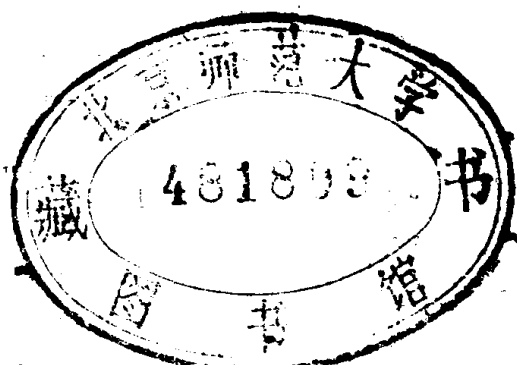


高等几何

梅向明 刘增贤 门树慧 编

JY11133109



高等教育出版社

高等几何

梅向明 刘增贤 门树慧 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.5 字数 270 000

1988 年 10 月第 1 版 1988 年 10 月第 1 次印刷

印数 0 001-- 16 140

ISBN7-04-000895-5/0·345

定价 2.65 元

出版前言

本书是以原教育部颁发中学教师进修高等师范专科高等几何教学大纲为依据，参照当前教学改革的要求和进修教师的实际情况，对梅向明、刘增贤、林向岩编《高等几何》进行改写而成。主要内容有：欧氏平面上的正交变换和仿射变换；射影平面；射影变换和射影坐标；二次曲线的射影性质、仿射性质、度量性质；变换群与几何学；几何基础初步等。主要是叙述一维和二维的经典射影几何，并尽可能地介绍某些高等几何内容在中学几何中的应用。

本书可作为中学教师进修高等师范高等几何课程的教材，也可供广大中学教师自学该课程时使用。

本书配有学习指导书，不久即将出版。

序 言

本教材是以原教育部颁发中学教师进修高等师范专科高等几何教学大纲为依据,参照当前教学改革的要求和进修教师的实际情况,部分内容是对梅向明、刘增贤、林向岩编《高等几何》进行改写,部分内容重新编写而成。目的是供广大中学教师进修或自学《高等几何》课程时使用。

教材的主要内容是一维和二维经典射影几何,并且介绍F. 克莱因的“爱尔兰根”纲领,即如何用变换群的观点去研究几何学。从体系上说,我们侧重用解析法,不过尽可能地说明几何背景,因此也适当地采用了综合法。特别,我们尽可能地介绍某些高等几何内容在中学几何中的应用。

在最后一章里,扼要地介绍了几何发展史以及几何基础的基本内容;叙述了公理法的基本思想,并给出了射影几何和欧氏几何的公理体系;还介绍了罗氏几何的一些基本内容,并给出了这种几何的具体模型。

受高等教育出版社委托,邀请了部分省市教育学院的代表,审阅了这本教材的全稿,并提出了不少宝贵的意见。对审稿的同志以及为本教材作出贡献的同志,我们谨表示衷心感谢。希望使用或阅读本教材的读者对本书存在的缺点和不足之处给予批评指正。

梅向明 刘增贤 门树慧

一九八七年五月于北京。

目 录

第一章 欧氏平面上的正交变换和仿射变换	1
§ 1 点变换	1
1.1 点变换的定义	1
1.2 变换的乘积	6
1.3 恒等变换与逆变换	8
习题	10
§ 2 正交变换	10
2.1 正交变换的定义	10
2.2 正交变换的代数表示式	12
习题二	17
§ 3 仿射变换	18
3.1 透视仿射对应	18
3.2 仿射对应与仿射变换	21
3.3 仿射坐标系	24
3.4 仿射变换的代数表示式	29
3.5 几种特殊的仿射变换	36
习题三	38
本章小结	39
复习思考题	40
第二章 射影平面	42
§ 1 中心射影与无穷远元素	42
1.1 中心射影	42
1.2 无穷远元素	44
§ 2 射影直线和射影平面	47
2.1 仿射直线和仿射平面	47
2.2 射影直线和射影平面	49
2.3 图形的射影性质	51

2.4 利用投影到无穷远证明初等几何问题	54
习题一	56
§3 笛沙格(Desargues)定理	56
习题二	61
§4 对偶原则	63
4.1 对偶图形	64
4.2 对偶命题与对偶原则	68
习题三	70
§5 齐次点坐标	71
5.1 齐次点坐标	71
5.2 直线的齐次坐标方程	74
5.3 齐次点坐标的应用	75
习题四	85
§6 线坐标	86
6.1 齐次线坐标	87
6.2 非齐次线坐标	89
习题五	92
§7 射影平面的进一步扩充——复元素	92
7.1 二维空间的复元素	93
7.2 二维共轭复元素	94
习题六	98
本章小结	98
复习思考题	100
第三章 射影变换和射影坐标	102
§1 交比与调和比	102
1.1 点列的四点的交比与调和比	102
1.2 线束的四直线的交比与调和比	116
1.3 完全四点形与完全四线形的调和性	126
习题一	131
§2 一维射影变换	133
2.1 一维基本形的透视对应	133

2.2	一维基本形的射影对应	136
2.3	一维射影变换	147
	习题二	150
§ 3	一维基本形的对合	151
	习题三	159
§ 4	二维射影变换	160
4.1	非奇线性对应	160
4.2	射影对应与非奇线性对应的等价性	163
4.3	二维射影变换及其不变元素	166
	习题四	169
§ 5	直线上和平面上的射影坐标系	170
5.1	直线上的射影坐标系	171
5.2	二维射影坐标系	175
	习题五	179
	本章小结	180
	复习思考题	183
第四章	二次曲线的射影性质	185
§ 1	二次曲线的射影定义	185
1.1	二阶曲线与二级曲线	185
1.2	二次曲线的射影定义	190
1.3	二阶曲线与二级曲线的关系	193
	习题一	203
§ 2	巴斯加(Pascal)定理和布利安桑(Brianchon)定理	204
	习题二	214
§ 3	极点、极线、配极原则	214
3.1	极点和极线的定义	215
3.2	配极原则	220
	习题三	227
§ 4	二次曲线的射影分类	228
4.1	二阶曲线的奇异点	228
4.2	二阶曲线的射影分类	232

习题四	240
本章小结	240
复习思考题	241
第五章 二次曲线的仿射性质	243
§ 1 二阶曲线与无穷远直线的相关位置	244
§ 2 二阶曲线的中心、直径、渐近线	245
2.1 中心	245
2.2 直径与共轭直径	247
2.3 渐近线	254
习题一	259
§ 3 二次曲线的仿射分类	259
习题二	267
本章小结	267
复习思考题	268
第六章 二次曲线的度量性质	270
§ 1 圆点和迷向直线	270
1.1 圆点和迷向直线的定义	270
1.2 圆点和迷向直线的性质	273
习题一	276
§ 2 拉盖尔(Laguerre)定理	276
习题二	280
§ 3 二次曲线的主轴、焦点和准线	281
3.1 主轴	281
3.2 焦点和准线	287
习题三	295
§ 4 二次曲线的度量分类	295
本章小结	297
复习思考题	298
第七章 变换群与几何学	300
§ 1 变换群的概念	300

习题一	303
§ 2 平面上的几个重要的变换群	303
2.1 射影变换群	303
2.2 仿射变换群	305
2.3 相似变换群	307
2.4 正交变换群	308
习题二	309
§ 3 变换群与几何学	309
3.1 克莱因(F. Klein)的爱尔兰根(Erlangen)纲领	309
3.2 射影、仿射、欧氏三种几何的比较	312
习题三	317
本章小结	318
复习思考题	319
第八章 几何基础初步	320
§ 1 公理法思想的产生	320
1.1 欧几里得的几何原本	320
1.2 关于第五公设	324
1.3 公理法思想	335
§ 2 射影几何的公理体系	337
§ 3 希尔伯特(Hilbert)欧氏几何公理体系	341
§ 4 罗氏几何介绍	344
4.1 高斯、波约伊和罗巴切夫斯基	344
4.2 罗氏平行公理及其推论	346
4.3 罗氏平面的模型	354
本章小结	356
复习思考题	356

第一章 欧氏平面上的正交变换和仿射变换

本章是在欧氏平面上阐明点变换的概念，然后在正交变换的基础上建立仿射变换的概念，研究图形在仿射变换下的不变量和不变性质。

§1 点变换

1.1 点变换的定义

定义 1.1 设 U, V 是两个点集，如果有一个法则 φ ，通过 φ 对于 U 中的任一点 A ，能得到 V 中的一个点 B ，则 φ 叫做点集 U 到点集 V 中的一个对应(映射)。记为

$$\varphi: A \rightarrow B,$$

或

$$\varphi(A) = B.$$

这时 B 点叫做 A 点在对应 φ 下的象。并且称 A 为 B 的原象。

定义 1.2 设 φ 是点集 U 到点集 V 中的一个对应，如果在 φ 下， V 中的每一点 B 都有原象，则 φ 叫点集 U 到点集 V 上的对应。

定义 1.3 设有点集 U 到点集 V 上的一个对应 φ ，如果在 φ 下， U 的任何两个不同的点 A_1, A_2 的象也不同，则对应 φ 叫做点集 U 到点集 V 的一一对应。

在以上定义中，如果点集 U, V 相同，则集合 U 到自身的对应叫做变换，又因为 U 是点集，故称点变换。

下面举几个常见的点变换的例子。

例 1 如图 1-1, 在一平面上两条直线分别看成点集 l_1 和 l_2 , v 是与 l_1, l_2 都不平行的定方向, 对于 l_1 的任何一点 A , 令

$$\varphi(A) = B,$$

其中 $AB \parallel v, B \in l_2$, 则 φ 是 l_1 到 l_2 的一个对应, 而且是一一对应.

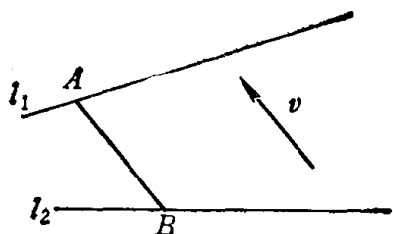


图 1-1

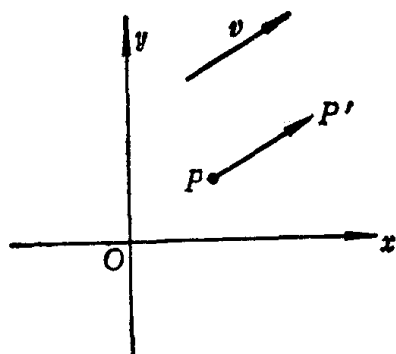


图 1-2

例 2 平面上的平移变换

平面内任一点沿着一个定方向 v 移动一定距离 $|v|$, 便得到一个平面到自身的平移变换.

在平面上建立笛卡儿直角坐标系, 如果平移变换 T 使得

$$T[P(x, y)] = P'(x', y'),$$

且 $v = \{a, b\}$.

则平移变换的公式为

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \end{cases} \quad (1.1)$$

这是一个一一的点变换.

例 3 平面上的旋转变换

平面内任一点, 都绕一定点 O 旋转一个定角 θ , 便得到平面到自身的一个旋转变换.

在平面上建立笛卡儿直角坐标系, 使旋转中心 O 为原点, 如果

转变换 σ 使

$$\sigma[P(x, y)] = P'(x', y'),$$

则变换公式为

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases} \quad (1.2)$$

在旋转变换下, 旋转中心是不变点.

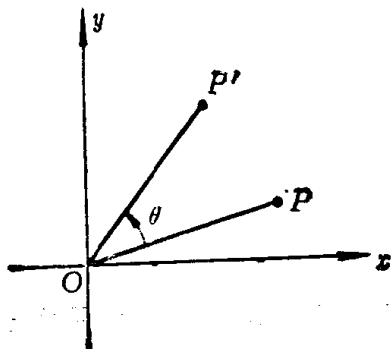


图 1-3

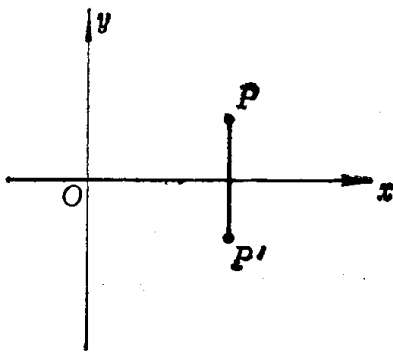


图 1-4

例 4 平面上的轴反射变换

如果平面上的一个点变换使每对对应点 A, A' 的连线段 AA' 都被一条定直线 s 垂直平分, 则这种变换叫做关于直线 s 的轴反射变换, 直线 s 叫做反射轴.

在轴反射变换下, 反射轴上的点都是不变点.

在建立笛卡儿直角坐标系后, 如果 x 轴是反射轴, 则将 $P(x, y)$ 变到 $P'(x', y')$ 的轴反射变换公式为

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases} \quad (1.3)$$

如取 y 轴为反射轴, 则将 $P(x, y)$ 变到 $P'(x', y')$ 的轴反射变换公式为

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases} \quad (1.4)$$

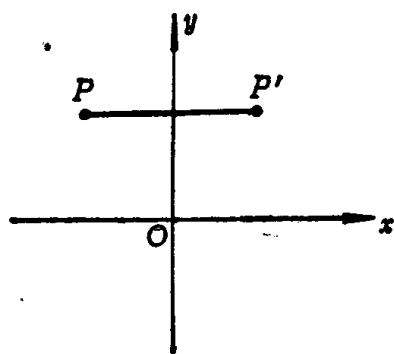


图 1-5

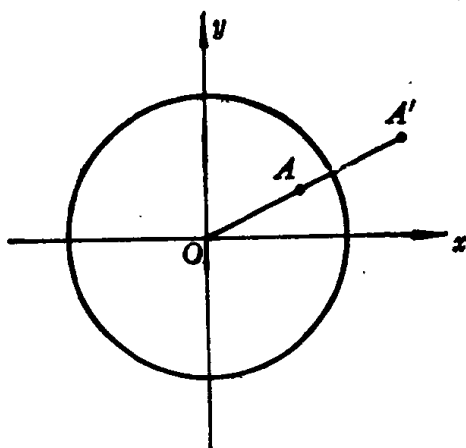


图 1-6

例5 平面上的反演变换

在平面上取定以 O 为心, R 为半径的圆. 除圆心 O 外, 平面上任一点 A , 它的对应点 A' 满足下列条件:

- (1) 点 O, A, A' 三点共线, 且 A, A' 在 O 点的同侧;
- (2) $OA \cdot OA' = R^2$,

则称这种变换为关于圆 (O, R) 的反演变换.

以 O 为坐标原点, 建立笛氏直角坐标系, 使

$$A(x, y) \longrightarrow A'(x', y')$$

的关于圆 (O, R) 的反演变换公式为:

$$\begin{cases} x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \\ y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2}. \end{cases} \quad (1.5)$$

在反演变换下, 反演圆 (O, R) 上的点是不变点.

例6 平面上的位似变换

在平面上取定一点 S , 规定 S 的象即它本身, 平面内除 S 以外的其它点 P 的对应点 P' 满足下列条件:

(1) S, P, P' 共线;

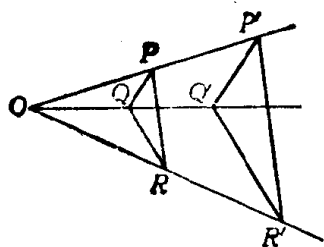
(2) $\frac{SP'}{SP} = k$ (k 为不等于 0, 1 的常数),

则这种变换叫做位似变换, 常数 k 叫做位似比, 定点 S 叫做位似中心.

图 1-7(1) 表示 $k > 0$ 的情况; 图 1-7(2) 表示 $k < 0$ 的情况.

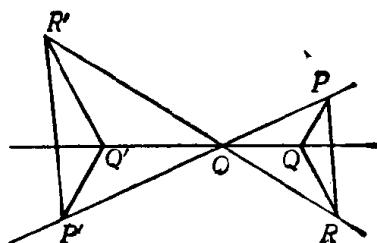
取位似中心为原点, 建立笛氏直角坐标系. 设在位似变换下 $P(x, y)$ 对应 $P'(x', y')$, 则变换公式为

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky. \end{cases} \quad (1.6)$$



(1)

图 1-7(1)



(2)

图 1-7(2)

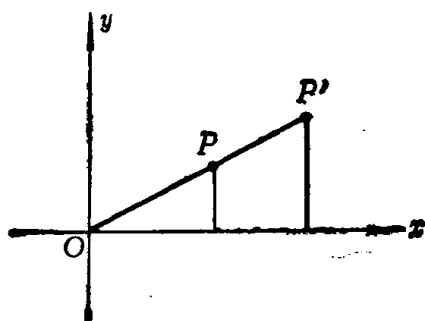


图 1-8

1.2 变换的乘积

设有两个变换 φ_1, φ_2 (以后所研究的变换均指一一变换), 如果对于集合 S 中的任何元素 x , 均有

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x),$$

则称变换 φ_1 和 φ_2 相等, 记为

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

有些变换可以分几步通过别的变换而得到, 这就需要变换乘积的概念.

定义 1.4 设 φ_1, φ_2 是集合 S 的两个变换, 如果对于 S 中的任何元素 x , 先通过 φ_1 变到 $\bar{x}$, $\bar{x}$ 再通过 φ_2 变到 x' , 则从 x 变到 x' 的变换 φ , 叫做变换 φ_1 和 φ_2 的乘积, 记为

$$\varphi = \varphi_2 \cdot \varphi_1,$$

即当

$$\varphi_1(x) = \bar{x},$$

$$\varphi_2(\bar{x}) = x',$$

且

$$\varphi(x) = x'$$

时, 有

$$\varphi = \varphi_2 \cdot \varphi_1.$$

由定义可见, 对于 S 中的任何元素 x , 有

$$(\varphi_2 \cdot \varphi_1)(x) = \varphi_2[\varphi_1(x)]. \quad (1.7)$$

我们把 $\varphi \cdot \varphi$ 记为 φ^2 , 把 $\overbrace{\varphi \cdot \varphi \cdots \varphi}^{n \text{ 个}}$ 记为 φ^n .

注意: 定义 1.4 对于两个集合间的对应也适用. 设 φ_1 是集合 S_1 到集合 S_2 的对应, φ_2 是集合 S_2 到集合 S_3 的对应, 则 φ_1 与 φ_2 的乘积 $\varphi_2 \cdot \varphi_1 = \varphi$ 是集合 S_1 到集合 S_3 的对应.

例 7 已知两个点变换

$$T_1: \begin{cases} x' = x + 1, \\ y' = y - 3, \end{cases} \quad T_2: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

求 T_1 与 T_2 的乘积 $T_2 \cdot T_1$.

解 设 $T_1: \begin{cases} \bar{x} = x + 1, \\ \bar{y} = y - 3, \end{cases} \quad T_2: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y}, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y}, \end{cases}$

则 $T_2 \cdot T_1: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y-3), \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(y-3), \end{cases}$

即 $T_2 \cdot T_1: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1+3\sqrt{3}}{2}, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}-3}{2}. \end{cases}$

例 8 求例 7 中, T_2 与 T_1 之积 $T_1 \cdot T_2$.

解 设 $T_2: \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \\ \bar{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \end{cases} \quad T_1: \begin{cases} x' = \bar{x} + 1, \\ y' = \bar{y} - 3, \end{cases}$

则 $T_1 \cdot T_2: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 3. \end{cases}$

从例 8 和例 7 不难看出, 两个变换的乘积与它们的顺序有关, 即 $T_2 \cdot T_1 \neq T_1 \cdot T_2$. 这就是说, 变换的乘法不满足交换律. 但有以下定理

定理 1.1 变换的乘法满足结合律.

证明 设 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 是集合 S 的三个变换, 需要证明

$$\varphi_3 \cdot (\varphi_2 \cdot \varphi_1) = (\varphi_3 \cdot \varphi_2) \cdot \varphi_1. \quad (1.8)$$

对于 S 中的任何元素 x , 由 (1.7) 有

$$\begin{aligned} [\varphi_3 \cdot (\varphi_2 \cdot \varphi_1)](x) &= \varphi_3[(\varphi_2 \cdot \varphi_1)(x)] \\ &= \varphi_3[\varphi_2(\varphi_1(x))] \\ [(\varphi_3 \cdot \varphi_2) \cdot \varphi_1](x) &= (\varphi_3 \cdot \varphi_2)[\varphi_1(x)] \\ &= \varphi_3[\varphi_2(\varphi_1(x))], \end{aligned}$$

所以

$$\varphi_3 \cdot (\varphi_2 \cdot \varphi_1) = (\varphi_3 \cdot \varphi_2) \cdot \varphi_1.$$

1.3 恒等变换与逆变换

定义 1.5 设有集合 S , 使得 S 的任何元素都不变的变换叫做 S 的**恒等变换**, 恒等变换记为 ε , 对于 S 中的任何元素 a , 有

$$\varepsilon(a) = a, \quad (1.9)$$

又对于任何变换 φ , 有

$$\varepsilon \cdot \varphi = \varphi \cdot \varepsilon = \varphi. \quad (1.10)$$

ε 的代数表示式为

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$$

定义 1.6 设有集合 S 的一个一一变换 $\varphi: a \rightarrow a'$, S 的另一个变换 $\varphi^{-1}: a' \rightarrow a$ 叫做 φ 的**逆变换**.

从这个定义可知, φ 也是 φ^{-1} 的逆变换. 因为

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1} \cdot \varphi)(a) &= \varphi^{-1}[\varphi(a)] = \varphi^{-1}(a') = a = \varepsilon(a), \\ (\varphi \cdot \varphi^{-1})(a') &= \varphi[\varphi^{-1}(a')] = \varphi(a) = a' = \varepsilon(a'), \end{aligned}$$

所以

$$\varphi^{-1} \cdot \varphi = \varepsilon = \varphi \cdot \varphi^{-1}. \quad (1.11)$$