高等几何

梅向明 刘增贤 门树慧 编

高等教育出版社

高等几何

梅向明 刘增贤 门树慧 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.5 字数 270 000

1988 年 10 月第 1 版 1988 年 10 月第 1 次印刷

印数 0 001—16 140

ISBN7-04-000895-5/O·345

定价 2.65 元

出版前言

本书是以原教育部颁发中学教师进修高等师范专科高等几何教学大纲为依据，参照当前教学改革的要求和进修教师的实际情况，对梅向明、刘增贤、林向岩编《高等几何》进行改写而成. 主要内容有：欧氏平面上的正交变换和仿射变换；射影平面；射影变换和射影坐标；二次曲线的射影性质、仿射性质、度量性质；变换群与几何学；几何基础初步等. 主要是叙述一维和二维的经典射影几何，并尽可能地介绍某些高等几何内容在中学几何中的应用.

本书可作为中学教师进修高等师范高等几何课程的教材，也可供广大中学教师自学该课程时使用.

本书配有学习指导书，不久即将出版.

序　言

本教材是以原教育部颁发中学教师进修高等师范专科高等几何教学大纲为依据，参照当前教学改革的要求和进修教师的实际情况，部分内容是对梅向明、刘增贤、林向岩编《高等几何》进行改写，部分内容重新编写而成．目的是供广大中学教师进修或自学《高等几何》课程时使用．

教材的主要内容是一维和二维经典射影几何，并且介绍F.克莱因的“爱尔兰根”纲领，即如何用变换群的观点去研究几何学．从体系上说，我们侧重用解析法，不过尽可能地说明几何背景，因此也适当地采用了综合法．特别，我们尽可能地介绍某些高等几何内容在中学几何中的应用．

在最后一章里，扼要地介绍了几何发展史以及几何基础的基本内容；叙述了公理法的基本思想，并给出了射影几何和欧氏几何的公理体系；还介绍了罗氏几何的一些基本内容，并给出了这种几何的具体模型．

受高等教育出版社委托，邀请了部分省市教育学院的代表，审阅了这本教材的全稿，并提出了不少宝贵的意见．对审稿的同志以及为本教材作出贡献的同志，我们谨表示衷心感谢．希望使用或阅读本教材的读者对本书存在的缺点和不足之处给予批评指正．

梅向明　刘增贤　门树慧

一九八七年五月于北京．

目　录

第一章　欧氏平面上的正交变换和仿射变换

本章是在欧氏平面上阐明点变换的概念，然后在正交变换的基础上建立仿射变换的概念，研究图形在仿射变换下的不变量和不变性质.

§1　点　变　换

1.1　点变换的定义

定义 1.1　设U,V是两个点集，如果有一个法则φ，通过φ对于U中的任一点A，能得到V中的一个点B，则φ叫做点集U到点集V中的一个**对应(映射)**. 记为

$$\varphi:\ A\to B,$$

或

$$\varphi(A)=B.$$

这时B点叫做A点在对应φ下的象. 并且称A为B的**原象**.

定义 1.2　设φ是点集U到点集V中的一个对应，如果在φ下，V中的每一点B都有原象，则φ叫点集U到点集V**上的对应**.

定义 1.3　设有点集U到点集V上的一个对应φ，如果在φ下，U的任何两个不同的点A_1，A_2的象也不同，则对应φ叫做点集U到点集V的**一一对应**.

在以上定义中，如果点集U,V相同，则集合U到自身的对应叫做**变换**，又因为U是点集，故称**点变换**.

下面举几个常见的点变换的例子.

例 1 如图 1-1，在一平面上两条直线分别看成点集 l_1 和 l_2，$\boldsymbol{v}$ 是与 l_1, l_2 都不平行的定方向，对于 l_1 的任何一点 A，令

$$\varphi(A)=B,$$

其中 $AB \parallel \boldsymbol{v}$，$B \in l_2$，则 φ 是 l_1 到 l_2 的一个对应，而且是一一对应。

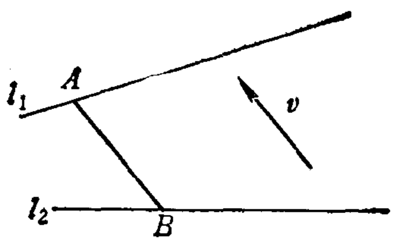


图 1-1

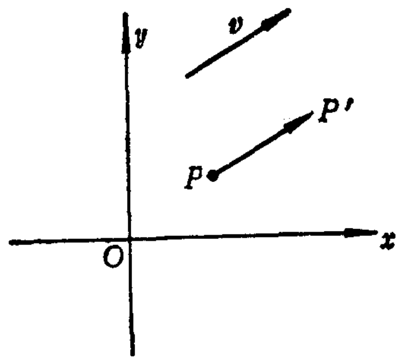


图 1-2

例 2 平面上的平移变换

平面内任一点沿着一个定方向 $\boldsymbol{v}$ 移动一定距离 $|\boldsymbol{v}|$，便得到一个平面到自身的**平移变换**.

在平面上建立笛卡儿直角坐标系，如果平移变换 T 使得

$$T[P(x,y)]=P'(x',y'),$$

且

$$\boldsymbol{v}=\{a,b\}.$$

则平移变换的公式为

$$\begin{cases} x'=x+a, \\ y'=y+b, \end{cases} \tag{1.1}$$

这是一个一一的点变换.

例 3 平面上的旋转变换

平面内任一点，都绕一定点 O 旋转一个定角 θ，便得到平面到自身的一个**旋转变换**.

在平面上建立笛卡儿直角坐标系，使旋转中心 O 为原点，如果

转变换 σ 使

$$\sigma[P(x,y)]=P'(x',y'),$$

则变换公式为

$$\begin{cases}x'=x\cos\theta-y\sin\theta,\\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta.\end{cases}\tag{1.2}$$

在旋转变换下，旋转中心是不变点.

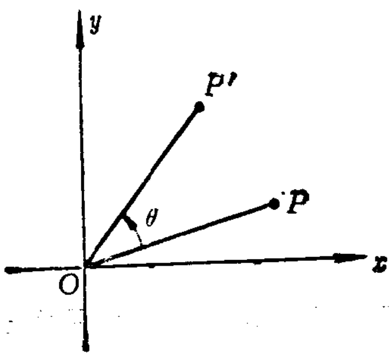


图 1-3

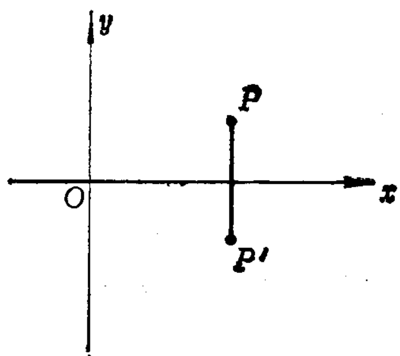


图 1-4

例 4 平面上的轴反射变换

如果平面上的一个点变换使每对对应点 A, A' 的连线段 AA' 都被一条定直线 s 垂直平分，则这种变换叫做关于直线 s 的**轴反射变换**，直线 s 叫做**反射轴**.

在轴反射变换下，反射轴上的点都是不变点.

在建立笛卡儿直角坐标系后，如果 x 轴是反射轴，则将 $P(x,y)$ 变到 $P'(x',y')$ 的轴反射变换公式为

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=-y.\end{cases}\tag{1.3}$$

如取 y 轴为反射轴，则将 $P(x,y)$ 变到 $P'(x',y')$ 的轴反射变换公式为

$$\begin{cases}x'=-x,\\ y'=y.\end{cases}\tag{1.4}$$

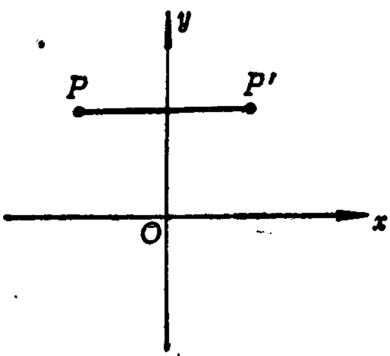


图 1-5

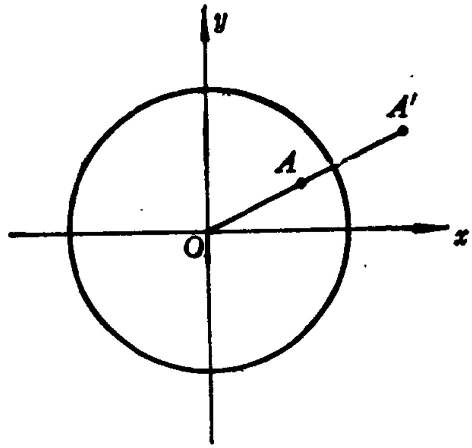


图 1-6

例 5　平面上的反演变换

在平面上取定以 O 为心，R 为半径的圆. 除圆心 O 外，平面上任一点 A，它的对应点 A' 满足下列条件：

(1) 点 O,A,A' 三点共线，且 A,A' 在 O 点的同侧；

(2) $OA\cdot OA'=R^2$，

则称这种变换为关于圆(O,R)的**反演变换**.

以 O 为坐标原点，建立笛氏直角坐标系，使

$$A(x,y)\longrightarrow A'(x',y')$$

的关于圆(O,R)的反演变换公式为：

$$\begin{cases} x'=\dfrac{R^2x}{x^2+y^2}, \\ y'=\dfrac{R^2y}{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{1.5}$$

在反演变换下，反演圆(O,R)上的点是不变点.

例 6　平面上的位似变换

在平面上取定一点 S，规定 S 的象即它本身，平面内除 S 以外的其它点 P 的对应点 P' 满足下列条件：

(1) S, P, P' 共线;

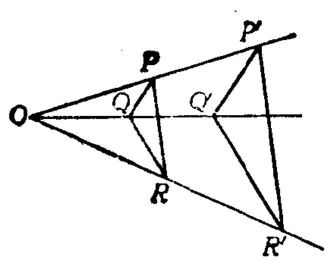
(2) $\dfrac{SP'}{SP}=k$(k为不等于 0,1 的常数),

则这种变换叫做**位似变换**，常数 k 叫做**位似比**，定点 S 叫做**位似中心**.

图 1-7(1)表示 $k>0$ 的情况;图 1-7(2)表示 $k<0$ 的情况.

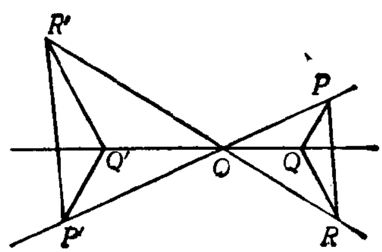
取位似中心为原点，建立笛氏直角坐标系．设在位似变换下 $P(x,y)$ 对应 $P'(x',y')$,则变换公式为

$$\begin{cases} x'=kx, \\ y'=ky. \end{cases} \tag{1.6}$$



(1)

图 1-7(1)



(2)

图 1-7(2)

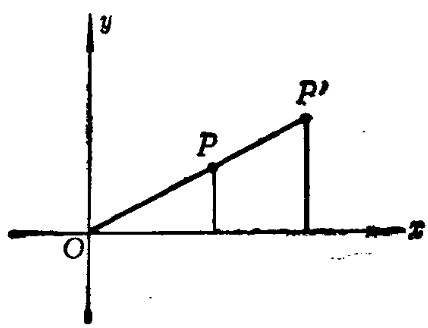


图 1-8

1.2 变换的乘积

设有两个变换 φ_1, φ_2(以后所研究的变换均指一一变换)，如果对于集合 S 中的任何元素 x，均有

$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x),$$

则称变换 φ_1 和 φ_2 相等，记为

$$\varphi_1=\varphi_2.$$

有些变换可以分几步通过别的变换而得到，这就需要变换乘积的概念.

定义 1.4 设 φ_1, φ_2 是集合 S 的两个变换，如果对于 S 中的任何元素 x，先通过 φ_1 变到 $\bar{x}$, $\bar{x}$ 再通过 φ_2 变到 x'，则从 x 变到 x' 的变换 φ，叫做变换 φ_1 和 φ_2 的乘积，记为

$$\varphi=\varphi_2\cdot\varphi_1,$$

即当

$$\varphi_1(x)=\bar{x},$$

$$\varphi_2(\bar{x})=x',$$

且

$$\varphi(x)=x'$$

时，有

$$\varphi=\varphi_2\cdot\varphi_1.$$

由定义可见，对于 S 中的任何元素 x，有

$$(\varphi_2\cdot\varphi_1)(x)=\varphi_2[\varphi_1(x)]. \tag{1.7}$$

我们把 $\varphi\cdot\varphi$ 记为 φ^2，把 $\overbrace{\varphi\cdot\varphi\cdots\varphi}^{n\text{个}}$ 记为 φ^n.

注意：定义 1.4 对于两个集合间的对应也适用. 设 φ_1 是集合 S_1 到集合 S_2 的对应，φ_2 是集合 S_2 到集合 S_3 的对应，则 φ_1 与 φ_2 的乘积 $\varphi_2\cdot\varphi_1=\varphi$ 是集合 S_1 到集合 S_3 的对应.

例 7 已知两个点变换

$$T_1:\begin{cases} x'=x+1, \\ y'=y-3, \end{cases} \qquad T_2:\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y \end{cases}$$

求 T_1 与 T_2 的乘积 $T_2\cdot T_1$.

解 设 $T_1:\begin{cases} \bar{x}=x+1, \\ \bar{y}=y-3, \end{cases} \qquad T_2:\begin{cases} x'=\frac{1}{2}\bar{x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y}, \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x}+\frac{1}{2}\bar{y}, \end{cases}$

则 $$T_2\cdot T_1:\begin{cases} x'=\frac{1}{2}(x+1)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y-3), \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)+\frac{1}{2}(y-3), \end{cases}$$

即 $$T_2\cdot T_1:\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1+3\sqrt{3}}{2}, \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}-3}{2}. \end{cases}$$

例 8 求例 7 中,T_2 与 T_1 之积 $T_1\cdot T_2$.

解 设 $T_2:\begin{cases} \bar{x}=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y, \\ \bar{y}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y, \end{cases} \qquad T_1:\begin{cases} x'=\bar{x}+1, \\ y'=\bar{y}-3, \end{cases}$

则 $$T_1\cdot T_2:\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+1, \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-3. \end{cases}$$

从例 8 和例 7 不难看出,两个变换的乘积与它们的顺序有关,即 $T_2\cdot T_1\neq T_1\cdot T_2$. 这就是说,变换的乘法不满足交换律. 但有以下定理

定理 1.1 变换的乘法满足结合律.

证明 设 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 是集合 S 的三个变换，需要证明

$$\varphi_3\cdot(\varphi_2\cdot\varphi_1)=(\varphi_3\cdot\varphi_2)\cdot\varphi_1. \tag{1.8}$$

对于 S 中的任何元素 x，由(1.7)有

$$[\varphi_3\cdot(\varphi_2\cdot\varphi_1)](x)=\varphi_3[(\varphi_2\cdot\varphi_1)(x)]$$
$$=\varphi_3[\varphi_2(\varphi_1(x))]$$
$$[(\varphi_3\cdot\varphi_2)\cdot\varphi_1](x)=(\varphi_3\cdot\varphi_2)[\varphi_1(x)]$$
$$=\varphi_3[\varphi_2(\varphi_1(x))],$$

所以

$$\varphi_3\cdot(\varphi_2\cdot\varphi_1)=(\varphi_3\cdot\varphi_2)\cdot\varphi_1.$$

1.3 恒等变换与逆变换

定义 1.5 设有集合 S，使得 S 的任何元素都不变的变换叫做 S 的**恒等变换**，恒等变换记为 ε，对于 S 中的任何元素 a，有

$$\varepsilon(a)=a, \tag{1.9}$$

又对于任何变换 φ，有

$$\varepsilon\cdot\varphi=\varphi\cdot\varepsilon=\varphi. \tag{1.10}$$

ε 的代数表示式为

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=y. \end{cases}$$

定义 1.6 设有集合 S 的一个一一变换 $\varphi: a\to a'$，S 的另一个变换 $\varphi^{-1}: a'\to a$ 叫做 φ 的**逆变换**.

由这个定义可知，φ 也是 φ^{-1} 的逆变换. 因为

$$(\varphi^{-1}\cdot\varphi)(a)=\varphi^{-1}[\varphi(a)]=\varphi^{-1}(a')=a=\varepsilon(a),$$
$$(\varphi\cdot\varphi^{-1})(a')=\varphi[\varphi^{-1}(a')]=\varphi(a)=a'=\varepsilon(a'),$$

所以

$$\varphi^{-1}\cdot\varphi=\varepsilon=\varphi\cdot\varphi^{-1}. \tag{1.11}$$