数学

福州市教师进修学院　福州市数学会　编

新编高中数理化复习参考书

SHULIHUA

天津科学技术出版社

新编高中数理化复习参考书

数　学

福州市教师进修学院
福州市数学会　编

天津科学技术出版社

新编高中数理化复习参考书

数　学

福州市教师进修学院
福 州 市 数 学 会　编

*

天津科学技术出版社出版
天津市赤峰道124号
天津新华印刷一厂印刷
天津市新华书店发行

*

开本787×1092 毫米 1/32 印张 10 3/8 字数 220,000
一九八〇年十二月第一版
一九八〇年十二月第一次印刷
印数：1—246,000

统一书号：13212·23　定价：0.85元

前　言

为了提高中学学生数理化基础知识水平，以适应四个现代化的需要，我们根据教育部制定的中学教学大纲和全国统编教材的精神，在总结教学经验和分析学生掌握知识情况的基础上，编写了这套《新编高中数理化复习参考书》。其中包括《数学》、《物理》（上、下册）、《化学》、《数学习题及解答》（上、下册）、《物理习题及解答》（上、下册）、《化学习题及解答》等九册。

这套书着眼于帮助读者切实掌握数理化基础知识，增强分析和解决问题的能力；在编写上特别注意到学科内容的系统性和内在联系，概括出简明的复习要点，同时，精选一定数量的典型例题和习题，附有分析方法与解题途径，具有一定的深度和广度，在例题与习题的解答上，注意引导学生掌握正确的分析方法与解题途径。便于读者打开思路，开阔眼界，收到举一反三、融会贯通的效果。本套书可供应届高中毕业生和知识青年准备升学的复习之用，也可供中学教师教学及各年级学生的复习参考之用。

本书是数学分册，由池伯鼎、周志文、林振铨、郭仰嵩、魏长庚、任寿彬、陈金华、倪木森、高玉栋、陈敏贤、林宗炘、郭道平、吴大钟、李必成、林玉润等同志编写与审阅。

本书各章习题及解答参阅《数学习题及解答》（上、下

册）。

本书在定稿前，虽经反复讨论、修改，但限于我们的水平，缺点和错误在所难免，希望得到广大读者的批评指正。

福州市教师进修学院

福 州 市 数 学 会

一九八〇年一月

目　　录

第　一　章　数与式……………………………………（1）
第　二　章　方程与方程组……………………………（13）
第　三　章　不等式……………………………………（32）
第　四　章　集合与对应………………………………（47）
第　五　章　函数………………………………………（57）
第　六　章　数列………………………………………（71）
第　七　章　复数………………………………………（81）
第　八　章　排列与组合………………………………（92）
第　九　章　数学归纳法………………………………（99）
第　十　章　二项式定理 ……………………………（104）
第十一章　任意角的三角函数 ……………………（109）
第十二章　两角和与差的三角函数 ………………（126）
第十三章　解三角形 ………………………………（146）
第十四章　反三角函数与三角方程 ………………（165）
第十五章　直线形 …………………………………（189）
第十六章　圆 ………………………………………（207）
第十七章　直线和平面 ……………………………（222）
第十八章　简单几何体 ……………………………（233）
第十九章　平面直角坐标系 ………………………（248）
第二十章　曲线和方程 ……………………………（256）
第二十一章　直线 …………………………………（263）

第二十二章　二次曲线 ………………………………… (273)
第二十三章　极坐标与参数方程 ……………………… (300)
第二十四章　极限 …………………………………… (318)

第一章 数 与 式

内 容 提 要

一、实数

1.实数的系统表

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数（正、负）——可化为}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数（正、负）——无限不循环小数}\end{cases}
$$

2.数轴：规定了原点、方向和长度单位的直线叫做数轴．

实数与数轴上的点具有“一一对应”的关系．

3.相反数与绝对值：a与$-a$是互为相反数；0的相反数是0．

正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零．即

$$
|a|=\begin{cases}a, & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时；}\\ -a, & \text{当 } a<0 \text{ 时．}\end{cases}
$$

$|a|$的几何意义是：实数a在数轴上对应的点到原点的距离．

4.实数大小的比较：数轴上的点越往右，它所表示的数

就越大．一切正数大于零；零大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小，绝对值小的反而大．

5．实数的运算法则及运算律．（略）

6．实数运算的顺序：先算乘方、开方，再算乘、除，最后算加、减．如果有括号，就先进行括号内的运算．

二、代数式

用代数运算（指加、减、乘、除、乘方、开方）符号和顺序符号把数字、字母（表示数）连结而成的式子叫做代数式．代数式的分类如下：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

1．整式

（1）整式的四则运算．（略）

（2）乘法公式：

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$
$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3;$$
$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

（3）因式分解：将多项式表示成几个整式的积叫做因式分解．

因式分解应在指定的数的范围内分解到不能再分解为止．在一般情况下，不加说明，都是指在实数范围内．

因式分解的方法通常有：提取公因法，应用公式法，分组分解法．二次三项式还常采用十字相乘法、配方和求根公

式法。

2.分式

（1）分式的基本性质

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}\quad(m\neq0).$$

（2）分式的通分，约分及运算（略）。

（3）繁分式的化简：繁分式实际上是分式除法的另一种写法，可以利用除法法则与分式的基本性质进行化简。

3.二次根式

（1）性质：$(\sqrt{a})^2=a\quad(a\geqslant0)$；

$\sqrt{a^2}=|a|$；

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad(a\geqslant0,\ b\geqslant0)$；

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\quad(a\geqslant0,\ b>0)$。

（2）最简根式与同类根式：符合下列条件的二次根式，叫做最简二次根式：

①被开方式的每一个因式的指数都小于2；

②被开方式不含有分母。

两个或两个以上的二次根式化为最简根式后，如果它们的被开方式相同，叫做同类根式。

（3）根式的运算（略）。

三、指数与对数

1.有理指数的概念

正整数指数：$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个}$；

零指数：$a^0=1\ (a\neq 0)$；

负整数指数： $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\ (a\neq 0)$；

分数指数： $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a\geqslant 0)$；

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\ (a>0).$$

（以上 m、n 均为正整数）

2.指数的运算法则

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};$$

$$(a^m)^n=a^{mn};$$

$$(ab)^n=a^nb^n.$$

（以上 m、n 均为有理数，a、b 均为正数）

3.对数的概念：如果$a^b=N\ (a>0,a\neq 1)$，那么 b 就叫做以 a 为底N的对数．记作$\log_a N=b$．把 $b=\log_a N$ 代入$a^b=N$中，可得对数基本恒等式

$$a^{\log_a N}=N.$$

4.对数的运算法则

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N;$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N;$$

$$\log_a M^n=n\log_a M;$$

$$\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M.$$

换底公式： $\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

（以上 a 、b 、M、N 均为正数，且 $a \neq 1$， $b \neq 1$）

5.常用对数：以10为底的对数叫做常用对数．一个正数的常用对数可分为首数（整数部分）和尾数（正的纯小数部分或零）两部分．

（1）首数：大于 1 的数，其常用对数的首数等于真数的整数部分的位数减 1；小于 1 的正数，其常用对数的首数是负数，这负数的绝对值等于真数里第一个有效数字前的零的个数（包括整数单位的一个零）．

（2）尾数：只有小数点位置不同的数（即有效数字相同的数），它们的尾数相同．尾数可从对数表中查得．

例　　题

例 1　求证：任意一个三位正整数与它的各位数字之和的差一定是 9 的倍数．

证明　设三位正整数的各位数字次序为 a、b、c，则该三位正整数可以写成：

$$100a+10b+c.$$

它与各数字之和的差为：

$$\begin{aligned}&100a+10b+c-(a+b+c)\\&=99a+9b=9(11a+b).\end{aligned}$$

它是 9 的倍数．命题得证．

〔注〕　在研究整数性质时，应熟悉它的表示法．三位数字依次为 a、b、c 的三位整数不能写成 abc，而应写成 $100a+10b+c$．一般地，各位数字依次为 a_1、a_2、…、a_n 的 n 位整数通常写成 $a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\times10+a_n$．

本题的结论可以推广到对任意位数的正整数都成立。

例 2 求 $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+1}{b^{-1}-1}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b+b^{\frac{1}{2}}}{b-1}\right)\div\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-1}$

的值，其中 $a=81$，$b=183$。

解 $\because$ $\dfrac{1}{b^{-1}-1}=\dfrac{b}{1-b}$，

$$\therefore \text{原式}=\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{1-b}+\frac{a^{\frac{1}{2}}b+b^{\frac{1}{2}}}{1-b}\right)\div\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-1}$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b+b^{\frac{1}{2}}+b}{1-b}\times\frac{b^{\frac{1}{2}}-1}{b^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(a^{\frac{1}{2}}+1)(b^{\frac{1}{2}}+1)b^{\frac{1}{2}}}{(1-b^{\frac{1}{2}})(1+b^{\frac{1}{2}})}\times\frac{-(1-b^{\frac{1}{2}})}{b^{\frac{1}{2}}}$$

$$=-(a^{\frac{1}{2}}+1).$$

当 $a=81$ 时，原式 $=-(81^{\frac{1}{2}}+1)=-10$。

例 3 分解因式：$x^4-2x^2y-3y^2+8y-4$。

解一 原式 $=(x^4-2x^2y+y^2)-(4y^2-8y+4)$

$=(x^2-y)^2-(2y-2)^2$

$=(x^2+y-2)(x^2-3y+2)$.

解二 原式 $=(x^2)^2-2y\cdot x^2+(-3y^2+8y-4)$

$=(x^2)^2-2y\cdot x^2+(3y-2)(-y+2)$.

这样，原式可看作关于 x^2 的二次三项式，因此可用十字相乘法进行分解：

解

$$\begin{array}{ccc} x^2 & & -(3y-2) \\ & \times & \\ x^2 & & -(-y+2) \end{array}$$

原式 $=(x^2-3y+2)(x^2+y-2)$.

例 4 分别在有理数范围及实数范围内分解因式：

$$2x^3-3x-1.$$

解 原式 $=2x^3+2-(3x+3)$

$$=2(x+1)(x^2-x+1)-3(x+1)$$

$$=(x+1)(2x^2-2x-1).$$

$\because$ $2x^2-2x-1=0$ 没有有理根， $\therefore$ $2x^2-2x-1$ 在有理数范围已不可再分解．故上式就是本题在有理数范围内的分解式．

求 $2x^2-2x-1=0$ 的两实根得

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2\times 2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}.$$

$\therefore$ 在实数范围内，

原式 $=2(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

〔注〕 在将整式进行因式分解时，一般先观察有无公因式可提取，进而注意能否运用乘法公式进行分解．对于二次三项式或可视为二次三项式的多项式，就采用十字相乘及求根公式法分解．若不能直接用上述方法解决时，就要考虑用分组法进行恰当的分组（有时甚至要拆项进行分组或添项进行分组）后再分解．

要注意，因式分解在不同的数域内有不同的结果．

例 5 已知实数 x、y、z 满足

$$\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+z^2-z+\frac{1}{4}=0,$$

求$(z+y)^x$的值。

〔分析〕 本题应先求得x，y，z的值。已知条件只有一个含x、y、z的关系式，用通常解方程的办法来求x、y、z的值当然是不可能的，而应分析条件的特殊性。因为$|x-y|$是表示绝对值，$\sqrt{2y+z}$表示算术平方根，而$z^2-z+\frac{1}{4}=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2$是一个完全平方式，在实数范围内它们都是非负的，所以要使它们的和为0，只能这三项的值都为0，这样就可求得x、y、z的值。

解 $\because$ $\frac{1}{2}|x-y|\geqslant 0$，$\sqrt{2y+z}\geqslant 0$，

$$z^2-z+\frac{1}{4}=(z-\frac{1}{2})^2\geqslant 0.$$

又 $\because$ 它们的和为0，故有

$$\begin{cases} x-y=0, \\ 2y+z=0, \\ z-\frac{1}{2}=0. \end{cases}$$

解得 $x=-\frac{1}{4}$，$y=-\frac{1}{4}$，$z=\frac{1}{2}$。

于是 $(z+y)^x=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}=4^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$。

〔注〕 本题用到了非负实数的一条重要性质——若有限

个非负实数的和为零，则每个非负实数都为零．这个性质在解题中经常用到．

例6 计算：

$$\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 3^{-1}}}+\log_{\frac{1}{8}} 81\times\log_9 2\sqrt{2}$$
$$+\left(\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}7\right)^{\log_{\sqrt{2}}1}.$$

解　原式 $=\sqrt{(2^{-3})^{\log_2 9}\div\frac{1}{8}}+\dfrac{\lg 81}{\lg\frac{1}{8}}\cdot\dfrac{\lg 2\sqrt{2}}{\lg 9}$

$$+\left(\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}7\right)^0$$

$$=\sqrt{(2^{\log_2 9})^{-3}\times 8}+\frac{4\lg 3}{-3\lg 2}\cdot\frac{\frac{3}{2}\lg 2}{2\lg 3}+1$$

$$=\sqrt{\frac{8}{9^3}}-1+1$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{27}.$$

例7 已知$\log_7 28=a$，$\lg 14=b$，求$\lg 5$．

〔分析〕 注意到题目要求的是以10为底的对数 lg5，因此考虑把已知条件中的对数都用换底公式换成以 10 为底的对数．换底后，对数中的真数都可分解成 7 和 2 的因数的乘积，因此，已知条件就可转换为关于 lg2 与 lg7 的两个关系式，求出lg2后就不难算出lg5．

解　由　$\log_7 28=a$　得

$$\frac{\lg 7+2\lg 2}{\lg 7}=a, \qquad (1)$$

由　$\lg 14=b$　得

$$\lg 7+\lg 2=b. \qquad (2)$$

由（1）、（2）解得　$\lg 2=\dfrac{ab-b}{a+1}$.

那么$\lg 5=\lg\dfrac{10}{2}=1-\lg 2=\dfrac{a+b+1-ab}{a+1}$.

例 8　已知$\lg 2.5=0.3979$，$\lg x=\dfrac{1}{2}\times(-1.3979)$，求$x$.

〔分析一〕　已知对数求真数，须从对数中的尾数（正的纯小数）部分来确定真数的有效数字．从已知条件中知道，对数尾数为0.3979的数的有效数字是“25”（读作二五）．为了利用这个已知条件，须将等式$\lg x=\dfrac{1}{2}\times(-1.3979)$进行变形，使得等式右边变为整数与正的纯小数0.3979的和，然后求解．

解一　从$\lg x=\dfrac{1}{2}\times(-1.3979)$　得

$$-2\lg x=1.3979,$$

即　$\lg x^{-2}=1.3979.$

$\because$　$\lg 2.5=0.3979,$

$\therefore$　$x^{-2}=25.$

于是　$x=\dfrac{1}{5}$（取正）.

〔分析二〕　将已知条件中的第一式代入第二式，进行变形，也可求出x来．