物理学中的数学方法

〔美〕李政道 著

吴 顺 唐 译

江苏科学技术出版社

Ли Цзун-дао

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
В ФИЗИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
1965

物理学中的数学方法

〔美〕李政道 著
吴 顺 唐 译

江苏科学技术出版社出版
江苏省新华书店发行
南通韬奋印刷厂印刷
1980年6月第1版
1980年6月第1次印刷
印数 1—27,500册
书号：13196·030 定价：1.07元

译　序

《物理学中的数学方法》一书是著名物理学家李政道教授在美国哥伦比亚大学讲学的讲稿。其内容包括矢量分析，线性代数初步，正交函数展开，希尔伯特空间和在此空间中的算子理论，变分法，复变函数论的若干方法以及微分方程理论等。这些内容，对每一个物理学工作者来说，都是必须掌握的。在本书中，作者用理论物理学的观点，对这些数学理论和数学方法作了系统的、深入浅出的讲解，而且在各章中还介绍了许多重要的应用实例。因此，这是一本专门为物理学工作者写的有关数学方面的难得的好书，而这一点也正是本书的独特之处。

本书根据一九六五年版俄译本译出。本书的英文原版是由作者的学生们根据听课笔记整理而成的，未经作者本人校阅。俄译本在出版时，对原文作了少量更动，并加了一些附注。这些附注，我们选取了其中的一部分，又另外补充了几条。在俄译本中有一些刊误，我们已作了必要的更正。但由于译者水平有限，译文中一定还存在不少缺点或错误，敬请读者批评指正。

本书译稿承北京工业学院范天佑同志和六机部第724研究所施玉泉同志校订。在出版过程中又得到江苏科技出版社和镇江市科技局一些同志的大力帮助，译者谨向他们表示衷心感谢。

译　者

1979年7月于镇江

目　录

第一章　矢量与张量分析

§1　矢量代数 ……………………………………………… 1
§2　张量代数 ……………………………………………… 15
§3　二阶张量的几何表示法 ………………………………… 21
§4　张量场 ………………………………………………… 24
§5　高斯-奥斯特洛格拉德斯基定理及其应用 ……………… 29
§6　斯托克斯定理及其应用 ………………………………… 41
§7　亥姆霍兹定理．麦克斯韦方程 ………………………… 46
§8　曲线坐标系中的基本微分运算 ………………………… 55

第二章　n 维空间中的线性代数

§1　线性空间 ……………………………………………… 61
§2　矩阵及其运算 ………………………………………… 65
§3　线性算子 ……………………………………………… 77
§4　坐标变换 ……………………………………………… 82
§5　数量积和正交性 ……………………………………… 87
§6　酉变换与正交变换 …………………………………… 92
§7　狭义相对论 …………………………………………… 96
§8　埃尔米特算子 ………………………………………… 102

第三章　按正交函数系展开

§1　希尔伯特空间 ………………………………………… 107
§2　函数系的完备性 ……………………………………… 109
§3　完备正交系的例子．富里埃级数 ……………………… 119
§4　富里埃积分 …………………………………………… 129
§5　埃尔米特算子 ………………………………………… 135
§6　勒让德多项式 ………………………………………… 141
§7　多极展开式 …………………………………………… 148
§8　球谐函数 ……………………………………………… 154

§9 坐标轴旋转时球谐函数的变换 …………………… 166
§10 球谐函数与张量之间的类比 …………………… 168
§11 球谐函数的性质．续 …………………… 171
§12 动量矩算子分量的排列关系 …………………… 173
§13 球谐函数与勒让德多项式之间的联系 …………………… 178
§14 加法定理 …………………… 180
§15 球谐函数的应用 …………………… 186
第四章 变分原理与极值定理
§1 泛函变分与泛函导数 …………………… 188
§2 泛函λ(φ)的极值性质 …………………… 192
§3 极值定理 …………………… 197
§4 正算子 …………………… 202
第五章 格林函数方法
§1 方程例子．格林函数的定义 …………………… 206
§2 线性算子．线性算子性质的矩阵表示 …………………… 211
§3 扩散方程的格林函数 …………………… 220
§4 波动方程的格林函数 …………………… 225
§5 泊松方程 …………………… 230
§6 非齐次波动方程 …………………… 233
第六章 复变函数论方法
§1 解析函数．柯西定理 …………………… 242
§2 泰勒和罗朗级数．解析开拓 …………………… 249
§3 奇点分类 …………………… 252
§4 多值函数．流体力学中的例子 …………………… 255
§5 留数定理及其应用 …………………… 262
§6 随机游动问题与鞍点法 …………………… 268
第七章 线性微分方程
§1 在正常点附近方程的解 …………………… 280
§2 在正则奇点附近方程的解 …………………… 288
§3 贝塞耳方程 …………………… 296

第一章　矢量与张量分析

§1　矢量代数

设(x_1, x_2, x_3)为三维空间中的点 P 在右旋笛卡尔坐标系中的坐标(图1)。这些坐标唯一地确定了点P在空间中的位置：

$P:(x_1,\ x_2,\ x_3)$。

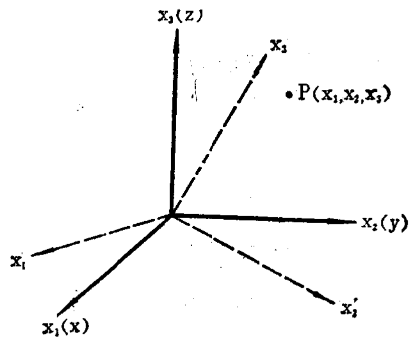

图1。

设$(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$为同一个点在另一个右旋笛卡尔坐标系中的坐标。则该点在两个不同的坐标系中的坐标由下式联系：

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3,\\
x'_2 &= u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3,\\
x'_3 &= u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

式(1.1)可更紧凑地写成：

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} u_{ij} x_j \qquad (i=1,2,3).$$

显然，此时数 u_{ij} 需服从下面的关系式：

$$\sum_{i=1}^{3} u_{ij} u_{ik} = \sum_{i=1}^{3} u_{ji} u_{ki} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & 若\ j=k, \\ 0 & 若\ j \neq k. \end{cases} \qquad (1.1a)$$

〔δ_{jk} 称为克罗内克(Kronecker)符号〕

于是，

$$u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{31}^2 = 1,$$

$$u_{11}u_{12} + u_{21}u_{22} + u_{31}u_{32} = 0,$$

等等。

由三个数组成的有序集合(A_1，A_2，A_3)，在轴的旋转下能作象上述的点P的坐标(x_1，x_2，x_3)一样的变换，即

$$(A_1,\ A_2,\ A_3) \longrightarrow (A'_1,\ A'_2,\ A'_3),$$

则(A_1，A_2，A_3)就叫做三维矢量，这里

$$A'_i = \sum_{j=1}^{3} u_{ij} A_j \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \qquad (1.2)$$

而 u_{ij} 为(x_1，x_2，x_3)变到(x'_1，x'_2，x'_3)时由(1.1)所确定的系数。

今考虑几个矢量的例子。空间中的点P(x_1，x_2，x_3)可与具有同样坐标的矢量 $\boldsymbol{r}$ 相对应，这个矢量常称为P点的径矢。如果矢量 $\boldsymbol{r}$ 依赖于某个变量 t，则我们可构成(dx_1/dt，dx_2/dt，dx_3/dt)，容易验证，它也是矢量。这个矢量常记为 $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ 。类似地，可构造矢量 $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$ 。一般地，如有某个坐标依赖于参数的矢量，则通过对原先的矢量按坐标微商可构造一新的矢量。用这种方法得到的矢量，就称为

所给矢量的导数。

两个矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，只要在同一个坐标系中的对应坐标完全相同，就认为是相等的。显然，如果两个矢量在某一个坐标系中的坐标完全相同，那么它们在另外任意一个系中也完全相同。

矢量

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_1+B_1,\ A_2+B_2,\ A_3+B_3)$$

称为两矢量$\boldsymbol{A}=(A_1, A_2, A_3)$和$\boldsymbol{B}=(B_1, B_2, B_3)$的和。容易检验，用这种方法得到的量确是一矢量，且

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}.$$

例 1 矢量相等的几何解释。 设$\boldsymbol{A}$为某个矢量，而$\boldsymbol{r}_P$，$\boldsymbol{r}_Q$分别为点P和Q的径矢。选取这样一些点，使得

$$A_1=x_{1P}-x_{1Q},\ A_2=x_{2P}-x_{2Q},\ A_3=x_{3P}-x_{3Q},$$

于是$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}_{PQ}$(图3)。由此，任一矢量都可对应于某个线段；换句话说，所有矢量在空间中都有方向和大小这种特性。

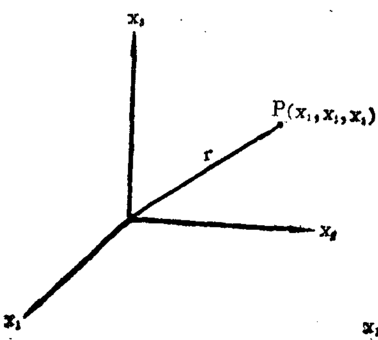

图2。

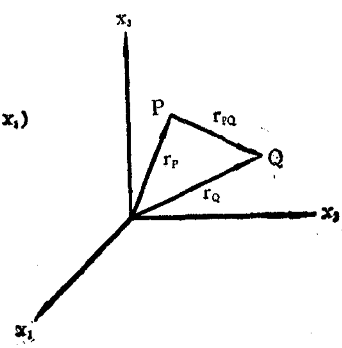

图3。

数

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\sum_{i=1}^{3}A_iB_i$$

称为两矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的数量积$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$。数量积是关于坐标系旋转的不变量。事实上，利用公式(1.1)得

$$\sum_{i=1}^{3}A'_iB'_i=\sum_{i,j,k}u_{ij}A_ju_{ik}B_k=\sum_{j,k}\left(\sum_{i=1}^{3}u_{ij}u_{ik}\right)A_jB_k=$$

$$=\sum_{j,k}\delta_{jk}A_jB_k=\sum_{j=1}^{3}A_jB_j.$$

在坐标系作转动时不变的量，叫做标量。于是$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$是标量。显然，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{3}A_i^2$。数$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})^{\frac{1}{2}}$称为矢量$\boldsymbol{A}$的模(或长度)，并记之为$|\boldsymbol{A}|$。特别是，如果$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}$，则

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

今选取坐标系，使得轴x_1顺着矢量$\boldsymbol{A}$的方向，而矢量$\boldsymbol{B}$则在平面x_1x_2内(图4)，于是

$$\boldsymbol{A}=(A,\ 0,\ 0),$$
$$\boldsymbol{B}=(B\cos\theta,\ B\sin\theta,\ 0),$$
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta,$$

这里θ是矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$之间的夹角。因$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$是标量，故这个等式在任意坐标系中都仍适合。特别地，如果$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，且$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都不为零，则矢量$A$和$B$垂直。

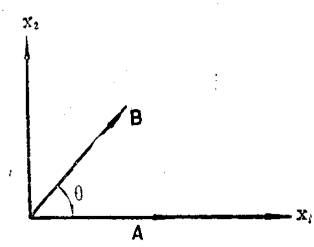

图4.

例 2 能量守恒。 由牛顿第二定律

$$F = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \tag{1.3}$$

这里 m 为物体质量，$\boldsymbol{F}$ 为作用于该物体上的力，$\boldsymbol{v}$ 为速度。在等式(1.3)两边点乘 $\boldsymbol{v}$，则得

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} m\frac{dv_i}{dt}v_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} m\frac{d}{dt}\left(\frac{v_i^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right),$$

即

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

这里 v 为矢量 $\boldsymbol{v}$ 的模。特别，如果 $\boldsymbol{F}=0$，则

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0, \quad 即 \quad \frac{mv^2}{2} = \text{const}.$$

这是能量守恒定律的一种形式。

定理 1.1 假定有一个法则，使在每一坐标系中都能给出三个数（A_1，A_2，A_3），如果此法则对所有矢量 $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$，都能使量 $\sum_{i=1}^{3} A_iB_i$ 为标量，则量 $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ 为矢量。

证明 在坐标系转动下，矢量 $\boldsymbol{B}$ 的坐标按公式(1.2)变成：

$$B'_i = \sum_{j=1}^{3} u_{ij}B_j \quad (i=1, 2, 3).$$

设在转动时，(A_1, A_2, A_3)变成(A'_1, A'_2, A'_3).

我们需证

$$A'_i=\sum_{j=1}^{3}u_{ij}A_j \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

但由假设

$$\sum_{i=1}^{3}A'_iB'_i=\sum_{i=1}^{3}A_iB_i,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{3}A_iB_i=\sum_{i=1}^{3}A'_i\sum_{j=1}^{3}u_{ij}B_j=\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}u_{ij}A'_i\right)B_j.$$

因矢量$\boldsymbol{B}$是任意给定的，故

$$A_j=\sum_{k=1}^{3}u_{kj}A'_k \quad (j=1,\ 2,\ 3). \tag{1.4}$$

将(1.4)乘以u_{ij}，且对j求和，考虑到(1.2)，就得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}u_{ij}A_j&=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}u_{ij}u_{kj}A'_k=\\&=\sum_{k=1}^{3}A'_k\sum_{j=1}^{3}u_{ij}u_{kj}=\\&=\sum_{k=1}^{3}\delta_{ik}A'_k=A'_i \quad (i=1,\ 2,\ 3),\end{aligned}$$

这就是所要证明的。

现考虑某个直角坐标系。设$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ 为此坐标系中的三个单位矢量。则

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$
$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

这些关系显示了单位矢量之间是相互垂直的。在这个坐标系中，矢量$\boldsymbol{A}=(A_1,\ A_2,\ A_3)$可表示为

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}. \tag{1.5}$$

将坐标轴旋转。原坐标系中的单位矢量在新坐标系中的坐标为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{i}:(u_{11},\ u_{21},\ u_{31}),\\
&\boldsymbol{j}:(u_{12},\ u_{22},\ u_{32}),\\
&\boldsymbol{k}:(u_{13},\ u_{23},\ u_{33}).
\end{aligned}$$

假定 $\boldsymbol{i}'=(1,\ 0,\ 0)$, $\boldsymbol{j}'=(0,\ 1,\ 0)$, $\boldsymbol{k}'=(0,0,1)$ 是新坐标系(x'_1, x'_2, x'_3)中的单位矢量。则由(1.2)和(1.5)式

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}&=u_{11}\boldsymbol{i}'+u_{21}\boldsymbol{j}'+u_{31}\boldsymbol{k}',\\
\boldsymbol{j}&=u_{12}\boldsymbol{i}'+u_{22}\boldsymbol{j}'+u_{32}\boldsymbol{k}',\\
\boldsymbol{k}&=u_{13}\boldsymbol{i}'+u_{23}\boldsymbol{j}'+u_{33}\boldsymbol{k}'.
\end{aligned}\tag{1.6}$$

显然 $\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i}'=1$, $\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j}'=0$ 等等。因此

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=u_{11}^2+u_{21}^2+u_{31}^2=1,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=u_{11}u_{12}+u_{21}u_{22}+u_{31}u_{32}=0.$$

我们又得到了(1.1),并顺便说明了它们的起源。注意,由前面的结论从(1.4)式可推出, 新坐标系中的单位矢量可用下面的方式由原坐标系中的单位矢量表出:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}'&=u_{11}\boldsymbol{i}+u_{12}\boldsymbol{j}+u_{13}\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{j}'&=u_{21}\boldsymbol{i}+u_{22}\boldsymbol{j}+u_{23}\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{k}'&=u_{31}\boldsymbol{i}+u_{32}\boldsymbol{j}+u_{33}\boldsymbol{k}.
\end{aligned}\tag{1.7}$$

有两个矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$, 若置

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_2B_3-A_3B_2,\ A_3B_1-A_1B_3,\ A_1B_2-A_2B_1),$$

则可构造第三个矢量。下面将验证,$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 确是矢量。为

此，利用定理 1.1 。即要证明，对所有矢量$\boldsymbol{C}$，$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$是标量。容易验证，

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

位于(1.8)式右边的行列式，等于由矢量$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{C}$所构成的平行六面体的体积。显然，体积关于旋转是不变的。而这对任一矢量$\boldsymbol{C}$都是正确的，故由定理(1.1)知，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 确实是矢量。这个矢量称为矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的矢量积。

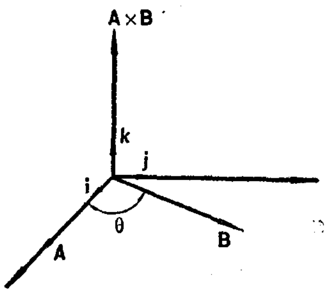

图5.

现在来确定矢量$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$的方向和大小。为此目的，我们选取坐标轴，使得矢量$\boldsymbol{A}$顺着$\boldsymbol{i}$的方向，而矢量$\boldsymbol{B}$位于$ij$平面内(图 5)。于是在此坐标系内

$$\boldsymbol{A}=(A,0,0),$$
$$\boldsymbol{B}=(B\cos\theta,\ B\sin\theta,0),$$
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(0,0,|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta),$$
$$\theta=\measuredangle(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\text{和}\boldsymbol{B}\text{之间的夹角。}$$

因此

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}||\sin\theta|,$$

矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$与矢量$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$垂直。矢量$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$构成右旋三矢量。易知，如果矢量$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$平行，则$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$；而

在一般情形，矢量 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的大小等于由矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所构成的平行四边形的面积。特别地，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0$ 等等，以及

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}.$$

例 3 有心力场内的动量矩守恒定律。 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 为动点的径矢。如用 $\boldsymbol{F}$ 表示作用力，则由牛顿第二定律，$\boldsymbol{F}=m\ddot{\boldsymbol{r}}$（在矢量上面的点，今后都表示对时间 t 的微商）。

如果矢量 $\boldsymbol{r}$ 和力 $\boldsymbol{F}$ 在任一时刻 t 都互相平行，则力 $\boldsymbol{F}$ 称为有心力。重力，点电荷场内的静电力等都可以作为有心力的例子。要证明的是，在有心力的情形，矢量 $\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$（$\boldsymbol{P}$ 为动量，m 为物体的质量，$\boldsymbol{v}$ 为物体的速度）常位于某个固定的平面内。今证明这个结论。

动点的径矢与其动量的矢量积叫做动量矩：

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}. \tag{1.9}$$

(1.9)两边对 t 微商，得

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}}.$$

因动量矢与速度矢平行，故

$$\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{p}=0.$$

而由牛顿第二定律，$\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{F}$；再由有心力的定义，便推得

$$\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{p}}=0.$$

因此，

$$\dot{\boldsymbol{L}}=0 \quad 或 \quad \boldsymbol{L}=\text{const}.$$

即在有心力的情形，动量矩是运动的积分（大小和方向守恒）。由(1.9)可看出，$\boldsymbol{p}$ 总位于与 $\boldsymbol{L}$ 垂直，在空间中位置固定的

平面内。这就证明了我们的结论。

例 4 无限小角度转动。考虑绕 z 轴旋转。设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 为质点在时刻 t 的径矢，δt 为无限小时间间隔。在 δt 时间内，质点的径矢绕 z 轴转过了小角度 $\delta\varphi$。因 $\delta\varphi\ll 1$，故下列关系式成立：

$$\cos\delta\varphi\approx 1-\frac{(\delta\varphi)^2}{2},\quad \sin\delta\varphi\approx\delta\varphi-\frac{(\delta\varphi)^3}{3!}. \tag{1.10}$$

利用(1.10)，可求出质点在转过 $\delta\varphi$ 角后（时间 δt 后）的坐标：

$$\begin{aligned}&z(\delta t)=z(0),\\&x(\delta t)=x(0)-y(0)\delta\varphi+O(\delta\varphi^2),\\&y(\delta t)=x(0)\delta\varphi+y(0)+O(\delta\varphi^2).\end{aligned} \tag{1.11}$$

这里$O(\delta\varphi^2)$是$(\delta\varphi)^2$的同级无穷小量。另一方面，当 $\delta t\to 0$ 时，在原点邻域内将 $x(t)$ 和 $y(t)$ 展开成泰勒(Taylor)级数，并限取前二项，则有

$$\begin{aligned}&x(\delta t)=x(0)+\dot{x}\delta t,\\&y(\delta t)=y(0)+\dot{y}\delta t.\end{aligned} \tag{1.12}$$

比较(1.11)和(1.12)，就得

$$\dot{x}(t)=-\left(\frac{\delta\varphi}{\delta t}\right)y,$$

$$\dot{y}(t)=\left(\frac{\delta\varphi}{\delta t}\right)x,$$

$$\dot{z}(t)=0.$$

今用 ω 记方向平行于旋转轴，大小等于$\frac{\delta\varphi}{\delta t}$的矢量。在我

们的情形，

$$\omega=\left(0,\ 0,\ \frac{\delta\varphi}{\delta t}\right)$$

因此

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}. \qquad (1.13)$$

在(1.13)中所有的量都是矢量。因此，我们可以断言，这个等式在任一坐标系中都是正确的。

在ω为常量的情形，加速度$\boldsymbol{a}$可用下式计算①：

$$\boldsymbol{a}\equiv\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{d}{dt}(\omega\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}$$

$$=\boldsymbol{\omega}\times(\omega\times\boldsymbol{r});$$

如果矢量ω与矢量$\boldsymbol{r}$垂直，则

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{\omega}|^2|\boldsymbol{r}|,$$

且$\boldsymbol{a}$与矢量$\boldsymbol{r}$方向相反。而

$$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|,$$

所以

$$\boldsymbol{a}=-|\boldsymbol{\omega}|^2\boldsymbol{r}=-\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{|\boldsymbol{r}|^2}\boldsymbol{r}.$$

现研究空间质点沿某个轨道运动的一般情形。假定

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|},$$

则$\boldsymbol{\tau}$为与质点轨道相切的单位矢量(图 6)。将上式对t微分，得

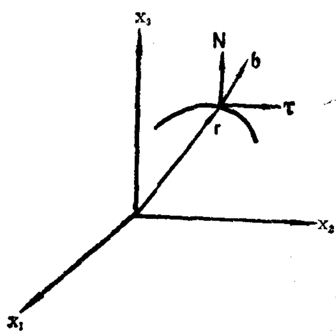

图6.

①记号≡表示对应的量在定义意义上相等。

$$\boldsymbol{a} \equiv \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{d|\boldsymbol{v}|}{dt}\boldsymbol{\tau} + |\boldsymbol{v}|\dot{\boldsymbol{\tau}}.$$

但由等式 $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}=1$ 推出

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\dot{\boldsymbol{\tau}}=0,$$

即矢量$\boldsymbol{\tau}$与$\dot{\boldsymbol{\tau}}$垂直。这样一来，加速度$\boldsymbol{a}$可分解为切向加速度和与它相垂直的法向加速度。引进单位矢量

$$\boldsymbol{N} = \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}}{|\dot{\boldsymbol{\tau}}|}, \tag{1.14}$$

它与$\boldsymbol{\tau}$垂直。并称它为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$的法矢量。如果$S$为曲线从任一固定点量起的弧长，则下面等式成立：

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{S}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = |\boldsymbol{v}|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dS}, \quad (\dot{S}=|\boldsymbol{v}|) \tag{1.15}$$

由此

$$\boldsymbol{N} = \frac{\dot{\boldsymbol{\tau}}}{|\boldsymbol{v}|\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dS}\right|},$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{N}|\boldsymbol{v}|^2\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dS}\right| + \boldsymbol{\tau}|\dot{\boldsymbol{v}}|.$$

量

$$R \equiv \frac{1}{\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dS}\right|}$$

称为曲线的曲率半径。$R=\infty$（即$d\boldsymbol{\tau}/dS=0$）时的点称为曲线的拐点。

现在我们能写

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{N}\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{R} + \boldsymbol{\tau}|\dot{\boldsymbol{v}}|.$$