

# 保險

## 精算学基础

伍超标 编著

中国统计出版社

# 保险精算学基础

伍超标 编著

中国统计出版社

(京)新登字 041号

图书在版编目(CIP)数据

保险精算学基础/ 伍超标编著.  
— 北京: 中国统计出版社, 1999.7  
ISBN 7-5037-2939-2

I. 保…  
II. 伍…  
III. 保险—计算  
IV. F840.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 12721 号

---

责任编辑/ 张美华  
封面设计/ 张建民  
出版发行/ 中国统计出版社  
通信地址/ 北京市三里河月坛南街 75 号 邮政编码/100826  
地址/ 北京市丰台区西三环南路甲 6 号  
电话/(010) 63459085、63266600-22500 (发行部)  
印刷/ 科伦克三莱印务(北京)有限公司  
经销/ 新华书店  
开本/ 850×1168mm 1/32  
字数/ 270千字  
印张/ 10.875  
印数/ 1-5000册  
版别/ 1999年8月第1版  
版次/ 1999年8月第1次印刷  
书号/ ISBN 7-5037-2939-2/F.1176  
定价/ 22.00元

---

中国统计版图书, 版权所有, 侵权必究。

中国统计版图书, 如有印装错误, 本社发行部负责调换。

# 序

精算数学(Actuarial Mathematics)从英文字面上解,就是精算学中的数学,是精算师(Actuary)所使用的数学,是以概率论和数理统计为基础,以风险事件为研究对象,以保险发生理赔事件及理赔额的分布规律、保险人承担风险的平均损失及其分布规律、保险费和责任准备金等精算具体问题的计算方法等为研究内容的应用数学。

为了系统掌握精算学的基本理论与方法,打好精算数学的基础是前提。精算数学的内容很丰富,所应用的方法也是很先进的。目前,现代概率统计的许多方法,如鞅论(Martingale Theory)、倒向随机微分方程等已被用来研究精算学中许多艰深的理论与实践问题。

作为入门,本书将介绍精算学所需要的基本的概率统计、保险经济学、金融数学与生存分析的基本原理和方法。书中提供了许多练习与习题,这对有志于考取 FSA 的读者而言,不失为一本难得的参考书;对意欲界入保险精算理论研究的教学科研人员,也将有较大的研读价值。

本书的体系有别于通常的保险精算学教科书及参考书的体系。我们所研究的问题只限于带基础性的问题,并不涉及精算学中的保费定价、准备金计算等问题。至于寿险精算及养老金计划的一些较为专门性的及高级性的论题,我们将实施另一出版计划,估计可在二年内完成。本书的内容安排如下:

在第一章里,我们准备了概率统计方面的基础,包括了从随机变量到停时与鞅等方面的内容。这对已修过概率统计课程的读者可一跳而过。

第二章的内容限于保险经济学方面的定量化基础,如效用理论、

保险定价原理等。

第三章是经典风险论的内容,并构成现代风险论的研究基础。这一章的数学基础主要是复合分布理论、微分方程及随机点过程等。

第四章较为系统地讨论了利息理论,包括随机利息,这是寿险精算的重要基础,其研究方法也可应用于随机利息下的风险论。

第五章研究了寿险精算及养老金计划所常用的各种可能的生存模型,如单一生命的单减因模型、多减因模型与多状态生存模型;多重生命的联合生存模型、最后生存模型等。这构成了寿险及养老金计划的精算问题的研究基础。

本书的大部分内容,曾在为“保险精算与金融风险管理”方向的硕士生开设的“保险精算学”课程上讲授过。书稿排版出来后,我的硕士生刘春激、李宗琦、吴丽贤与陈志云等参与了订正工作,提出了宝贵的修改意见,藉此深表感谢!

本著作的编写工作得到了国家自然科学基金重点项目资助(项目批准号:19831020)的部分资助,得到了中国统计出版社在出版上的关心与大力支持。作者对此表示衷心的感谢。由于作者水平有限,错误之处在所难免,恳请读者和专家不吝赐教。

作者谨识

1999年4月于

暨南大学统计学系

# 目 录

序	
绪论: 精算学与精算教育 .....	1
<b>第一章 概率统计基础 .....</b>	<b>11</b>
§1.1 保险经营的一个随机模型 .....	11
§1.2 随机变量及其分布与数字特征 .....	13
1.2.1 常用的离散型分布 .....	15
1.2.2 常用的连续型分布 .....	19
§1.3 多元随机变量 .....	21
1.3.1 二元随机变量 .....	23
1.3.2 $n$ -元随机变量 .....	27
1.3.3 独立随机变量的和 .....	28
§1.4 大数定律与正态逼近 .....	30
§1.5 常用的随机过程 .....	33
1.5.1 独立增量过程 .....	36
1.5.2 Markov 链 .....	39
§1.6 鞅与停时 .....	42
1.6.1 离散时间鞅 .....	43
1.6.2 停时 .....	47
1.6.3 连续时间鞅 .....	50
小结 .....	51

习题一 .....	52
<b>第二章 保险经济学的定量化基础 .....</b>	<b>54</b>
§2.1 风险的偏好序 .....	55
2.1.1 随机优势序 .....	56
2.1.2 限损序及其等价的偏好序 .....	58
2.1.3 随机序、限损序的推广 .....	62
2.1.4 与生存分布有关的偏序 .....	66
§2.2 效用理论 .....	70
2.2.1 效用函数及风险厌恶系数 .....	70
2.2.2 期望效用原理及其应用 .....	72
2.2.3 最优保险 .....	76
§2.3 保险费定价原理 .....	79
2.3.1 显式保费定价原理 .....	81
2.3.2 隐式保费定价原理 .....	84
2.3.3 定价原理的性质 .....	86
小结 .....	89
习题二 .....	91
<b>第三章 风险模型 .....</b>	<b>94</b>
§3.1 个体风险模型 .....	94
3.1.1 个体理赔随机变量模型 .....	95
3.1.2 理赔总额 $S$ 的概率分布及其应用 .....	99
§3.2 短期聚合风险模型 .....	106
3.2.1 理赔总额 $S$ 的概率分布 .....	107
3.2.2 基本分布的选择 .....	110
3.2.3 复合 Poisson 分布的性质 .....	113

3.2.4 $S$ 的概率分布的逼近 .....	118
§3.3 长期聚合风险模型 .....	121
3.3.1 理赔过程 .....	123
3.3.2 祸因概率与调整系数 .....	126
3.3.3 与 $u - S(t)$ 有关的一些特殊随机变量的概率分布	132
§3.4 风险理论在非寿险经营中的应用 .....	136
3.4.1 个体风险模型的复合 Poisson 逼近 .....	136
3.4.2 限损再保险与团体保险的分红公式 .....	139
3.4.3 再保险对祸因概率的影响 .....	146
附录: 本章定理的证明	152
小结 .....	153
习题三 .....	154
<b>第四章 利息论基础</b> .....	<b>160</b>
§4.1 利息的度量 .....	160
4.1.1 积累函数与金额函数 .....	161
4.1.2 离散时间下的利息度量: 利息率与贴现率 .....	162
4.1.3 连续时间下的利息度量: 利息力 .....	166
4.1.4 单利与复利 .....	171
§4.2 利息问题求解 .....	173
4.2.1 时期的确定 .....	176
4.2.2 等值方程及其应用 .....	177
§4.3 确定年金 .....	182
4.3.1 给付期等于利息结算期的确定年金 .....	183
4.3.2 给付期不等于利息结算期的确定年金 .....	190
4.3.3 连续确定年金 .....	195
4.3.4 变动确定年金 .....	197

§4.4 离散时间下的随机利息 .....	204
4.4.1 独立同分布的情形 .....	204
4.4.2 时间序列模型 .....	207
4.4.3 现值函数的非随机化 .....	214
§4.5 连续时间下的随机利息 .....	223
4.5.1 摄动法 .....	224
小结 .....	226
习题四 .....	227
<b>第五章 生存模型</b> .....	<b>232</b>
§5.1 失效时间的概率分布 .....	233
§5.2 剩余寿命的概率分布 .....	237
5.2.1 截尾生存模型与剩余寿命的分布 .....	238
5.2.2 截尾分布的数字特征 .....	242
5.2.3 整值剩余寿命与分数年龄的假设 .....	244
§5.3 生命表 .....	248
5.3.1 生命表基本函数 .....	249
5.3.2 完整生命表 .....	259
5.3.3 节略生命表 .....	262
§5.4 多生命状态的生存模型 .....	265
5.4.1 联合生存状态 .....	265
5.4.2 最后生存状态 .....	268
5.4.3 单一生存状态、联合生存状态与最后生存状态间的关系 .....	269
5.4.4 复合状态 .....	272
5.4.5 一般联合状态 .....	272
5.4.6 顺位函数 .....	276

5.4.6.1 简单的顺位函数 .....	276
5.4.6.2 复合顺位函数 .....	280
§5.5 多重减因模型 .....	284
5.5.1 $T$ 与 $J$ 的概率分布 .....	285
5.5.2 多减因表的基本函数及其编制 .....	289
5.5.3 相关单减因表的基本函数及其编制 .....	297
§5.6 多状态生存模型 .....	304
附录: 定理 5.4.1 的证明 .....	309
小结 .....	310
习题五 .....	312
<b>附表 生命表 .....</b>	<b>314</b>
附表 1 中国人寿保险业经验生命表(1990~1993) (男) ..	314
附表 2 中国人寿保险业经验生命表(1990~1993) (女) ..	317
附表 3 中国人寿保险业经验生命表(1990~1993) (混合表) .....	320
附表 4 中国人寿保险业经验生命表(1990~1993) (养老金业务男表) .....	323
附表 5 中国人寿保险业经验生命表(1990~1993) (养老金业务女表) .....	326
附表 6 中国人寿保险业经验生命表(1990~1993) (养老金业务男女表) .....	329
<b>参考文献 .....</b>	<b>332</b>

## 绪论：精算学与精算教育

精算教育被引入我国已历时十载。自1992年11月南开大学设立全国第一个精算考试中心以来,北美精算师学会(SOA)已相继在长沙(湖南财经大学)、上海(复旦大学)、北京(中国人民大学)、广州(中山大学)共设立了五个考试中心,培养出20名准精算师(ASA)。方兴未艾的我国精算教育取得了长足的进步,精算教育的作用、地位已开始被金融、保险和社会各界所认识。精算学(Actuarial Science)是一门集数学、统计学、计算机科学、会计、金融、经济学、法律与通讯等学科于一体的综合性边缘学科。

### 一、精算学与精算师

精算学并非“精确计算的科学”的简称。简单地说,精算学就是处理金融风险的数学。它是数学、统计、计算机科学、会计、金融、经济学、法律与通讯等学科的组合。精算师(Actuaries)就是从事精算工作的人员。于此,我们首先着重介绍精算学与统计学、投资学、会计学、金融学等学科的关系。

1. **精算学与统计学的关系。**精算学是运用统计方法,根据经验数据来分析和预测未来发展趋势,例如构造生存模型、编制生命表、确定损失分布、计算费率和准备金(这些就是精算数学、风险理论的研究内容)。基于这点,在精算学发展史上,有人曾把精算当

作“保险统计”。统计学,尤其是概率统计、统计预测及决策理论构成了精算师基础教育的主要内容。

2. **精算学与投资学的关系。**投资是指经济主体购买资产(金融资产或实物资产),以便在未来某个时期取得与承担风险成比例的收入的经济行为。投资的根本问题就是投资决策的问题。精算师在识别和控制利率风险以及确定合理的投资组合等方面的工作是保险公司正常运作的基础。所以精算学的发展有赖于投资学理论的应用。

3. **精算学与财务、会计学的关系。**会计是管理经济活动的手段之一,是利用资金的价值形式,以货币为主要计量尺度应用专门的核算方法,通过记帐、报帐等程序,以实现其对经营活动所起的核算、监督、预测、决策、控制和分析等六大职能。在保险公司中,精算的职能主要是:负责保费设计、准备金核算、红利和佣金的合理匡算,使会计流程规范、合理;对公司财务过程进行技术监督;更为重要的是对未来的财务风险作出评估与预测,使企业的经营管理建立在科学的基础上,并确保企业的稳妥经营。这样看来,精算职能的实现,有赖于财务会计工作质量的提高。

4. **精算学与金融、保险学的关系。**精算对保险业务所进行的科学定量分析所依据的是保险学的基本原理,对保险公司进行的有效金融管理所使用的工具是大量的包括衍生证券在内的金融创新。

综上所述,可以给精算学下一个参考性的定义:精算学是根据经济学的基本理论,运用数学与统计学方法,结合经济、金融、保险等理论,对各种经济活动中的财务风险进行分析、估价和管理的综合性应用科学。

在北美,精算师是一个薪水很高的职业。据美国1988年及1995年出版的*Les Krantz's Jobs Rated Almanac*(职业排行榜),精算师在从会计师(Accountant)到动物学家(Zoologist)的250个职业中,从工作环境、薪水、体质要求、所承受的工作压力、前景与保障等方面综合考虑,排行第一。

在1988年北美精算师学会(SOA)所发表的《未来精算师特别工

作组》研究报告中,对精算师下了这么一个定义:“精算师是私人 and 公共财务设计师和潜在的企业管理人员,这是建立在精算职业的智能核心基础上的,其智能核心为经验分析和分析衡量、估算、转移以及对未来意外事件的现行财务状况作出反映。”现任的北美精算学会副会长张源先生在最近举行的中美上海保险精算研讨会所作的报告中,对精算师的智能核心作用作了一段精辟的阐述:“精算师将能够处置一个系统内不确定性的长期财务影响及其财务损失的影响,这个系统可以是保单体系或保险公司,可以是商业养老金或公共养老金体系,也可以是商业银行、任何金融中介、长期资本项目、机场、收费道路、铁路,甚至可以是三峡工程。”

在北美,精算师的从业范围已从保险公司扩展到其它行业。精算师在诸如银行、顾问咨询公司、投资公司、大型跨国公司、会计师事务所、工会以及政府机构等部门被委以重任。他们在帮助公司制定养老金计划、确定合理的投资组合、估计公司(不确定性的)营运成本、估计国际商贸和海外投资风险;为政府提供医疗制度的成本分析、工伤赔偿办法、艾滋病对策、社会保障体制等方面的建议;对政府新颁布的法律、法令在经济中的影响进行预测等。精算师有二种级别:准精算师(ASA)与正精算师(FSA)。此外还有财产和意外险精算师(ACAS, FCAS)、养老金精算师。

## 二、北美精算师考试制度(2000年以前)

鉴于精算师的职业特点,世界上许多经济发达国家相继建立了精算师考试制度,纷纷设计出一套的考试课程体系。其中,比较著名的是北美精算师学会(SOA)考试制度、美国财产和意外险精算师学会(CAS)考试制度。于此,我们仅介绍北美精算学会考试制度。

北美精算学会是一个国际性的精算教育和研究机构及其会员的学术团体,成立于1949年,总部设在美国的伊利诺斯州肖伯格。该组织的主要任务是:提供人寿保险、健康保险、员工福利和养老金领域

的精算教育计划,以继续教育方式提高精算师的咨询和解决涉及不确定性事件的金融、保险、财务及社会问题的能力;其研究机构主要对历史经验数据和预测技术进行研究,并从精算角度分析公共政策问题、提出解决问题的方案。SOA 的教育计划是由教育和考试委员会管理:教育委员会负责教育计划中课程教材的选择和编写,考试委员会负责各门课程的考试与批分。

表1 ASA 考试课程

100 系列课程			200 系列课程		
编号	课程名称	学分	编号	课程名称	学分
100	微积分和线性代数	30	200	经济保障计划概论	30
110	概率论和数理统计	30	210	精算实务概论	25
120	应用统计	15	220	资产管理和公司财务概论	30
130	运筹学	15	230	资产和负债管理原理	15
135	数值分析	10			
140	复利数学	10			
150	精算数学	40			
151	风险理论	15			
160	生存模型和生命表编制	15			
161	人口数学	10			
165	修匀数学	10			

SOA 的精算考试制度分为二个阶段:第一阶段是准精算师(ASA),目前所要求的学分为300学分;第二阶段是正精算师(FSA),目前所要求的学分为150学分。表1给出了ASA所要通过的15门课程。ASA考试课程相当于美国大学中的精算教育水平。在北美,有不少大学设有精算系(专业),但是许多考生是在取得一定学分到保险公司和其他机构工作后再继续参加考试,通过每次考试后用人单位才报销其考试费用,并依据其成绩和工作业绩表现来考虑其升职。考生在取得ASA资格证书后才可参加FSA课程考试。目前FSA的考试课程分为五个方向(如表2所示)。要取得FSA资格必须通过其中一个方向的所有课程考试,并选择其它方向的一些课程,使学分达到150分。此外,当FSA所要求的全部课程考试全部通过后,考生还要参加最后一门课程——FSA认可课程(FAC),其内容主要是

职业道德和案例,时间为二天半,一般只要自始至终参加,在结束后的晚宴上会获得FSA证书。

表2 FSA 考试课程

财 务			个人人寿和年金保险		
编号	课程名称	学分	编号	课程名称	学分
F385	财务管理	20	L340	个人人寿和年金保险的 精算实务调查	30
F580	公司财务	15	L343	人寿保险法和税收	15
F585	应用公司财务	20	L441	高级设计和定价	25
F590	公司战略和偿付能力管理	10	L443	估价和财务报告专题	25
团体和健康保险			L540	个人人寿和年金保险的 营销	10
G320	团体和个人健康保险的 设计和销售	30	L545	丧失工作能力收入	15
G421	团体和个人健康保险的 财务管理和法规	25	L550	再保险专题	15
G422	团体和个人健康保险的 定价	25	养 老 金		
G522	高级品种	10	P360	养老金估价原理 I	15
G523	非养老年金的退休后 和就业前的福利	10	P362	退休计划设计	15
G525	灵活的福利计划	10	P363	养老金筹资工具	15
G528	健康保险专题	15	P365	养老金计划的法律规定	25
投 资			P461	养老金估价原理 II 和 养老金计划会计标准	20
V480	衍生证券: 理论和应用	20	P560	国际养老金问题	20
V485	高级资产组合管理	15	P564	作为专家证人的精算师	10
V595	资产和负债管理应用	20	P567	退休收入保障	25

以上的SOA课程的要求是很高的,包括了数理基础课、财经基础课、精算专业基础课、精算专业方向课,需要文理科的很好结合,加大了考试难度。最近几年里,SOA已注意到此问题,已制定出2000年以后的考试制度。

### 三、北美精算师考试制度(2000年及以后)

SOA所提出的2000年及以后的新考试课程设置是基于四项原则:(1)只考那些精算师教育中最本质的课程;(2)提供与现代数学教育严格一致的商业内容;(3)包含所有种类的风险,而不仅仅是生

命风险; (4) 包含保险及年金领域以外的模型。这些原则要求把基础精算教育重新划分为以下五类:

- (1) 预备教育: 所有精算师都需要学的非精算方面的课程。这些课程通常可在大学中学习。
- (2) 基础教育: 所有精算师都需要学的精算方面的六门课程。这是或得 ASA 资格所必须通过的课程。
- (3) 高级教育: 精算师在一些特殊领域需要、在相当长时间内保持稳定, 且与具体国情无关的二门课程。
- (4) 职业发展: 主要是高度专业化的课题, 与国情相关或变化很快。完成职业发展这一步骤需要个人自己决定并满足自己职业方面的需要。
- (5) 职业作风: 会员入会课程, 是精算师候选人正式教育过程的最后一个阶段。课程包括职业道德教育、职业行为准则、精算标准与纪律、以及解决一些具体实践中的商业问题。

要成为 FSA, 必须成功地完成以上各类教育的学习。下面介绍基础教育与高级教育所需的八门课程(前六门为 ASA 所需)的主要内容。

课程1. 精算学的数学基础。由三部分组成: (1) 微积分 (40%) —— 极限, 连续性、可微性、可积性、级数、序列、导数、积分、偏导数、重积分。(2) 概率论 (20%) —— 集合论、概率公理、离散与连续随机变量、条件概率与 Bayes 定理、联合与条件概率分布及期望。(3) 风险管理 (40%) —— 损失频率、损失严重性、自留、免赔、共保与风险保费。

课程2. 利息理论、经济学与金融学。要求掌握: (1) 利息理论 —— 微积分与概率在离散及连续年金、复利函数、债券与收益率中的应用。(2) 微观经济理论 —— 消费(含不确定性下的消费选择)、生产、定价、资源分配理论, 保险经济学(含不利选择、道德危险)。(3)

宏观经济理论——国民收入决定理论及原理, 储蓄、消费、投资及其它的与国民经济与国际经济有关总量分析及其与失业、通货膨胀及稳定性的关系。(4) 金融学基础——财务管理导论(含财务报表、与金融环境); 基本概念, 如风险、回报率与股票价值; 资本预算问题, 如资金成本、现金流估计; 战略性长期财务决策, 如资金周转手段(Leverage)、分红政策与普通股或长期债务的发行; 国际财务管理。考试内容分五部分: (i) 利息论应用 (30%); (ii) 微观经济学、宏观经济学的基本概念及精算问题的金融 (15%); (iii) 微观经济学尤其是不确定性经济学的专题讨论(20%); (iv) 利用利息论的宏观经济学定量方面的专题讨论(15%); (v) 利用利息论的金融定量方面的专题讨论(20%)。

课程3 . 意外事故的精算模型。要求掌握: (1) 保险与其它金融风险中所考虑的意外性; (2) 生存模型——生存分布的特征: 单一与多重减量、单一与多重生命、离散与连续情形; (3) 生存资料的分析——参数与非参数统计分析、对解释变量的依赖性。(4) 意外事故的金融影响的定量化——现值随机变量及其分布、精算现值与终值、意外年金、保险、确定保费与准备金的等价原理与其它原理、利率过程的随机方法。考试内容分三部分: (i) 生存模型 (20%); (ii) 生存资料分析 (20%); (iii) 意外事故的金融影响的定量化 (60%)。

课程4 . 精算建模方法。由二部分组成: (1) 建模 (10%) ——模型的定义, 为何且如何使用模型、建模的优点与局限性, 确定性与随机模型, 模型选择, 投入分析, 产出分析、灵敏度测试、结果的表达; (2) 方法——回归分析 (15%), 预测 (15%)、风险理论 (20%)、信用理论(15%)、损失分析与损失频率分布(15%)、模拟技术(10%)。

课程5 . 基本精算原理的应用。由五部分组成: (1) 产品设计(20%), (2) 风险分类 (10%), (3) 定价、费率厘定、基金累积 (25%), (4) 营销、分配、管理(20%), (5) 负债与基金累积的估值精算技术 (25%)。

课程6 . 投资与资产管理。由五部分组成: (1) 资本市场(15%),