JIE GOU SHU XUE CONGSHU

结构数学丛书

数值计算方法

钟万勰　何　穷　刘正兴　编著

中国建筑工业出版社

结构数学丛书

数值计算方法

钟万勰 何穷 刘正兴 编著

中国建筑工业出版社

本书针对土建结构分析中经常用到的数值方法作一比较新颖的论述。将经典材料与这一领域的最新进展结合起来。重点是工程科学计算方面，但也顾及到其它一些常用的计算机方法。第一、二章是插值、数值微分和数值积分；第三、四章详尽地阐述线性代数方程求解的常用的最新方法，并给出程序段；第五、六、七、八章介绍有限元方法；第九章介绍求解矩阵特征值的现代方法；第十章结合回转对称结构的有限元方法讲述富里叶级数方法及其应用；第十一章介绍非线性有限元及其解法；第十二章简单介绍群论方法在结构分析中的应用；第十三章介绍图论的一些基本概念和应用。本书适合于工程技术人员、研究人员和大学教师阅读或自学，也可作为研究生、高年级大学生的参考书。

结构数学丛书

数值计算方法

钟万勰　何穷　刘正兴　编著

•

中国建筑工业出版社出版、发行(北京西郊百万庄)

新　华　书　店　经　销

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

•

开本：850×1168毫米 1/32　印张：17⅛　字数：460千字

1991年8月第一版　1991年8月第一次印刷

印数：1— 2,080册　定价：13.15元

ISBN7—112—00722—4/TU·513

(5826)

出 版 说 明

工程理论的发展与数学理论有着密切的关系，为使结构工程技术人员掌握有关的数学理论，便于采用新的结构设计计算方法和进行结构理论研究，我社组织出版这套结构数学丛书。丛书的对象是已学过目前大学工程专业中数学、结构力学以及工程结构设计等课程的高年级大学生和在职工程技术人员。

本丛书介绍一系列有关土建结构设计计算新方法的数学理论和方法。每一种书中集中介绍一门数学的学科或一个专题；着重于使读者能充分掌握和学会运用各种数学的基本方法，而不过分强调数学理论推导的阐述。书中以数学基本理论和概念为主线，以结构设计的应用为横线，尽量多举土建结构计算中有代表性的实例进行阐述。内容除包括基本方法的介绍外，也旁及国内外该门数学在工程结构中的应用情况，使读者对其有一概括性的了解。叙述力求简明扼要，重点突出，有介绍，有分析，有评价，易为读者接受。

本丛书已拟订的选题计有：变分学、模糊数学、数学规划方法、可靠性数学、数值计算方法、福氏变换与谱分析、统计数学。今后有条件时将陆续拟订新选题组织出版。

本丛书在组织过程中得到胡海昌教授、王光远教授、钟万勰教授、李继华教授大力支持，王光远教授还直接参加了拟订选题和组稿工作，我们在此表示感谢。

序　言

自从电子计算机问世以来，多种学科的面貌为之改观，土建工程也不例外。随着计算机的发展应运而生的计算结构力学与有限元方法在土建工程中得到了广泛的应用，它们也是计算机在科学计算上的典型应用之一；计算机图学与辅助设计为土建工程提供了强有力的工具；计划与管理调度在土建工程中也有广阔的应用等等。这些进展表明，土建工程对于数学知识的应用提出了新的要求。本书是在这方面的一种努力。

本书认为读者已具备了工科专业的数学分析知识。选材着重于工程科学计算方面，同时也顾及其它方面的基本内容。数据是作出判定的依据，数值分析的重要性与日俱增，因此计算机数值方法贯串于本书始终，对于最常用的数值方法还给出其算法乃至计算机程序。

前两章讲述最基本的数值方法；第3、4两章讲述了线性代数计算方法，这也是应用最广泛的；5至8章讲述了有限元方法；第九章的矩阵特征值问题对于振动与稳定问题是必不可少的；富里叶级数是常用的数学工具，第10章结合回转对称结构讲述了富里叶级数的基本方法及其应用；第11章讲述非线性有限元及其解法，它目前是正在发展的一个领域；第12章是群论及其在结构分析中的应用，讲述了群的线性表示理论及在对称结构分析中的应用，读者并不需要预先熟悉群论的知识，据此就可掌握群论的应用方法。

本书适用于大学高年级学生及研究生，也适合于工程技术人员自学之用。

目　录

第一章　曲线拟合与数值微分

§1.1　引言……1

§1.2　线性插值与二次插值……2

§1.3　拉格朗日插值……5

§1.4　牛顿插值公式……8

§1.5　带导数的插值问题……12

§1.6　分段多项式插值……14

§1.7　三次样条插值……17

§1.8　最小二乘方逼近……20

§1.9　贝齐尔多项式拟合……20

§1.10　数值微分……24

第二章　数值积分

§2.1　矩形和梯形公式……30

§2.2　插值型求积公式……33

§2.3　龙贝格积分……37

§2.4　高斯积分公式……39

第三章　线性代数方程组直接解法

§3.1　矩阵代数基本知识……44

§3.2　高斯消元法……62

§3.3　矩阵的三角分解……70

§3.4　对称阵的三角分解……74

§3.5　变带宽存储的LDLT分解……79

§3.6　逐步执行三角化……86

§3.7　三角化的计算机执行……92

§3.8　回代求解算法……105

§3.9　节点未知数编序和编排算法……110

第四章　线性代数方程组迭代解法
§4.1　线性迭代法……117
§4.2　松弛技术……121
§4.3　迭代法的收敛性……121
§4.4　斜量法……125
§4.5　非线性方程解法……130
第五章　变分法及能量原理
§5.1　变分法简介……139
§5.2　小位移弹性理论简介……154
§5.3　能量原理……161
第六章　有限单元分析
§6.1　杆单元的刚度矩阵……171
§6.2　梁单元……176
§6.3　三角形平面单元……193
§6.4　矩形薄板单元……197
§6.5　离散克希霍夫假定的薄板单元……200
§6.6　杂交应力单元和拟协调元……205
§6.7　从柔度矩阵推导刚度矩阵……213
第七章　等参单元
§7.1　形函数……219
§7.2　坐标变换……225
§7.3　位移和应变……229
§7.4　刚度矩阵和节点载荷……232
第八章　动力问题的有限单元法
§8.1　弹性系统的动力方程……237
§8.2　质量矩阵和阻尼矩阵……238
§8.3　结构的自振特性……249
§8.4　结构的动力响应……257
第九章　矩阵特征值问题
§9.1　特征值问题……269
§9.2　特征值的一些性质……271
§9.3　特征向量及其性质……272
§9.4　圆盘定理……276

§9.5　广义特征值问题……278
§9.6　求模最大的特征值-幂法……280
§9.7　求模最小的特征值-逆幂法……284
§9.8　用移轴技术求最大与最小特征值……285
§9.9　用迭代法求次特征值……287
§9.10　广义特征值问题的逆迭代算法……291
§9.11　兰召斯(Lanczos)算法……295
§9.12　雅可比方法……298
§9.13　矩阵的三对角化……303
§9.14　QL算法……313
§9.15　斯端姆序列和二分法……326
§9.16　子空间迭代法……330
第十章　半解析有限元法
§10.1　引言……344
§10.2　富里叶级数……345
§10.3　回转对称有限元分析……352
§10.4　回转对称结构通用程序简介……367
第十一章　非线性有限元
§11.1　小位移弹性问题中的增量变分原理……373
§11.2　有限变形的基本理论……381
§11.3　有限变形分析中的有限单元……403
§11.4　非线性问题的一般解法……431
第十二章　群论初步及其在结构分析中的应用
§12.1　群的基本概念……438
一、群的定义……438
二、重排定理……442
三、共轭元素分类……443
四、子群……444
五、陪集……444
六、正规子群……445
七、群的直接乘积……446
八、同构与准同构……446
九、点群……448

§12.2 群的线性表示……449
一、群的线性表示导论……449
二、对称坐标系集合……454
三、正则表示……456
四、线性表示的一些性质……458
五、化归么矩阵的线性表示……460
六、不变子空间与可约表示……461
七、舒尔引理及正交定理……466
八、群空间……471
九、表示的特征标……472
十、可约表示的约化……473
十一、正则表示的约化……474
§12.3 能量的正交性……482
一、对称结构的有限元计算模型……482
二、能量的约化……485
三、变形能的计算及算例……494
第十三章 图论基本知识
§13.1 形式逻辑……502
§13.2 集合及其运算……504
§13.3 笛卡儿积、幂集、关系、集合的划分和覆盖……507
§13.4 有关图的一些基本概念和术语……512
§13.5 有向图……515
§13.6 树形结构……520
§13.7 二权树……523
§13.8 PERT图……530
参考文献……536

第一章 曲线拟合与数值微分

§ 1.1 引 言

给定一系列点，寻找一条曲线通过这一系列给定点，这通常称之为插值；如果是寻找一条曲线，通过这些给定点的邻域，则可以称之为逼近。作为这二类任务的统称，可以叫作拟合。

曲线拟合问题在工程设计、施工制造、计算机图像与计算机辅助设计等领域中有广泛应用。例如汽车表面可以用一系列离散的点表示；计算机控制零件加工时需要通过一系列点的光滑曲线表达式；实验数据的处理需要曲线逼近；计算机绘图与图像广泛地用到曲线拟合，等等。

用计算机解算问题时，任何涉及连续变量的计算问题都需经过离散化才能解算。例如数值微商、数值积分以及解微分方程的有限差分方法和有限元方法，基本上都用到在离散数据的基础上补插出连续函数的思想和方法。因此，插值法是数值计算方法的基础。

这里给出按函数值的插值法的定义：

设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，在$[a,b]$上已知点x_0，$x_1\cdots\cdots x_n$上取值y_0，$y_1\cdots\cdots y_n$，若存在一简单函数$P(x)$，使

$$P(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,\cdots n) \tag{1-1-1}$$

成立，则称$P(x)$为$f(x)$的插值函数，$x_0,x_1,\cdots x_n$为插值点，$[a,\ b]$为插值区间。若$P(x)$是次数不超过n的代数多项式：

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots a_nx^n \tag{1-1-2}$$

则$P(x)$为插值多项式，相应的插值法为多项式插值。若$P(x)$为

分段多项式，就是分段插值。

图1-1-1中的$f(x)$表示真实曲线，$P(x)$是由多项式插值得到的曲线，用它来逼近$f(x)$。

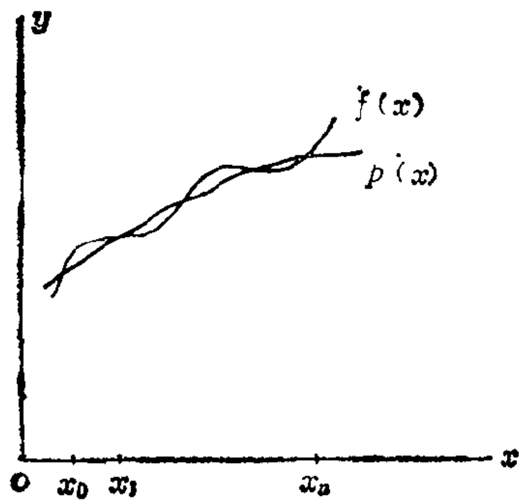

图 1-1-1

§1.2 线性插值与二次插值

一、线性插值

已知函数$y=f(x)$在点x_0、x_1处的值为y_0，y_1，作多项式$P_1(x)$，使$P_1(x_0)=y_0$，$P_1(x_1)=y_1$。这样得到的$P_1(x)$，就是过图1-2-1所示（x_0,y_0）和（x_1,y_1）两点的直线：

$$P_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

$P_1(x)$称为一次插值多项式，它的余项估计为（证明从略）

$$R_1(x)=f(x)-P_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1) \qquad (1\text{-}2\text{-}2)$$

$$x_0\leqslant\xi\leqslant x_1$$

将（1-2-1）改写成两点式直线方程，是

$$P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1 \qquad (1\text{-}2\text{-}3)$$

并令 $$N_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad N_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \qquad (1\text{-}2\text{-}4)$$

显然有
$$N_0(x)=1,\quad N_0(x_1)=0$$
$$N_1(x_0)=0,\quad N_1(x_1)=1$$
$$N_0(x)+N_1(x)=1$$
则（1-2-3）式可表示为
$$P_1(x)=N_0(x)y_0+N_1(x)y_1 \tag{1-2-5}$$

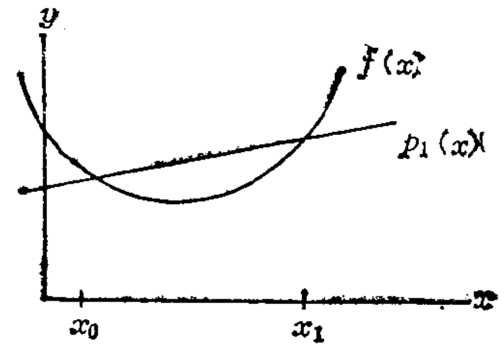

图 1-2-1

其中$N_0(x)$，$N_1(x)$称为线性插值的基函数或形函数。（1-2-5）式是一种很有用的形式。从（1-2-2）式看出，线性插值对于函数值有二阶精度，而对于导数值也有了逼近性。

二、二次插值

线性插值是用两点（x_0,y_0）及（x_1,y_1）之间的直线代替$y=f(x)$，误差较大。可以设想，再增加一个插值点（x_2,y_2），结果会比线性插值好。通过三点的一个插值多项式$P_2(x)$是抛物线，是一个二次多项式：
$$P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \tag{1-2-6}$$
待定系数a_0，a_1，a_2可通过条件$P_2(x_i)=y_i(i=0,1,2)$得到的三元一次方程求出。但实际上，$P_2(x)$可根据条件改写成如下形式：
$$P_2(x)=P_1(x)+A(x-x_0)(x-x_1)$$
即
$$P_2(x)=y_0+\frac{y-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)+A(x-x_0)(x-x_1) \tag{1-2-7}$$
（1-2-7）式显然满足$P_2(x_0)=y_0$，$P_2(x_1)=y_1$。并且用$P_2(x_2)=y_2$定出A：

$$A=((y_2-y_0)/(x_2-x_0)-(y_1-y_0)/(x_1-x_0))/(x_2-x_1) \tag{1-2-8}$$

这是二次插值多项式，它的余项估计为

$$R_2(x)=f(x)-P_2(x)=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)\times(x-x_2)\quad\xi\in[x_0,\ x_1,\ x_2,\ x] \tag{1-2-9}$$

显然，$P_2(x)$有函数值的三阶精度，二阶导数的逼近性。

插值函数(1-2-7)也可以表示为有限元法中常用的与(1-2-5)式类似的形式

$$P_2(x)=N_0(x)y_0+N_1(x)y_1+N_2(x)y_2 \tag{1-2-10}$$

其中基函数是

$$\left.\begin{aligned}N_0(x)&=(x-x_1)(x-x_2)/(x_0-x_1)/(x_0-x_2)\\N_1(x)&=(x-x_0)(x-x_2)/(x_1-x_0)/(x_1-x_2)\\N_2(x)&=(x-x_0)(x-x_1)/(x_2-x_0)/(x_2-x_1)\end{aligned}\right\} \tag{1-2-11}$$

显然有

$$\left.\begin{aligned}N_0(x_0)=1,N_0(x_1)=0,N_0(x_2)=0\\N_1(x_0)=0,N_1(x_1)=1,N_1(x_2)=0\\N_2(x_0)=0,N_2(x_1)=0,N_2(x_2)=1\end{aligned}\right\} \tag{1-2-12}$$

请读者自行验证。

【例 1-2-1】 在四位自然对数表查得：

$$\ln 3.1=1.1314,\quad \ln 3.2=1.1632$$

用线性插值求$\ln 3.16$。这里可取 $x_0=3.1$，$x_1=3.2$，$f(x_0)=1.1314$，$f(x_1)=1.1632$，利用插值公式(1-2-1)

$$P_1(3.16)=1.1314+0.06\times\left(\frac{0.0318}{0.1}\right)$$

$$=1.15048\approx 1.1505$$

这个结果与对数表中值$\ln 3.16=1.1506$相比，仅在第四位小数上相差单位1。

【例 1-2-2】 根据函数$f(x)$的下列三点值

$$x_0=1.1\qquad f(x_0)=10.6$$

$$x_1 = 1.7 \qquad f(x_1) = 15.2$$

$$x_2 = 3.0 \qquad f(x_2) = 20.3$$

利用二次插值公式求$f(2.3)$的近似值。

利用二次插值公式（1-2-10），有

$$\begin{aligned} f(2.3) \approx P_2(2.3) &= \frac{(2.3-1.7)(2.3-3.0)}{(1.1-1.7)(1.1-3.0)}(10.6) \\ &+ \frac{(2.3-1.1)(2.3-3.0)}{(1.7-1.1)(1.7-3.0)}(15.2) \\ &+ \frac{(2.3-1.1)(2.3-1.7)}{(3.0-1.1)(3.0-1.7)}(20.3) = 18.38 \end{aligned}$$

线性与二次插值容易编成计算机程序，读者可从文献[ ]中查到。

§1.3 拉格朗日插值

以节点函数值$y_0, y_1, \cdots\cdots y_n$为基础的形如(1-2-5)和(1-2-10)式的插值，叫拉格朗日（Lagrange）插值。把它推广到一般情形，作n次插值多项式$P_n(x)$，使满足

$$P_n(x_i) = y_i \quad i = 0,1,2,\cdots\cdots n \tag{1-3-1}$$

由（1-2-4）及（1-2-11）式的启发，它的$n+1$个基函数为

$$N_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (x - x_k)/(x_i - x_k) \quad i = 0,1,2,\cdots\cdots n \tag{1-3-2}$$

显然有

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1-3-3}$$

因此
$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} N_i(x) y_i \tag{1-3-4}$$

（1-3-4）式称为拉格朗日插值多项式。设

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \tag{1-3-5}$$

而它在x_i处的导数为

$$\omega'(x_i)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(x_i-x_k) \tag{1-3-6}$$

因而 $$N_i(x)=\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} \quad i=0,1,2,\cdots\cdots n$$

（1-3-7）

于是（1-3-4）式可改写成如下形式

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)}y_j \tag{1-3-8}$$

上机计算时，可采用下列表达式

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)\right)y_k \tag{1-3-9}$$

利用洛尔（Rolle）定理可以证明，n 次拉格朗日插值余项为

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\omega(x)$$

$$\xi\in[x_0,\cdots,x_n,\ x] \tag{1-3-10}$$

利用插值公式（1-3-9）计算，当精度不够时，需增加节点重新计算，但原来的计算中间数据不能利用。为克服这一缺点，将（1-3-8）改写成如下形式

$$P_{0,1,\cdots,n}(x)=\omega(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{y_j}{(x-x_j)\omega'(x_j)} \tag{1-3-11}$$

如果去掉插值点 x_n，则 $n-1$ 次插值多项式为

$$P_{0,1,\cdots,n-1}(x)=\omega(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{y_j(x_j-x_n)}{(x-x_j)(x-x_n)\omega'(x_j)} \tag{1-3-12}$$

若去掉 x_0，则有

$$P_{1,2,\cdots,n}(x)=\omega(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{y_j(x_j-x_0)}{(x-x_j)(x-x_0)\omega'(x_j)} \tag{1-3-13}$$

由（1-3-11）、（1-3-12）和（1-3-13）可得如下关系

$$P_{0,1,\cdots,n}(x)=\frac{x-x_n}{x_0-x_n}P_{0,1,\cdots,n-1}(x)$$

$$+\frac{x-x_0}{x_n-x_0}P_{1,2,\cdots,n}(x)$$

$$=P_{0,1,\cdots,n-1}(x)+\frac{x-x_0}{x_n-x_0}$$

$$\times[P_{1,2,\cdots,n}(x)-P_{0,1,\cdots,n-1}(x)]$$

（1-3-14）

公式（1-3-14）说明n次拉格朗日插值多项式可由两个$n-1$次插值多项式通过线性插值得到。公式（1-3-14）称为埃特金（Aitken）逐步插值。设有$n+1$个插值点x_1，$x_2\cdots\cdots x_{n+1}$，其函数值为P_1^0，P_2^0，$\cdots\cdots P_{n+1}^0$。下边逐步从$i=1$到$i=n$构造出可在计算机上执行的一个算法。

$i=1$，插值点为x_1，x_2，则有

$P_1^1=P_1^0+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(P_2^0-P_1^0)$　注P_1^1即$P_{1,2}(x)$

$i=2$，插值点为x_1，x_2，x_3

$P_2^1=P_2^0+\frac{x-x_2}{x_3-x_2}(P_3^0-P_2^0)$　P_2^1即$P_{2,3}(x)$

$P_1^2=P_1^1+\frac{x-x_1}{x_3-x_1}(P_2^1-P_1^1)$　P_1^2即$P_{1,2,3}(x)$

$i=3$，插值点又增加了x_4

$P_3^1=P_3^0+\frac{x-x_3}{x_4-x_4}(P_4^0-P_3^0)$　P_3^1即$P_{3,4}(x)$

$P_2^2=P_2^1+\frac{x-x_2}{x_4-x_2}(P_3^1-P_2^1)$　P_2^2即$P_{2,3,4}(x)$

$P_1^3=P_1^2+\frac{x-x_1}{x_4-x_1}(P_2^2-P_1^2)$　P_1^3即$P_{1,2,3,4}(x)$

一般地，归纳一个通式：

$$\left.\begin{aligned}&P_i^1=P_i^0+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}(P_{i+1}^0-P_i^0)\quad i=1,2,\cdots\cdots n\\&P_L^{j+1}=P_L^j-\frac{x-x_L}{x_{i+1}-x_L}(P_{L+1}^j-P_L^j)\quad j=1,2,\cdots i-1\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad L=i-j\end{aligned}\right\}$$

（1-3-15）

这样的算法，后边计算时，前边的计算结果完全有效，可为后边继续计算时用。最后算得的P_1^{n-1}即为$P_{1,2,\cdots,n}(x)$。

埃特金逐步插值算法

注：给定$n+1$个插值点，求某一点x的插值

```
FOR i:=1 STEP 1 UNTIL n DO
BEGIN
    P_i:=P_i+(x-x_i)/(x_{i+1}-x_i)*(P_{i+1}-P_i);
          注：（1-3-15）第一式
FOR j:=1 STEP 1 UNTIL i-1 DO
BEGIN l:=i-j;
    P_l:=P_l-(x-x_l)/(x_{i+1}-x_l)*(P_{l+1}-P_l);
END;
IF（P_1满足精度要求） THEN{跳出循环}
END;
```

§1.4 牛顿插值公式

在有$n+1$个插值点$x_0,x_1,\cdots\cdots x_n$的情形下，函数$f(x)$的插值多项式可写为

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \quad (1\text{-}4\text{-}1)$$

根据插值条件

$$P_n(x_i)=f(x_i) \quad i=0,1,\cdots\cdots n \quad (1\text{-}4\text{-}2)$$

可唯一地确定$a_0,a_1,\cdots\cdots a_n$的值。其中

$$a_0=f(x_0)$$

$$a_1=(f(x_1)-f(x_0))/x_1-x_0$$

$$a_2=[(f(x_2)-f(x_0))/(x_2-x_0)-(f(x_1)-f(x_0))/(x_1-x_0]))/(x_2-x_1)$$

定义 $$f[x_0,x_1]=(f(x_1)-f(x_0))/(x_1-x_0) \quad (1\text{-}4\text{-}3)$$

为$f(x)$的一阶均差。类似地