A_3：三年中，要在第2年年初投资，满两年时结算，利润率为60%，该项至少要投资4万元；

A_4：三年中，在第3年初投资，一年结算，利润率为40%，投资额为3万元。若要在三年末总投资的利润最高，最佳投资方案（各项目投多少）是什么？

设第i（$i=1$，2，3，4）个项目在第j年（$j=1$，2，3）的投资额为x_{ij}。显然，项目A_2只能在第1年投资一次。各年投资如表1-2。

表1—2

投资项目 \ 年次	第1年	第2年	第3年	总（万）
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
A_2	x_{21}			$\leqslant 5$
A_3		x_{32}		$\geqslant 4$
A_4			x_{43}	$=3$
原有资金（万）	10			

规划的数学模型为：求投资变数x_{11}，x_{12}，x_{13}，x_{21}，x_{32}，x_{43}满足约束条件：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}\leqslant 10 & \text{（第1年投资）} \\ x_{12}+x_{32}\leqslant 10-x_{21}+0.2x_{11} & \text{（第2年投资）} \\ x_{13}+x_{43}\leqslant 10+0.2x_{11}+0.2x_{12}+0.5x_{21} & \text{（第3年投资）} \\ x_{21}\leqslant 5 \\ x_{32}\geqslant 4 \\ x_{43}=3 \end{cases}$$

使目标函数（总利润）达到最大，即

$$\max S = 0.2x_{11} + 0.2x_{12} + 0.2x_{13} + 0.5x_{21} + 0.6x_{32} + 0.4x_{43}。$$

例3　合理下料问题 某企业要下100套钢料，每套由长1.5米一根，2.1米两根和2.9米一根的元钢组成，而原料长7.4米。应如何下料，才能使所用钢料最少。

建立数学模型。显然，不同的下料方法，下的料长不同，而残料也不同，问题要求采用最佳下料方法，使总残料最少。为此，要分析各种下料方法，共五种下料法，其长度和残料如表1-3。

表1—3

下料方案 / 下料数量 / 料长	一	二	三	四	五	三种料需要量
1.5 米	3	1	2		3	100
2.1 米			2	2	1	200
2.9 米	1	2		1		100
合计（米）	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6	
残料（米）	0	0.1	0.2	0.3	0.8	总的最少
设各方案下料根数	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

由表知，五种下料方案中，任何一种均不可能完成100套的下料任务，必须采用“混合下料方案”。为此，设五种下料方案的下料根数分别为x_1、x_2、x_3、x_4、x_5，由题意，数学模型为：求变数x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，满足约束条件

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \quad + 3x_5 = 100 \\ \qquad 2x + 2x_4 + x_5 = 200 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad = 100 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

使残料（目标函数）

$$S=0.1x_2+0.2x_3+0.3x_4+0.8x_5$$

达到最小值

上面的三个具体问题虽然不同，但是，它们的数学模型却有着共同的特征：

（1）数学模型均包括“约束条件”（不等式或方程组）和“目标函数”两个部分。规划均是要求求一组变数，既满足约束条件又使目标函数取得最大值或最小值。

（2）无论是约束条件或目标函数中，其变数x_j（$j=1,2,\cdots$）均是一次的。从而我们可得出**一般线性规划问题的数学模型**如下：

（1）求变数组$x_1,x_2,\cdots,x_n$，满足约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n\leqslant b_1 \text{（或}=b_1,\ \geqslant b_1\text{）} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n\leqslant b_2\text{（或}=b_2,\geqslant b_2\text{）} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m\text{（或}=b_m,\geqslant b_m\text{）} \\ x_1,\ x_2,\cdots,x_n\geqslant 0 \end{cases} \tag{1-3}$$

使目标函数

$$S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1-4}$$

达到最大或最小值。

这就是一般线性规划的数学模型。也可简记为：求x_j($j=1,2,\cdots n$)

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i \text{（或}=b_i,\geqslant b_i,i=1,2,\cdots,m\text{）} \\ x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,2,\cdots n) \end{cases} \tag{1-5}$$

$$\max S=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad \text{（或}\min S\text{）} \tag{1-6}$$

（2）数学模型的数学加工。求解时要对约束条件式(1-3)进

行如下的数学加工：变不等式为等式（方程），右边约束常数均为正数。因此

①若式(1-3)中存在第k个式子为

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \leqslant b_k$$

则设$x_{n+k} \geqslant 0$，加到不等式左边，变为方程

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k$$

②若式(1-3)中存在第t个式子为

$$a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{tn}x_n \geqslant b_t$$

则设$x_{n+t} \geqslant 0$，在不等式左边减去x_{n+t}，变为方程

$$a_{t1}x_1 + a_{t2}x_2 + \cdots + a_{tn}x_n - x_{n+t} = b_t$$

③若(1-3)式中存在第r个式子为

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = -b_r$$

则两边同乘以(-1)，使右边常数为正值，即

$$-a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - \cdots - a_{rn}x_n = b_r$$

其中，x_{n+k}，x_{n+t} 叫松弛变数。

通过如此的数学加工，达到约束条件中除$x_j \geqslant 0$($j = 1, 2, \cdots, n$)外，其他全部为线性方程组，而且各方程左边的常数b，全部是正的。松弛变数x_{n+k}和x_{n+t}在目标函数S中的系数全部为零。即

$$S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0x_{n+k} + 0x_{n+t} \qquad (1\text{-}7)$$

由此我们得到**一般线性规划问题的标准形**：求一组变数x_j($j = 1, 2, \cdots, n$)，满足约束条件

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 \end{cases} \qquad (1\text{-}8)$$

$$\max S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (\text{或} \min S) \qquad (1\text{-}9)$$

任一个线性规划问题，经过上面的数学加工，均可变为这种标准的数学模型。

几个主要概念：

初始方案 最初给出的满足约束条件(1-3)的$x_1, x_2\cdots, x_n$的值，叫规划问题的初始方案，数学上叫初始解。

可行方案 任一满足约束条件式（1-3）的$x_1, x_2, \cdots, x_n$的一组值，叫问题的可行方案，又叫**可行解**。初始方案是可行方案的一种。可行方案不一定是最优方案。

最优方案 使目标函数S达到最大或最小值的可行方案，称为最优方案，又叫最优解。目标函数S达到最大的解叫最大解，规划又叫最大解问题或最大值问题，目标函数S达最小的解叫最小解，规划叫最小值问题或最小解问题。最大解和最小解统称为最优解。

一个线性规划问题的最优方案，可能只有一个也可能有多个。理论上可证明，线性规划若有多个最优方案，便有无穷多个。

§2 图解法

所谓“图解法”，就是根据规划的约束不等式，取平面坐标画出几何图形，从图上找出最优方案的点，即得最优方案。由于图形具有直观、明确、简单的特点，使图解法显示出一定的优越性。

但由于平面坐标只有两个坐标轴，所以，当规划的数学模型中只有两个变数时，才能用此方法。

例4 用图解法求§1中例1生产安排问题的最优方案。

第一步：画图 取坐标轴x_1与x_2，由该问题的数学模

型：

求x_1，x_2的值，使得

$$\begin{cases}3x_1+6x_2\leqslant 24\\ 2x_1+x_2\leqslant 10\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases} \tag{1-10}$$

$$S=2x_1+3x_2\text{取最大值。} \tag{1-11}$$

①画直线$3x_1+6x_2=24$。如取$x_1=0$则$x_2=4$，得点$A(0,4)$；取$x_2=0$，则$x_1=8$，得点B（8，0）。连AB得直线$3x_1+6x_2=24$，如图1-1。

②画直线$2x_1+x_2=10$。若分别取$x_1=3$（$x_2=4$）和$x_2=0$（$x_1=5$），则得点$C(3,4)$与$D(5,0)$，连CD即是。如图1-1，AB、CD两直线交点为$E(4,2)$。

③由$x_1\geqslant 0$，为x_2轴的右半平面（包括x_2轴），$x_2\geqslant 0$为x_1轴的上半平面（包括x_1轴）。

由约束不等式(1-10)可知，图1-1中四边形$OAED$中的每个点（包括边界上的点），都满足该规划的约束条件，所以均代表规划的一个可行方案（可行解）。由此可知，一个线性规划问题若存在可行方案，便有无穷多个，但其中只有使S达到最大值的点，其坐标值方是该规划的最优方案。

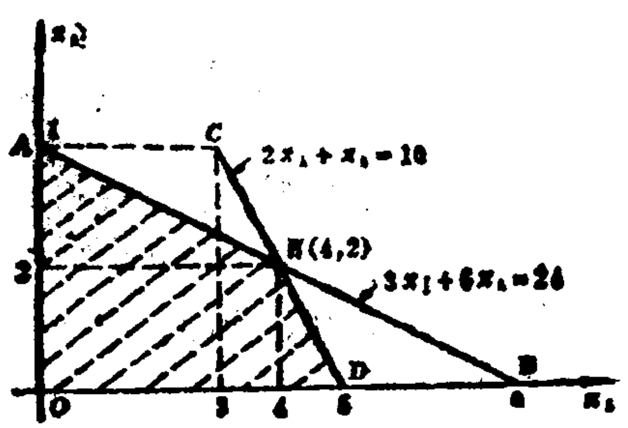

图1-1

第二步：求S取得最大值的点，从而求最优方案，有三种方法。

方法1 图1-1中的阴影部分为该规划的**可行解域**（有界闭区域），是凸多边形$OAED$，又叫凸域、凸集。边界上的O,A,E,D四点均称为极点或顶点。使目标函数S达到最大的最优方案点，是这些极点中的一个（也可能有两个，为多最优方案情况）。因此，分别将各极点坐标代入S，理论上可证，S值最大的点，便是最优方案点。

点O：$S(0,0)=0$；　　点A：$S(0,4)=12$；

点E：$S(4,2)=14$；　　点D：$S(5,0)=10$。

因E点处S值最大，故该问题最优方案为

$$x_1=4,\qquad x_2=2\qquad \max S=1.4\ (\text{万元})$$

将$x_1=4$，$x_2=2$ 代入约束不等式可知，电力和成本均恰好用完。

此方法当极点较多时，比较麻烦。

方法2 将目标函数——总利润S任意取值，在图上划出$S=2x_1+3x_2$的直线，如取

$$S_1=6=2x_1+3x_2,$$

$$S_2=9=2x_1+3x_2$$

二直线如图1-2。又叫利润直线。

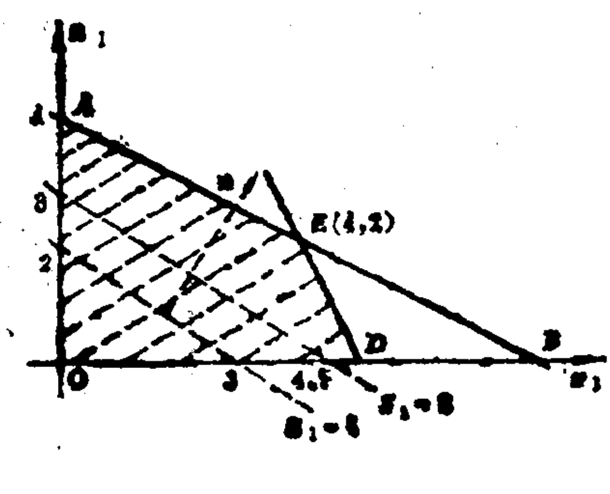

图1-2

由上式知，S取不同的值，得到的不同的利润直线是平行