

高等学校教学参考书

隧道力学数值方法

兰州铁道学院	潘昌实	主编
北方交通大学	张 弥	主审
兰州铁道学院	吴鸿庆	

中国铁道出版社

1995年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书作为研究生教材,主要介绍隧道力学问题中的求解方法——数值方法。内容包括二维、三维、材料非线性和几何非线性问题等。具体讲述隧道与地下结构弹塑性有限元的分析、隧道与地下结构弹粘塑性有限元的分析;空间问题、无限元和节理单元以及边界单元法,隧道与地下结构动态问题的数值解法,结构动力分析中的特征值问题。在叙述过程中,还附有必要的电算程序和计算实例,使读者能够用其解法解决隧道力学中的静态和动态问题。

高等学校教学参考书

隧 道 力 学 数 值 方 法

兰州铁道学院 潘昌实 主编

*

中国铁道出版社出版发行

(北京市东单三条 14 号)

责任编辑 刘桂华 李丽娟 封面设计 马 利

各地新华书店经售

北京市燕山联营印刷厂印

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 25.25 字数: 636 千

1995 年 6 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数: 1—1500 册

ISBN7-113-01903-X/TU·411 定价: 19.00 元

前 言

长期以来,各种形式的地下建筑物(交通隧道、水工隧洞、地下铁道、矿山井巷、市政管道、地下厂房、地下仓库、地下洞室、地下商业街道、地下停车库、人防工事等)在国内得到了广泛的应用,地下工程技术已积累了丰富的经验,并取得了长足的进步,特别是新奥法(NATM)的出现,给地下工程带来了重大的变革。虽然地下工程由经验到科学的转变还有很长的一段道路,但从事地下工程的学者、工程师和技术人员们,目前正朝着信息设计和信息施工的目标坚韧不拔地迈进。隧道力学正是在这种情况下应运而生,并已基本上得到公认的一门边缘学科。数字电子计算机的不断更新和岩土本构关系研究的进展,为隧道力学数值分析方法更加普遍的推广和应用创造了有利的条件。

在隧道力学问题的求解方法中,解析方法和数值方法是相辅相成的。隧道力学的数值解,可以用相应的解析解(封闭解)来验证。有些隧道问题可以用解析法求解,但在现阶段,由于岩土材料的复杂因素、地下结构物的复杂外形和由此带来的数学处理上的困难,使得不少隧道力学问题难以得到解析解。因此,数值方法就更加具有实际应用的价值。

本书是根据作者过去10年中,为隧道与地下工程、岩土工程专业硕士研究生所开设的两门课程——岩土力学有限元法和地下结构动力学有限元法所用过的讲义整理补充而成。教材注重理论联系实际,突出实用性。为此,附有必要的电算程序和计算实例,使读者能够应用它们解决隧道力学的静态和动态问题,包括二维、三维、材料非线性和几何非线性问题,以达到学以致用目的。考虑到研究生在学习本课程之前,已掌握弹性力学、塑性力学、结构动力学和有限元法的基础知识和编写与使用电算程序的初步能力,因此,本书只做了一些必要的重复(有的以附录形式出现),以便承前启后,对于大学本科高年级学生和工程技术人员,也便于学习和应用。鉴于篇幅所限,本书未能涉及到隧道力学的各个方面。本书编写的目的,在于帮助读者在隧道力学数值分析方面打下基础,并为读者提供一个有力的工具。

书中共分八章，其中第一、二、三、四、五、七章和附录，由兰州铁道学院潘昌实教授编写；第五章 § 5—5 和第八章由兰州铁道学院吴鸿庆教授编写；第六章由北方交通大学张弥教授编写。兰州铁道学院李德武讲师和高峰讲师参加了算例计算和部分程序调试工作。全书由张弥教授主审，其中第六章由吴鸿庆教授审阅。

本书可作为高等学校隧道工程、地下建筑、岩土工程专业以及相近专业的硕士研究生的教科书或参考书，也可供大学本科高年级学生、研究人员和工程技术人员参考。

作 者

1994 年 7 月

目 录

第一章 绪 论	1
§ 1—1 隧道力学的任务和研究范围.....	1
§ 1—2 隧道与地下结构物的设计模型.....	2
§ 1—3 几种常用的设计计算方法简介.....	4
参考文献	15
第二章 有限元和数值分析基础	17
§ 2—1 概 述	17
§ 2—2 二维等参数单元	17
§ 2—3 等参数单元的数值计算	25
§ 2—4 等参数单元的其它形式	28
§ 2—5 二维等参数单元等效节点荷载的计算	29
§ 2—6 二维有限元分析计算机子程序	31
§ 2—7 建立总刚度矩阵及程序编制	44
§ 2—8 静力分析中平衡方程的求解和程序编制	50
§ 2—9 求解平衡方程中计算误差的估计	60
参考文献	62
第三章 隧道与地下结构弹塑性有限元分析	63
§ 3—1 概 述	63
§ 3—2 非线性问题的求解方法	63
§ 3—3 岩土塑性力学基础与岩土的本构关系	67
§ 3—4 应力调整	85
§ 3—5 隧道与地下结构二维弹塑性有限元分析的方法和步骤	87
§ 3—6 计算机源程序 GEOEPL2D	89
§ 3—7 算 例.....	119
参考文献.....	124
第四章 隧道与地下结构弹粘塑性有限元分析	126
§ 4—1 概 述.....	126
§ 4—2 弹粘塑性理论基础.....	126
§ 4—3 连续介质力学几何非线性问题有限元分析.....	132
§ 4—4 二维弹粘塑性问题的求解方法与步骤.....	140
§ 4—5 隧道与地下结构二维弹粘塑性有限元分析计算机程序 GEOVPL2D	147
§ 4—6 算 例.....	161
参考文献.....	164

第五章 空间问题、无限元和节理单元	165
§ 5—1 概 述	165
§ 5—2 三维等参数单元	165
§ 5—3 无限单元	170
§ 5—4 三维有限元和无限元的有关电算子程序	175
§ 5—5 节理单元	189
参考文献	193
第六章 边界单元法	194
§ 6—1 概 述	194
§ 6—2 直接解法	195
§ 6—3 间接解法—虚拟应力法	210
§ 6—4 对称性的利用	217
§ 6—5 域内作用力(体力)的计算问题	218
§ 6—6 半无限平面问题	221
§ 6—7 弹塑性问题的边界单元法	223
§ 6—8 有限单元—边界单元耦合法	227
§ 6—9 程序设计	230
参考文献	255
第七章 隧道与地下结构动态问题的数值解法	256
§ 7—1 概 述	256
§ 7—2 运动方程的建立	256
§ 7—3 动荷载列阵、质量矩阵和阻尼矩阵的确定及边界条件的处理	260
§ 7—4 运动方程的求解方法	263
§ 7—5 非线性动态问题的显式时间积分解法与电算程序 DYNEXP2D	269
§ 7—6 非线性动态问题的隐式时间积分解法与电算程序 DYNIMP2D	293
§ 7—7 算 例	310
参考文献	316
第八章 结构动力分析中的特征值问题	318
§ 8—1 概 述	318
§ 8—2 瑞利—李兹近似解法	325
§ 8—3 矢量迭代法	327
§ 8—4 广义雅可比法	332
§ 8—5 子空间迭代法	342
参考文献	346
附录一 弹塑性力学基本公式	348
附录二 变 分 法	357
附录三 主应力空间与 π 平面上的应力分量	360
附录四 主应力由偏应力不变量和罗地角的表达式	361
附录五 算例输入、输出数据	363

第一章 绪 论

§ 1—1 隧道力学的任务和研究范围

隧道力学 (Tunnel mechanics) 是岩土力学的一个重要组成部分。随着各种类型的地下结构物包括隧道 (洞)、地下铁道、地下洞室、地下厂房、地下街道等在世界各地大量兴建, 作为地下结构物设计理论基础的隧道力学日益显示出其重要性, 兼之过去数十年间地下结构理论有了很大发展, 隧道力学从岩土力学中划分出来成为一门独立学科的条件业已成熟。

以往隧道和地下工程被认为是以经验为主的学科。有人认为隧道和地下工程是一种“工艺” (Art) 而不是一种“科学” (Science)。这是因为岩土介质作为地下工程的对象包含着多种随机因素, 例如: 非均匀性和各向异性, 地质构造和结构面, 应力-应变的非线性本构关系, 初始地应力, 地下水等等。正确掌握这些因素及其变化规律非常困难。因而隧道力学的解析解即封闭解 (Closed solution) 仅限于几何形状简单、材料性质均匀且各向同性、荷载及边界条件简单的少数情况。

随着隧道施工新奥法 (NATM) 的发展和推广, 人们发现, 用科学的方法指导地下结构物的设计和施工, 不但是必要的, 而且是可行的。数字电子计算机包括微型机的普及, 岩土本构关系研究的进展和以有限元法为主的数值分析方法的大量采用, 试验和测试技术的进步, 都为地下结构设计理论的发展提供了有利条件。地下结构目前正朝着“信息设计、信息施工”的目标迈进。在隧道与地下工程由“经验”到“科学”的转变过程中, 隧道力学将起着主导作用。

目前, 隧道力学的研究范围包括以下几个方面。首先, 隧道围岩的工程地质分类受到了极大的关注。这是因为隧道设计的工程类比方法大都是以围岩分类级别为依据的。其次, 隧道和地下结构物的静力分析和动力分析是隧道力学的重要组成部分, 所涉及的范围至为广泛。例如: 围岩初始应力场和开挖效应; 毛洞稳定性分析; 初期支护 (锚喷和钢拱支护等) 和二次支护 (衬砌) 的静力分析; 支护与围岩的相互作用及围岩稳定性分析 (包括弹性分析、粘弹性分析、弹塑性分析、弹粘塑性分析、二维和三维模型等); 地下施工引起的地面沉陷; 地下结构的动力性态; 地下结构地震 (爆振) 反应分析; 地下施工振动与地下交通隧道车辆振动对环境影响分析等等。第三, 现场测试和实验室试验是隧道力学不可缺少的组成部分。设计和施工前的隧址工程地质勘探, 包括原位地应力测试, 围岩地质构造 (层理、节理、裂隙等), 地震波速, 物理力学性质和参数的测定以及地下水位的测定等。施工过程中结构和围岩 (包括地面) 的变形观测是指导施工和设计的重要反馈信息。实验室模型试验包括 1:1 的环形台架模型试验、相似材料模型试验、光弹性模型试验以及离心机模型试验等。运营期间地下结构物的静力和动力观测包括长时期的结构变形和应变观测、对地震和车辆振动反应的观测等等。现场测试和实验室试验, 一方面为地下结构物的设计和计算提供数据, 另一方面又是检验设计和计算是否正确性的重要手段。最后, 岩土物理力学性质和本构关系的研究, 既

是岩土力学工作者的主要任务之一,也应该是隧道力学工作者的一项重要任务。严格地说,数值分析结果是否正确,往往取决于所选用的材料本构模型和物理力学参数是否正确。

本书主要阐述和探讨隧道与地下结构物的静力、动力分析原理和方法。与有关教科书^{[1][2]}和参考书^[3]不同之处在于侧重数值分析方法的阐述和应用。在数值分析方法中,又以有限元法为主,并简要介绍无限元和边界元法。

§ 1—2 隧道与地下结构物的设计模型

一、概 述

地下结构物的设计理论和方法经历了一个发展过程。最早(19世纪初期)的隧道(洞)多以砖石材料作衬砌,采用木支撑和断面分部开挖的方法施工。可以推断,当时隧道衬砌的设计是仿照拱桥进行的,其特点是只考虑衬砌承受围岩的主动荷载而未考虑围岩对衬砌变形的约束和由此产生的抗力,因此,衬砌厚度偏大。

其后,不同学者和工程师们在设计隧道衬砌时采用不同的假定来计及围岩对衬砌变形所产生的抗力,其中温克尔(Winkler)局部变形理论得到了广泛应用。这方面的代表学者有:O. 康姆裂尔(1910)^[4], B. H. 许特和 S. 约翰勒逊(1922)^[5], Г. Г. 朱拉保夫和 O. E. 布加也娃(1934)^[6], A. 布耳(1944)^[7], H. 舒尔茨和 H. 杜德克(1964)^[8]。

与此同时,将衬砌和围岩视作连续介质模型进行分析的方法也得到了发展,其中代表学者有: H. 史密特(1926)^[9], J. 塔罗勃(1957)^[10], H. 卡斯特勒(1960)^[11], A. M. 缪尔伍德(1975)^[12]。

50年代以来,喷射混凝土和锚杆被广泛用作初期支护。人们逐渐认识到,这种支护能在保证围岩稳定的同时允许其有一定程度的变形,使围岩内部应力得到调整从而发挥其自持作用,因此可以将内层衬砌的厚度减小很多。

60年代中期,随着数字电子计算机的更新和岩土本构定律研究的进展,地下结构分析方法进入了以有限元法为代表的数值分析时期。这方面的代表学者有: S. F. 瑞亚斯和 D. V. 迪尔(1966)^[13], O. C. 辛克维奇等(1968)(1974)^{[14][15]}, E. L. 威尔逊(1968)^[16], F. H. 库尔荷威(1975)^[17], W. 维特基(1977)^[18]。

近年来数值分析有了新的进展,无限单元^{[19][20]}、边界单元^[21]、离散单元^[22]、节理单元^[23]等在地下结构静力和动力分析中得到了广泛应用。地下结构物反分析法^[24]有了发展,其要旨是根据现场测得的围岩变形数据反演推算围岩的各种物理力学参数和初始地应力等。

由于地下结构物的地质条件和它们的用途、使用期限以及运营条件的不同,需要采用不同的设计计算方法。同时,经验、工程类比和工程师们的判断也都是必要的。有头脑的工程师们善于尊重隧道力学对某项具体工程的分析成果,并根据自己的经验和判断做出合理的设计和施工方案来指导设计和施工。

二、隧道与地下结构物的结构设计模型

国际隧道协会(ITA)于1978年曾成立结构设计模型研究组(Working Group on Structural Design Models),其任务在于汇集与交流各会员国所采用的结构设计模型。该工作组于1981年

提出了工作报告⁽²⁵⁾,对于四种不同类型的隧道,有关的会员国所采用的结构设计模型如表 1—1 所列。

隧道结构设计模型 表 1—1

	盾构开挖的软土隧道	锚喷、钢拱支护软土隧道	中硬石质深埋隧道	明挖施工的框架结构
澳大利亚	弹性介质中全支承圆环; Muir Wood 法、Curtis 法; 或假定隧道变形	初期支护: Proctor—white 法; 二次支护: 弹性介质中全支承圆环; Muir Wood、Curtis 法或假定隧道变形	初期支护: Proctor—white 法; 二次支护: 弹性介质中全支承圆环; Muir Wood、Curtis 法或假定隧道变形	箱形框架弯矩分配
奥地利	弹性地基圆环	弹性地基圆环; FEM; 收敛约束法	经验方法	弹性地基框架
德国	覆盖 $<2D$, 顶部无支承弹性地基圆环; 覆盖 $>3D$, 全支承弹性地基圆环; FEM	覆盖 $<2D$, 顶部无支承弹性地基圆环; 覆盖 $>3D$, 全支承弹性地基圆环; FEM	全支承弹性地基圆环; FEM; 连续介质或收敛—约束法	弹性地基框架 (底压力分布简化)
法国	弹性地基圆环; FEM	FEM; 作用—反作用模型; 经验法	连续介质模型; 收敛—约束法; 经验法	——
日本	局部支承圆环	局部支承弹性地基圆环; 经验法加测试; FEM	弹性地基框架; FEM; 特性曲线法	弹性地基框架; FEM
中国	弹性地基圆环; 经验法	初期支护: FEM; 收敛约束法; 二次支护: 弹性地基圆环	初期支护: 经验法; 永久支护: 作用—反作用模型; 大型洞室: FEM	箱形框架弯矩分配
瑞士	——	作用—反作用模型	FEM; 经验法; 有时收敛约束法	——
英国	弹性地基圆环; Muir Wood 法	收敛—约束法; 经验法	FEM; 经验法; 收敛—约束法	矩形框架
美国	弹性地基圆环	——	弹性地基圆环; Proctor—white 法; FEM; 锚杆按经验	弹性地基连续框架
瑞典	——	——	通常为经验法; 有时作用—反作用法; 连续介质模型; 收敛—约束法	——
比利时	Schulze—Duddek 法	——	——	刚架

注: FEM 为有限元法的英文缩写

由表 1—1 可见, 目前国内外采用的隧道结构设计模型可归纳为四种类型:

1. 以工程类比为依据的经验法 (Empirical Method)。

2. 以测试为依据的实用法, 包括收敛—约束法 (Convergence—confinement Method)、现场和实验室的岩土力学试验、应力 (应变) 量测以及实验室模型试验。

3. 作用—反作用模型 (Action-reaction Model), 例如弹性地基框架, 弹性地基圆环 (全部支承或部分支承) 等。这种模型亦可称为荷载—结构法或简称结构力学法。

4. 连续介质模型 (Continuum Model), 包括解析法和数值法两种主要的方法。解析法又分为封闭解和近似解两种方法, 目前它已逐渐被数值法所取代。数值法以有限元法为主。这种模型亦可称之为连续介质力学法。

隧道工程技术人员在设计地下结构物时, 往往要考虑和比较各种方法, 或以某一种方法为主, 以其它的方法作为校核。

§ 1—3 几种常用的设计计算方法简介

一、收敛—约束法 (特性曲线法)^[26]

图 1—1 中曲线①代表洞室侧壁径向压应力 σ_r 与径向位移 u_r 间的关系曲线。曲线②为支护反力 p_i 与洞壁径向位移 u_r 间的关系曲线。曲线③为实测的洞壁位移—时间曲线, 它反映四个阶段: 第 I 阶段围岩无约束自由变形; 第 II 阶段由设置初期支护开始, 变形由于支护反力而减缓; 第 III 阶段从仰拱完成开始, 由于形成了封闭结构致使变形速度大大降低; 最后变形稳定, 进入了第 IV 阶段, 这相当于曲线①和曲线②的交点 A, 于是作用在支护上的平衡地压力为 p_i^1 。如果所采用的支护刚度较大, 则地压力增长急剧, 如曲线③, 其平衡地压力为 p_i^1 。如果支护设置时间太晚, 则出现松动地压力 p_i^2 , 如曲线④。由此可见, 支护安设时间、支护本身的刚度及其与围岩接触的好坏均将影响到围岩的稳定性和支护所受地压力的大小。实测的洞壁位移—时间曲线⑤可供施工人员判断围岩和支护的变形是否趋于稳定, 它是一种非常重要的信息, 也是新奥法的一个非常重要的因素。

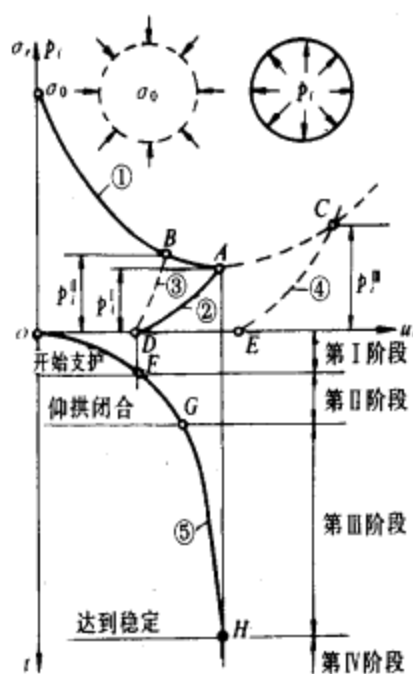


图 1—1 收敛—约束法

二、结构力学法

(一) 圆形隧道衬砌按弹性地基圆环的计算方法^[27]

图 1—2 表示圆形隧道衬砌及其计算简图。假定隧道衬砌弹性地基曲梁以折线梁系所代替, 所有外力和支座反力均施加在两相邻折线梁的交点即节点上, 弹性地基以弹性支座代替, 当各个折线梁的长度相等时, 弹性支座的支承长度便等于一段梁的长度, 考虑围岩与衬砌的摩擦作用时, 可将弹性支承连杆朝切线移动的方向转一 β 角 ($\beta = \arctan \mu$, μ 为摩擦系数), 通常假定在拱顶约 90° 范围内衬砌与围岩脱离因而不设弹性支座。用力法求解的基本结构如图 1—3 (a) 所示, 相应的正则方程为

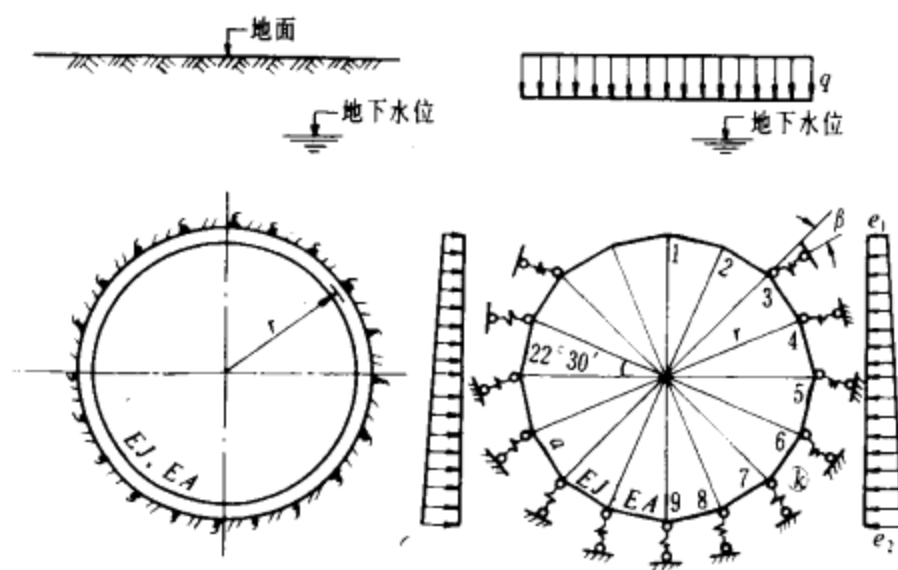


图 1-2 圆形隧道衬砌及计算简图

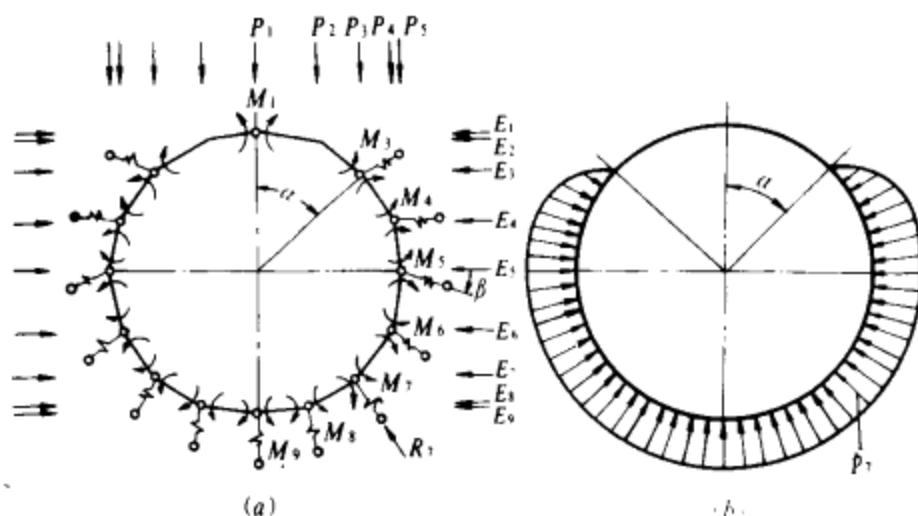


图 1-3 用力法求解的圆形隧道基本结构及抗力图

$$\left. \begin{aligned} a_{11}M_1 + a_{13}M_3 + \dots + a_{1n}M_n + a_{10} &= 0 \\ a_{31}M_1 + a_{33}M_3 + \dots + a_{3n}M_n + a_{30} &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ a_{n1}M_1 + a_{n3}M_3 + \dots + a_{nn}M_n + a_{n0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

式中 M_1, M_3, M_n —— 冗力；

a_{ik}, a_{i0} —— 基本结构中的单位位移和荷载位移，不计剪力影响时按下式计算：

$$a_{mn} = \sum \int \frac{\bar{M}_m M_n}{EJ} ds + \sum \frac{\bar{N}_m N_n}{EA} a + \sum \frac{\bar{R}_m R_n}{kab} \quad (1-2)$$

其中 $\bar{M}_m, \bar{N}_m, \bar{R}_m$ —— 单位力 $\bar{P}_n = 1$ 在基本结构中产生的弯矩、轴力和支座反力，

M_n, N_n, R_n —— 外荷载 P_n 在基本结构中产生的相应力素，

EJ, EA —— 衬砌截面的挠曲刚度和压缩刚度，

a, b —— 弹性支座的支承长度和宽度，通常取 $b = 1m$ ，

k —— 地基弹性抗力系数。

求出未知量 M_i 后即可计算各截面的轴力 N_i 和支座反力 R_i ，并算出相应的地基反力 $p_i =$

$\frac{R_i \cos \beta}{ab}$, 绘制抗力图形 [图 1-3 (b)]。若某支座反力为负值则将其去掉并重新计算。

(二) 按假定抗力图形计算圆形衬砌和马蹄形衬砌的方法^[6]

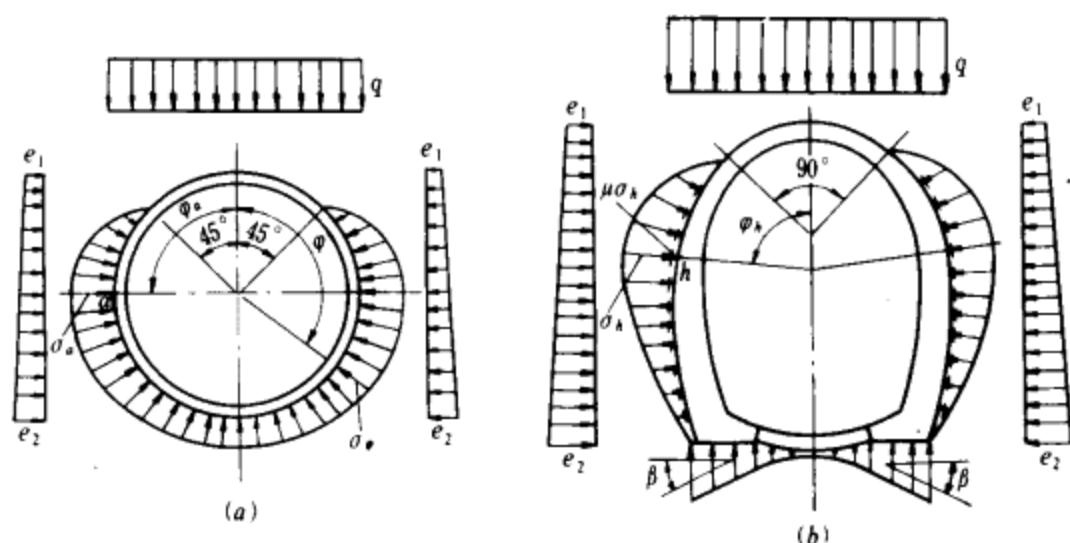


图 1-4 圆形衬砌和马蹄形衬砌的计算简图

相应的计算简图如图 1-4 (a)、(b) 所示。其共同特点是：假定抗力作用的范围；假定抗力按某种规律（例如二次抛物线）分布；假定最大抗力点的位置（通常在最大跨度附近）；根据最大抗力点的抗力与其位移成正比的条件列出一个附加的方程，从而可以求出无铰拱圈的冗力和最大抗力。在列出正则方程组时，尚应计及基础底面的弹性约束条件（转角 β ）。

(三) 弹性地基框架解法

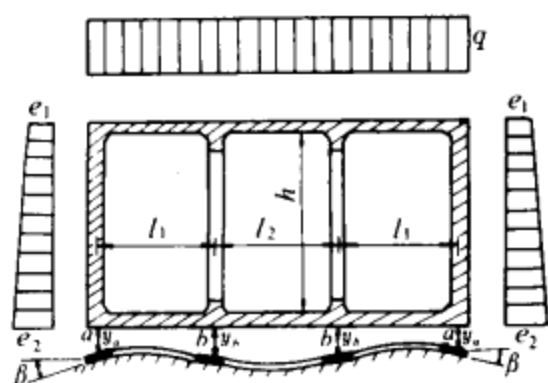


图 1-5 组合弹性地基梁

框架底板可视为组合弹性地基梁（图 1-5）：边墙底及梗肋段为刚度无限大的刚性梁；立柱底端及梗肋亦为刚度无限大的刚性梁；中间段底板为定长度或无限长度的弹性地基梁。立柱刚度较小，可视为两端铰结的压杆。在用力法或形变法求解时，均应计及边墙基底沉陷 y_a 和转角 β 以及立柱底端沉陷 y_b 的影响。对于多层多跨结构，宜采用弯矩分配法求解。

(四) 矩阵力法和矩阵位移法

对于图 1-4 (b) 所示的马蹄形衬砌其计算简图如图 1-6 所示。衬砌被离散化为一列梁单元。在梁间的节点上安设只承受压力的弹性支座，其轴线垂直于衬砌外表面。若计算结果表明支座反力为拉力，则应将该支座去掉，重新计算，至满意为止。

1. 矩阵力法

对于荷载和结构均对称的情况，可取图 1-7 所示的基本结构。若不考虑衬砌与围岩间的摩擦力，则力法方程的矩阵表达式为

$$\mathbf{F}_{xx}\mathbf{X} + \mathbf{F}_{xp}\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (1-3)$$

从而冗力

$$\mathbf{X} = -\mathbf{F}_{xx}^{-1}\mathbf{F}_{xp}\mathbf{P} \quad (1-4)$$

式中 $\mathbf{F}_{xx}$ —— $m \times m$ 阶冗力柔度矩阵，其元素 f_{ik} 即是基本结构中的单位位移， m 为冗力个数；
 $\mathbf{F}_{xp}$ —— $m \times r$ 阶单位外荷载—冗力作用点位移柔度矩阵， r 为荷载类型数，矩阵中元素

f_{kp} 是当 $P_k=1 (k=1, 2, \dots, r)$ 单独作用时, 在冗力 $X_i (i=1, 2, \dots, m)$ 方向内产生的位移;

X ——冗力向量;

P ——外荷载向量。

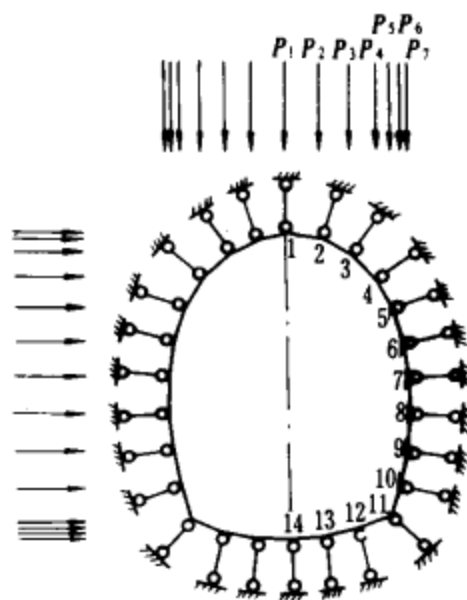


图 1-6 马蹄形衬砌计算简图

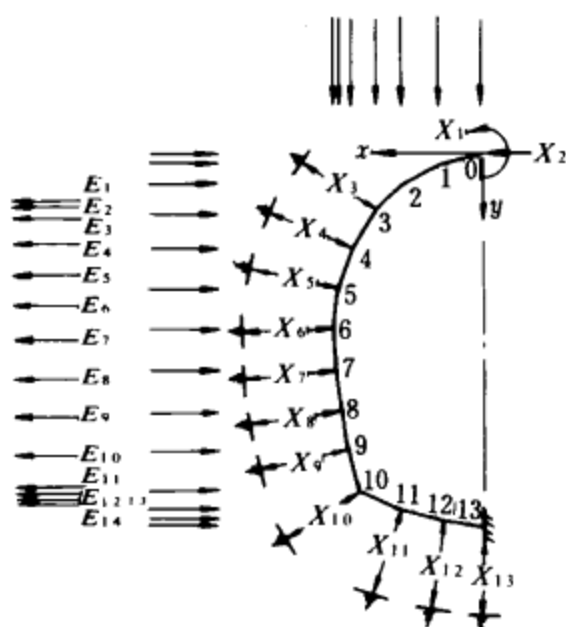


图 1-7 基本结构

为了计算 F_{xx} 和 F_{xp} 两个矩阵, 必须先计算体系的总柔度矩阵 F_0 和单元柔度矩阵 f_0 。

(1) 衬砌单元在轴力作用下的柔度矩阵 [图 1-8 (a)]

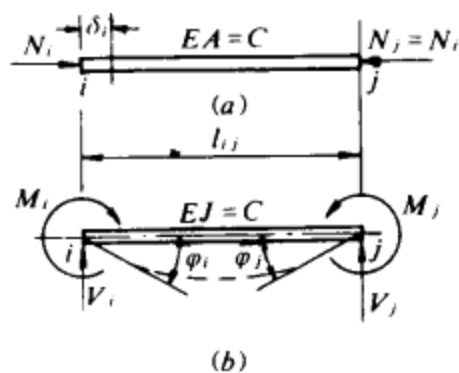


图 1-8 轴力和端弯矩作用下的衬砌单元

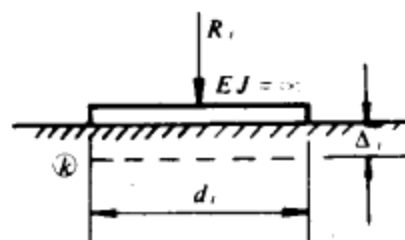


图 1-9 弹性支座

端位移

$$\delta_i = \frac{l_{ij}}{EA} N_i$$

故柔度矩阵

$$f_n = \frac{l_{ij}}{EA} \quad (1-5)$$

(2) 衬砌单元在端弯矩作用下的柔度矩阵 [图 1-8 (b)]

设 $v_i = v_j = 0$, 略去梁单元剪切变形, 则梁端转角分别为

$$\varphi_i = \frac{1}{3EJ} M_i + \frac{1}{6EJ} M_j$$

$$\varphi_j = \frac{1}{6EJ} M_i + \frac{1}{3EJ} M_j$$

故柔度矩阵

$$f_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{3EJ} & \frac{1}{6EJ} \\ \frac{1}{6EJ} & \frac{1}{3EJ} \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

(3) 弹性支座的柔度矩阵 (图 1—9)

地基沉陷

$$\Delta_i = \frac{R_i}{bd_{ik}} \quad .$$

式中 k ——地基弹性抗力系数;

bd_i ——支座支承面积,通常取 $b=1.0\text{m}$ 。

故柔度矩阵

$$f_r = \frac{1}{d \cdot k} \quad (1-7)$$

(4) 体系的总柔度矩阵 F_0

联系体系节点位移向量 δ 和节点内力向量 S 之间的关系式为

$$\delta = F_{\vartheta} S \quad (1-8)$$

式中 δ ——体系节点位移向量, $n \times 1$ 阶;

F_0 ——体系总柔度矩阵, $n \times n$ 阶;

S ——体系节点内力向量, $n \times 1$ 阶。

命衬砌单元总数为 q , 弹性支座总数为 t , 则 $n=3q+t$, 且有

$$\begin{aligned} \delta &= [\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_{q-1} \quad \varphi_q \quad \delta_1 \quad \delta_2 \cdots \delta_q \quad \Delta_1 \quad \Delta_2 \cdots \Delta_q]^T \\ S &= [M_{01} \quad M_{10} \quad M_{12} \quad M_{21} \cdots M_{q-1,q} \quad M_{q,q-1} \quad N_{01} \quad N_{12} \cdots N_{q-1,q} \quad R_1 \quad R_2 \cdots R_t]^T \\ F_0 &= \begin{bmatrix} f_{m1} & & & & & & & & & & \\ & f_{m2} & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & f_{mq} & & & & & & & \\ & & & & f_{n1} & & & & & & \\ & & & & & f_{n2} & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & f_{mq} & & & \\ & & & & & & & & f_{r1} & & \\ & & & & & & & & & f_{r2} & \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & f_{rt} \end{bmatrix}_{n \times n} \end{aligned}$$

于是可按下式计算 F_{xx} 和 F_{xp} :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{xx} &= \mathbf{Y}_{sx}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{Y}_{sx} \\ \mathbf{F}_{xp} &= \mathbf{Y}_{sx}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{Y}_{sp} \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

式中 γ_{sr} ——单位冗力—内力变换矩阵, $n \times m$ 阶;

Y_{sp} ——单位外荷载—内力变换矩阵； $n \times r$ 阶，矩阵中元素为 $P_k=1$ 单独作用时在基本结构中产生的内力。

既按式 (1—4) 求解出体系的冗力后, 就不难计算出体系的内力。

2. 矩阵位移法

图 1—6 所示体系* 的静力平衡方程为

$$Ku=R \tag{1-11}$$

式中 u, R ——体系的节点位移向量和外荷载向量, $N \times 1$ 阶;

K ——体系的总刚度矩阵, $N \times N$ 阶, 若体系离散化后的节点总数为 n 个, 则 $N=3n$ 。

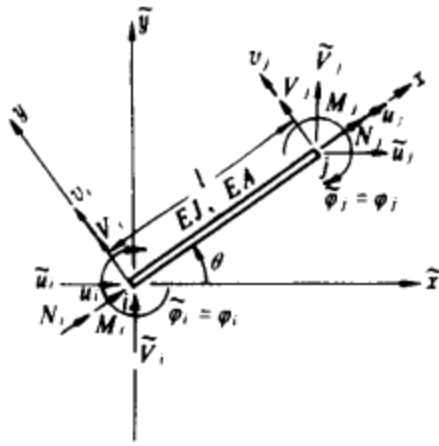


图 1—10

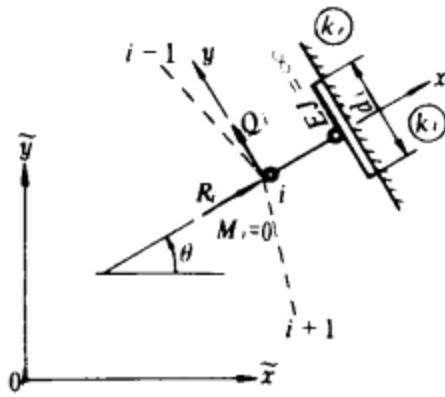


图 1—11

(1) 梁单元刚度矩阵 (图 1—10)

在局部坐标下, 联系单元节点力向量 F^e 和节点位移向量 δ^e 之间的方程为

$$F^e = K^e \delta^e \tag{1-12}$$

式中

$$\begin{aligned} F^e &= [N_i \ V_i \ M_i \ N_j \ V_j \ M_j]^T \\ \delta^e &= [u_i \ v_i \ \varphi_i \ u_j \ v_j \ \varphi_j]^T \end{aligned} \tag{1-13}$$

K^e ——局部坐标下的单元刚度矩阵,

$$K^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \tag{1-14}$$

* 衬砌亦可离散化为一系列弹性地基曲梁。

在整体坐标下, 单元刚度矩阵 $\tilde{\mathbf{K}}^e$ 、单元节点力向量 $\tilde{\mathbf{F}}^e$ 、节点位移向量 $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^e$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}^e &= \mathbf{T}^T \mathbf{K}^e \mathbf{T} \\ \tilde{\mathbf{F}}^e &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}^e, \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{F}}^e \\ \tilde{\boldsymbol{\delta}}^e &= \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\delta}^e, \quad \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{T} \tilde{\boldsymbol{\delta}}^e \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

式中 $\mathbf{T}$ 为 6×6 阶转换矩阵, 即

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

(2) 支座单元刚度矩阵 (图1-11)

在局部坐标下

$$u_i = \frac{R_i}{k_r d_i}, \quad v_i = \frac{Q_i}{k_t d_i}, \quad \varphi_i = M_i = 0 \quad (1-17)$$

式中 R_i 、 Q_i 、 M_i ——作用在节点 i 上的力素;

u_i 、 v_i 、 φ_i ——相应的节点位移;

k_r 、 k_t ——径向和切向弹性抗力系数。

由此得出

$$\mathbf{F}_s^e = \mathbf{K}_s^e \boldsymbol{\delta}_s^e \quad (1-18)$$

式中

$$\mathbf{F}_s^e = [R_i \quad Q_i \quad M_i]^T \quad (1-19)$$

$$\boldsymbol{\delta}_s^e = [u_i \quad v_i \quad \varphi_i]^T \quad (1-20)$$

$$\mathbf{K}_s^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_r d_i} & \frac{1}{k_t d_i} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (1-21)$$

在整体坐标下

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_s^e &= \mathbf{T}_1^T \mathbf{K}_s^e \mathbf{T}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{\delta}}_s^e &= \mathbf{T}_1^{-1} \boldsymbol{\delta}_s^e, \quad \boldsymbol{\delta}_s^e = \mathbf{T}_1 \tilde{\boldsymbol{\delta}}_s^e \\ \tilde{\mathbf{F}}_s^e &= \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{F}_s^e, \quad \mathbf{F}_s^e = \mathbf{T}_1 \tilde{\mathbf{F}}_s^e \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

式中

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

既算出各单元刚度矩阵后, 便可以根据单元节点局部编码与体系节点整体编码之间的对应关系, 将单元刚度矩阵聚合成总体刚度矩阵 $\mathbf{K}$, 进而求解式 (1-11), 得到体系的节点位移向量 $\mathbf{u}$ 。根据节点编码对应关系得到整体坐标下各单元节点的位移 $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^e$, 并按式 (1-15)、式 (1-22) 求得局部坐标下各单元的节点位移 $\boldsymbol{\delta}^e$, 然后按式 (1-12) 和式 (1-18) 便可算得各单元的内力。

为了使方程式 (1-11) 有唯一的解, 必须引入适当的边界条件。例如, 考虑到衬砌底面与围岩之间较大的摩擦阻力, 可假定仰拱顶点水平位移为零。

三、弹塑性理论解析法

1. 圆形隧洞的弹性解〔基尔西 (Kirsch), 1898〕(图1—12)

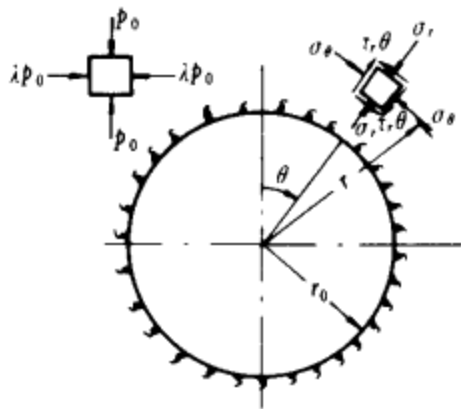


图 1—12

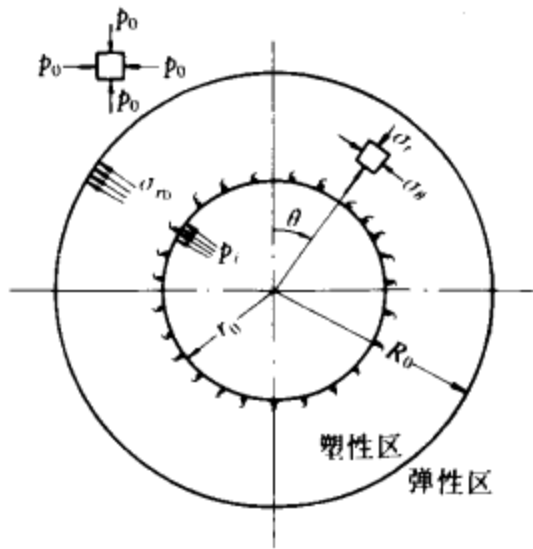


图 1—13

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_v}{2} [(1-\alpha^2)(1+\lambda_0) + (1-4\alpha^2+3\alpha^4)(1-\lambda_0)\cos 2\theta] \\ \sigma_\theta &= \frac{p_v}{2} [(1+\alpha^2)(1+\lambda_0) - (1+3\alpha^4)(1-\lambda_0)\cos 2\theta] \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{p_v}{2} (1+2\alpha^2-3\alpha^4)(1-\lambda_0)\sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

式中 $\alpha=r_0/r$;
 r_0 ——为隧洞内半径;
 r, θ ——所论点的极坐标;
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ ——所论点的应力分量 (压应力为正);
 p_v ——围岩初始竖向压力;
 λ_0 ——静止侧压系数。

2. 圆形隧洞的弹塑性解〔芬勒—塔罗勃 (Fenner—Talobre)〕(图1—13)

对于遵从摩尔—库仑塑性条件

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\varphi - 2c\cos\varphi = 0$$

的岩土隧洞, 作用在支护上的径向压强 p_i 为

$$p_i = -c\cot\varphi + [(p_0 + c\cot\varphi)(1 - \sin\varphi)] \left(\frac{r_0}{R_0} \right)^{\frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi}} \quad (1-24)$$

以上各式中 σ_1, σ_3 ——所论点的最大和最小主应力;
 c, φ ——岩土的粘聚力和内摩擦角;
 p_0 ——竖向和水平匀布压力;
 r_0, R_0 ——隧洞内半径和围岩塑性区半径。

3. 圆形隧道衬砌的近似弹性解〔缪尔伍德 (Muir Wood)〕^[12] (图1—14)