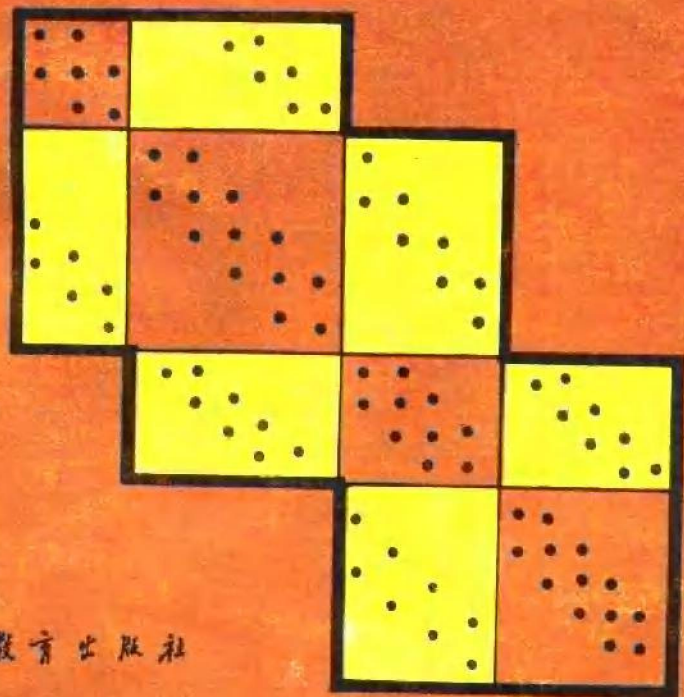


矩阵数值分析

与最优化

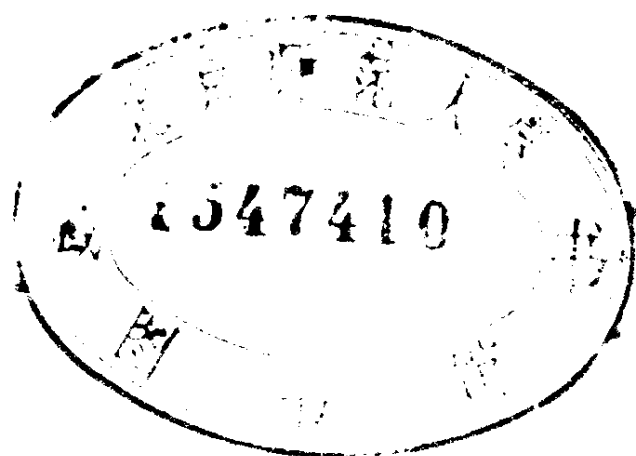
[法] P. G. Ciarlet 著 胡健伟 译



高等教育出版社

矩阵数值分析 与最优化

〔法〕P. G. Ciarlet 著 胡健伟 译



高等教育出版社

矩阵数值分析与最优化

〔法〕P.G.Ciarlet著

胡健伟 译

※

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

※

开本 850×1168 1/32 印张 16.625 字数 400 000

1990年5月第1版 1990年5月第1次印刷

印数 0001-2 930

ISBN 7-04-001068-2/TP·29

定 价 5.25 元

译者前言

本书是法国科学院院士 J.L.LIONS 教授与法国巴黎第六大学、法国高等师范学校 P.G.CIARLET 教授主编的一套《应用数学丛书》中的第一本。这套丛书主要为大学高年级学生所写，可以作为我国有关专业的教学参考书。

作者已在序言中介绍了本书的特点，不再赘述。

原书与练习汇编是分成两册出版的，为了方便读者，我们把它们合成一册。目录中第二个页码表示练习的页码。

译者感谢 P.G.CIARLET 教授对本书翻译工作的支持。南开大学数学系孙璵与杜藏两同志分别审阅了第一部分和第二部分的译稿，提了很好的意见，在此一并表示感谢。限于水平，译文多有不妥之处，敬请读者指正。

胡健伟

1985年5月

1985/12/27

序 言

写这本书的基本目的，是在适当的篇幅之内，相对全面地介绍和分析最常用的一些矩阵数值方法和最优化方法。

当前，在科学的一切领域里都要用到最能充分发挥电子计算机巨大潜力的数值方法。我希望本书不仅仅是介绍各种常用方法的功能，而且对它们进行数学上的分析。虽然前者主要吸引使用数值方法的读者，后者主要为爱好数学严格性的读者所关心，但作者仍然期望本书将使不同的读者对数值分析中这两个互为补充的方面都能激起兴趣。

本书的主要对象是攻读（法国）综合大学纯粹数学专业、数学与基础应用专业、力学专业等学士学位的一年级大学生，以及（法国）高等学校第一年的学生（译者注：以上均相当于我国大学三年级学生水平），同时，也适用于希望了解当前流行的数值方法以达到使用目的的工程师、物理学家、力学家、生物学家、经济学家……。

因为本书（尤其是第一部分）需要的数学水平相对地说并不高，书中所要用到的大部分材料在（法国）高等学校预科或综合大学基础课程（译者注：均相当于我国大学一、二年级水平）的数学课中往往被一带而过。所以，从个人爱好的角度来说，我的最大愿望就是“公平合理”地安排好有关的内容：是否可以只讲授Gramer公式而不涉及Gauss法和Cholesky法？是否只需介绍特征多项式和Jordan归化而忽视QR方法与Givens-Householder方法的存在？是否可以对圆锥和二次曲面的一些性质不甚了解，又不

• 1 •

理会共轭方向概念对二次泛函极小化所起的作用？

在各种条件下，讲授者都很容易使用本书并适应教学需要和学生的水平。按本书内容的编排，如果每周上课三小时，用一学期可以讲完第一章至第六章；或者水平稍高一些的讲完第七章至第十章；也可以讲完第四章至第八章。

我们认为读者已经熟悉矩阵的主要性质（尤其是矩阵的运算）和有限维赋范向量空间（如多元函数的连续性和可微性、紧性、线性算子等等）。虽然在本书的第二部分中用到了Banach空间、Hilbert空间和一般赋范向量空间中的微分学，而且还确切地介绍它们的定义和相应的结果，但是不习惯于这种更抽象形式的读者仍然可以毫无不便地继续“停留在有限维之中”。根据同样的精神，除了在某些定理的证明中，我们也可以不应用弱收敛的概念，只不过这样做会影响到无限维情形的存在性，至于有限维时的存在性结果，则可以用初等方法证明。

我们认为值得指出本书以下一些特点：

——在同一本书内，把矩阵数值分析和最优化方法合在一起，两者间逐渐过渡，而且都附有大量的参考文献；

——按照教学水平由浅入深的原则编排内容和相应的预备知识；

——重视复习和补充所用到的数学知识；

——介绍各种来源于物理、力学、经济的问题，它们最终归结为应用矩阵数值分析或最优化方法求解；

——证明过程是完全的，但又尽可能地简明；

——注重教学效果，关心文字叙述，附有书目注释和索引，还配有很完全的习题汇编。

本书第一部分（第一章至第六章）专门介绍矩阵数值分析，确切的内容有：

——对矩阵和（向量与矩阵的）范数作必要的复习和补充，后者在本书中经常用到（第一章）；

——矩阵数值分析问题中关于条件数的几个概念（第二章）；

——简要地介绍几种数值分析方法（边值问题的有限差分法和变分近似法、插值法、最小二乘法等），它们都引导出线性方程组或特征值问题（第三章）；

——介绍和分析求解线性方程组的几种主要直接法（Gauss法、Cholesky法、Householder法，见第四章）和迭代法（Jacobi法、Gauss-Seidel法、松弛法，见第五章）；

——介绍和分析几种计算矩阵特征值和特征向量的主要方法（Jacobi法、Givens-Householder法、QR法）。

本书第二部分（第七至第十章）专门介绍最优化，内容有：

——赋范向量空间微分学（第七章）和Hilbert空间（第八章）的复习和补充；

——通过研究Lagrange乘子、实函数的极值、凸性以及Newton法等问题，逐步地引入最优化方法（第七章）；

——介绍各种归结为带约束或无约束的泛函极小化问题（线性和非线性边值问题的近似法、来源于“经济”的问题，见第八章和第十章）；

——介绍和分析几种主要的最优化方法：松弛法，最优步长、定步长、变步长的梯度法，共轭梯度法，补偿法（第八章），Uzawa法（第九章）和单纯形法（第十章）；

——对偶理论初步，Farkas-Minkowski引理，Kuhn与Tucker关系，Lagrange算子和鞍点（第八章），对偶理论在线性规划中的应用（第九、第十章）。

读者如果希望更详细地了解所论述的材料，可以参阅各章的引言。

• • •

本书中重要的结果都以定理的形式来论述，其中最重要的还标以箭头符号以引起注意。符号“Z”一般表示难点，或者容易混淆之处，它的含义是多方面的。正文中还夹有许多“注意”，虽然在第一遍阅读时原则上可以跳过，但决不要忽视它们，实际上它们能帮助读者更好地掌握某些结果，指出使人感兴趣的特殊情形，或者论述某些结论进行推广的可能性与不可能性等等。

与本书相配的习题汇编收集了许多难度不同的练习，它们和本书是一个整体。有些练习以“问题”的形式给出，它们有时是正文的重要补充，并且在正文中加以引用。

读者可以看到书中有两种类型的书目材料：一类是“点”上的参考文献（涉及到某一个结果，或某一个练习等），它们以“注”的形式列在每一页的底部；另一类则是比较全面的参考文献，它们在“书目注释”栏内按课题分类，列在书的末尾。读者如果对各章中所论述的方法的“实际程序”感兴趣，可以从该注释中找到有关方面的文献目录。

• • •

本书撰写期间，许多同事和学生真诚地向作者提出了他们的意见、看法、建议等等。作者应该特别地感谢Jean-Marie THOMAS，他详细地阅读了全部手稿，他的意见使本书增色不少。

作者还要向 Claude BASDEVANT, Michel Crouzeix, David FEINGOLD, Annie PUECH-RADULT, Pierre-Arnaud RAVIART, François Robert, Ulrich TULOWITZKI, Lars WAHLBIN 等人表示谢意，因为在不同程度上接受了他们卓越的意见。

从个人的观点来说，作者同样愉快地感谢Richard S. VARGA。

• 4 •

他的教育和极有感染力的热情激发了作者对数值分析的兴趣。

最后，作者再次诚挚地向Hélène BUGLER的勤奋和出色的工作表示谢意。

Philippe G. Ciarlet

1980年12月

目 录

第一部分 矩阵数值分析

第一章 矩阵知识的复习和补充	1, 381
引言	1
1.1 主要记号和定义	2, 381
1.2 矩阵的约化	10, 384
1.3 对称矩阵和Hermite矩阵的特殊性质	14, 386
1.4 向量范数与矩阵范数	19, 388
1.5 向量与矩阵序列	30, 390
第二章 矩阵数值分析概论	33, 393
引言	33
2.1 两类基本问题, 数值方法概论	33, 393
2.2 线性方程组的条件数	39, 395
2.3 特征值问题的条件数	49, 399
第三章 矩阵数值分析问题的来源	54, 401
引言	54
3.1 一维边值问题的有限差分法	55, 401
3.2 二维边值问题的有限差分法	66, 407
3.3 发展型边值问题的有限差分法	72, 409
3.4 一维边值问题的变分近似法	78, 412
3.5 二维边值问题的变分近似法	90, 414
3.6 特征值问题	93, 415
3.7 插值与逼近问题	99, 416
第四章 线性方程组的直接解法	106, 420
引言	106

4.1	求解线性方程组的两点注记	107, 420
4.2	Gauss 法	109, 421
4.3	矩阵的 LU 分解	121, 422
4.4	Cholesky分解与Cholesky法	128, 425
4.5	矩阵的 QR 分解与Householder法	133, 426
第五章 线性方程组的迭代解法		140, 428
引言		140
5.1	迭代法概论	140, 428
5.2	Jacobi法, Gauss-Seidel法, 松弛法	143, 429
5.3	Jacobi法, Gauss-Seidel法, 松弛法的收敛性	151, 430
第六章 特征值与特征向量的算法		162, 435
引言		162
6.1	Jacobi 法	163, 435
6.2	Givens-Householder 法	174, 436
6.3	QR 法	182, 437
6.4	特征向量的计算	190, 438

第二部分 最 优 化

第七章 微分学的复习与补充 初步应用		195, 439
引言		195
7.1	算子的一阶和二阶导数	197, 439
7.2	实函数的极值: Lagrange乘子	211, 441
7.3	实函数的极值: 利用二阶导数	219, 442
7.4	实函数的极值: 利用凸性	221, 442
7.5	Newton 法	228, 446
第八章 最优化 概论 基本算法		242, 449
引言		242
8.1	投影定理, 基本的推论	244, 449
8.2	最优化问题概论	251, 453

8.3	最优化问题的例子	260, 455
8.4	无约束问题的松弛法和梯度法	264, 456
8.5	无约束问题的共轭梯度法	282, 460
8.6	带约束问题的松弛法 梯度法 补偿法	293, 462
第九章	非线性规划初步	301, 463
	引言	301
9.1	Farkas-Minkowski引理	303, 463
9.2	Kuhn与Tucker关系	307, 464
9.3	Lagrange算子与鞍点, 对偶性初步	320, 466
9.4	Uzawa 法	331, 468
第十章	线性规划	337, 472
	引言	337
10.1	线性规划概论	338, 472
10.2	线性规划问题的例子	343, 472
10.3	单纯形法	347, 473
10.4	对偶性与线性规划	370, 476

第三部分 练习 参考书目 索引

练习	381
书目注释	479
参考书目及文献	484
主要记号	494
正文索引	501
练习索引	514

第一部分

矩阵数值分析

第一章 矩阵知识的复习和补充

引言

本章的目的是复习，并且集中给出矩阵和有限维向量空间的一些结果。本书的后文经常要用到它们。

我们假定读者已经熟悉有限维向量空间的初等性质（尤其是矩阵运算），在1.1中我们要引入主要的记号和定义，以及矩阵块分解的概念，指出它在矩阵数值分析中的重要性。

为了使本书尽可能地包含它所需要的预备知识，后文中所需要的重要结果都被逐一地列出。特别是，任意一个矩阵化为三对角型，正规矩阵的对角化（定理1.2-1），矩阵与它的奇异值，对角矩阵的等价性（定理1.2-2）。应当指出，我们在这方面将不引用Jordan定理。此后（定理1.3-1）研究了对称矩阵或 Hermite 矩阵特征值的特性，这是借助于 Rayleigh 商实现的，特别是用“min-max”和“max-min”来表示其特性。

接着，我们引入矩阵数值分析中常用的向量范数，它是 l ，范数的特殊情形（定理1.4-1），然后计算相应的从属矩阵范数（定

理1.4-2)。在定理1.4-4中，给出了不从属于任何向量范数的矩阵范数的例子。同时，我们还给出形如 $(I+B)$ 的矩阵的可逆性条件（定理1.4-5），并且证明了一个矩阵的谱半径是其范数的下界（定理1.4-3）。后一个定理立即用于证明两个关于矩阵的幂的结果（定理1.5-1和1.5-2），它们在第五章研究线性方程组的迭代解法中起着基本的作用。

1.1 主要记号和定义

设 V 是在实数域 R 或复数域 C 上的 n 维向量空间，若无必要清楚地区分它们，我们就说它在数域 K 上。

所谓 V 的一组基是指 V 的 n 个线性无关向量集 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ，用 $(e_i)_{i=1}^n$ 表示，如果不引起混淆也可简记为 (e_i) 。那么，每一个向量 $v \in V$ 有唯一的分解

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i,$$

其中数量 v_i 是向量 v 在基 (e_i) 上的分量，有时也记为 $(v)_i$ 。一旦选定基之后，我们可以把 V 和 K^n 视为同一，因此，我们也用 $v = (v_i)_{i=1}^n$ 表示分量为 v_i 的向量，或简记成 (v_i) 。

在矩阵记号中，向量 $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ 始终表示列向量

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

并且用 v^T 和 v^* 表示下列行向量:

$$v^T = (v_1, v_2, \dots, v_n), \quad v^* = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n),$$

一般地, $\bar{\alpha}$ 表示数 α 的共轭复数. 行向量 v^T 称为列向量 v 的转置向量, 而行向量 v^* 称为列向量 v 的伴随向量.

算子 $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow K$ 定义为

$$(u, v) = v^T u = u^T v = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \text{若 } K = \mathbb{R};$$

$$(u, v) = v^* u = \overline{u^* v} = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i, \quad \text{若 } K = \mathbb{C}.$$

当 $K = \mathbb{R}$ 时, 它被称为 Euclid 数量积, 当 $K = \mathbb{C}$ 时, 称为 Hermite 数量积. 如果我们不确切指出数域时, 也可以称它为 典范数量积, 如果我们希望标明空间的维数, 就把它写成

$$(u, v) = (u, v)_n.$$

设 V 是一个定义了典范数量积的空间. 如果 $(u, v) = 0$, 则称 V 的两个向量 u 和 v 是正交的. 更一般地, 如果向量 v 和集合 U 的所有向量正交, 则称向量 v 和 V 的子集 U 正交, 记为 $v \perp U$. 最后, 所谓空间 V 的向量集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 是标准正交的, 是指

$$(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq k,$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 记号: 当 $i = j$ 时 $\delta_{ij} = 1$, 当 $i \neq j$ 时 $\delta_{ij} = 0$.

设 V 和 W 是在同一个数域上的两个空间, 分别选定了基 $(e_j)_{j=1}^n$ 和 $(f_i)_{i=1}^m$. 相对于这两组基, 线性算子

$$\mathcal{A}: V \rightarrow W$$

由一个 m 行 n 列矩阵表示:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

矩阵 A 的元素 a_{ij} 由关系式

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i, \quad 1 \leq j \leq n$$

唯一确定。换言之，矩阵 A 的第 j 个列向量

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

是向量 $\mathcal{A}e_j$ 在基 $(f_i)_{i=1}^m$ 之下的表示。我们用

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

表示矩阵 A 的第 i 个行向量。

一个 m 行 n 列矩阵被称为 (m, n) 型矩阵。我们用 $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ (或简记为 $\mathcal{M}_{m,n}$) 表示一个在域 K 上的向量空间，它由所有元素在 K 中的 (m, n) 型矩阵构成。因此，一个列向量是 $(m, 1)$ 型矩阵，而一个行向量是 $(1, n)$ 型矩阵。一个矩阵是实矩阵或复矩阵，是根据它的元素在域 R 或在域 C 而定。

一个元素为 a_{ij} 的矩阵 A 记为

$$A = (a_{ij}),$$

其中第一个下标 i 总是行的指标，而第二个下标 j 则是列的指标。给出矩阵 A ，我们用 $(A)_{ij}$ 表示 A 的第 i 行第 j 列的元素。

零矩阵和零向量都用同一个字母 O 表示。

给出一个矩阵 $A \in \mathcal{M}_{m,n}(C)$ ，我们用 $A^* \in \mathcal{M}_{n,m}(C)$ 表示矩阵 A 的伴随矩阵，它唯一地由关系式

$$(Au, v)_n = (u, A^*v)_m, \quad \text{对所有 } u \in C^m, v \in C^n$$

所确定，从而 $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$ 。类似地，给出矩阵 $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$ ，用 $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(R)$ 表示矩阵 A 的转置矩阵，它唯一地由关系式

$$A^T = (a_{ji})$$

$(Au, v)_n = (u, A^T v)_n$, 对所有 $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$ 所确定, 从而 $(A^T)_{ij} = a_{ji}$.

注意 (1) 我们也可以定义一个复矩阵的转置矩阵, 但这个概念并无多大用处, 因为算子 $u, v \rightarrow \sum_{i=1}^n u_i v_i$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中不是一个数量积.

(2) 我们采用记号 A^T 而不采用一度用惯的 A' , 因为后者更适用于对偶基的概念, 记号 A^T 还强调转置矩阵的概念依赖于具体的数量积 (现在是典范数量积).

矩阵的乘积对应于复合线性算子. 如果 $A = (a_{ik})$ 是 (m, l) 型矩阵, $B = (b_{kj})$ 是 (l, n) 型矩阵, 它们的乘积 AB 是一个 (m, n) 型矩阵:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}.$$

我们还有 $(AB)^T = B^T A^T$, $(AB)^* = B^* A^*$.

设 $A = (a_{ij})$ 是 (m, n) 型矩阵. 我们把形如

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_s j_1} & a_{i_s j_2} & \cdots & a_{i_s j_r} \end{pmatrix}$$

的矩阵称为矩阵 A 的子矩阵, 其中整数 i_s 和 j_r 满足

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq m, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n.$$

设矩阵 $A = (a_{ij})$ 表示从 V 到 W 的一个线性算子, 并且设把空间 V 与 W 分解为子空间 V_i 与 W_i 的直接和

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n, \quad W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n,$$