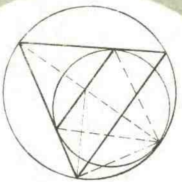
数学



# GUOJISHUXUEJINGSAISHITIJIANGJIE

# 国际数学竞赛试题讲解

## I

湖北人民出版社

# 国际数学竞赛试题讲解

## I

江 仁 俊



湖 北 人 民 出 版 社

国际数学竞赛试题讲解

（Ⅰ）

江仁俊

·

湖北人民出版社出版　湖北省新华书店发行

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　4印张　83,000字

1979年6月第1版　1979年6月第1次印刷

印数：1—150,000

统一书号：7106·1504　定价：0.30元

# 出版说明

为满足广大中学生学习数学和中学数学教师教学的需要，我们邀请湖北省暨武汉市数学学会组织编写了这套中学数学:《代数》，《几何》，《三角与解析几何》和《国际数学竞赛试题讲解》.

希望这套书和广大读者见面以后，能听到来自读者的热情的批评和建议，以便我们进一步修订，使其日臻完善.

一九七九年三月

# 目　录

# 前　言

1978 年第二十届国际中学生数学竞赛试题公布以后，引起了广大师生和数学爱好者的广泛兴趣．本书是十九、二十两届试题的分析和解答，曾先后在武汉、黄石等地作过多次讲解，并在 1978 年湖北省暨武汉市数学年会上作过专题介绍．

第十九届竞赛于 1977 年 7 月在南斯拉夫的贝尔格莱德举行，试题共六道，以点记分，卷面满分为 40 点；第二十届竞赛在罗马尼亚的布加勒斯特举行，试题也是六道，满分 40 分．参加国以欧、美居多，亚、非、拉国家较少．竞赛试题由各参加国的代表团事先提出，然后共同协商选定．选手赛毕，成绩先由本队领队和东道国协调员（每道题两名）评定．发生分歧时，交全体协调员会议最后评定．据报道，欧、美各国对此项比赛都较重视，选手经过严格挑选，例如英国选手通过全国竞赛和不列颠数学奥林匹克选拔；有的国家则把中学生的尖子利用周末和假期集中训练；有的则举办专门的数学学校拔尖培养．青少年选手们除进行数学比赛外，还参加东道国主办的各种参观、游览以及棋类比赛等益智活动．

试题总的看来，知识面较宽，难度较大，综合性较强，技巧性较高，灵活、新颖而且具有一定的趣味性．二十届比十九届难，特别是二十届的第三题，不是我们现在的中学生

都能独立完整解出的．这些试题，从一个侧面反映出欧美中、小学数学教学的近况．个别试题比较容易，如十九届第一题的平面几何试题和第四题的三角试题、二十届第四题的平面几何试题等；多数试题对数学基础知识的要求较高，如涉及集合与映射概念、方程论和初等数论等；有的试题有些中学生平时很少见过，甚至一下子还不能弄清题意．尽管试题偏难，但利用我国中学生熟悉的数学知识来解，多数题仍能解出，而且还可借以提高分析推理、空间想象、抽象思维以及灵活运用所学知识的能力．为了适应中学的实际情况，我们一般从分析入手，根据中学课程内容列出多种解答，并加附注．这样，不仅使各题得出了正确解答，也许还能使读者具体窥视国际数学竞赛的水平，掌握解题的思路，总结某些带规律性的方法和技巧，补充中学尚未学过的部分知识，如“集合”、“映射”和“抽屉原则”等．

在武汉市教育局、湖北省暨武汉市数学学会和武汉市教师进修学院等单位领导和支持下，武汉市在1978年先后举办了中学数学竞赛．附录是武汉市1978年中学数学竞赛试题分析与解答。

这次数学竞赛的命题，既遵照《一九七八年全国高等学校招生考试复习大纲》规定的范围，又照顾到几年来我市学生的实际水平，初赛以基础知识为主，决赛则稍侧重于分析、综合能力和解题的技巧．无论初赛或决赛，重点都在基础理论和基本训练．

由于个人水平有限，时间仓促，加之这种不同于单一题解的写法少有先例，书中定有不妥和错误之处，请读者批评指正。

# 第十九届国际中学生
# 数学竞赛试题分析与解答

**【第一题】** 由正方形 $ABCD$ 分别向外（或向内）侧作等边三角形 $ABK, BCL, CDM, DAN$. 证明四线段 $KL$, $LM$, $MN$, $NK$ 的中点及八线段 $AK$, $BK$, $BL$, $CL$, $CM$, $DM$, $DN$, $AN$ 的中点是一个正十二边形的顶点.（6 点）

**【分析】** 这道题很简单，要证的十二边形显然是个凸多边形，既可用纯几何法解决，也可用解析法证明.

要证一个多边形是正十二边形，只需证明各边都相等，每个内角都是 $150°$ 即可.

边相等是显然的，因为每边都分别是相应的三角形的中位线，而这些三角形的第三边边长都等于原正方形边长．又根据平行线的性质，等边三角形内角、直角等的度数，也不难算出内角是 $150°$（图 1）.

用解析法证明时，可取如图 2 所示的坐标系．根据正方形的边长和它的对称性，立即得到 $A$、$B$、$C$、$D$ 的坐标以及 $M$, $N$, $K$, $L$ 的坐标，由此推得各中点的坐标．再进一步计算原点到中点的距离，便知各中点同在以原点为圆心的圆上；又通过距离公式可证圆内接十二边形的各边长相等.

**【证法一】** 如图 1 所示，设 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 分别是 $DN$、$AN$、$NK$ 的中点.

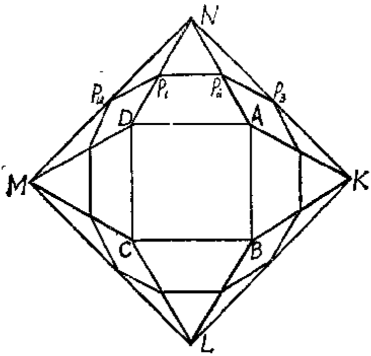



图 1

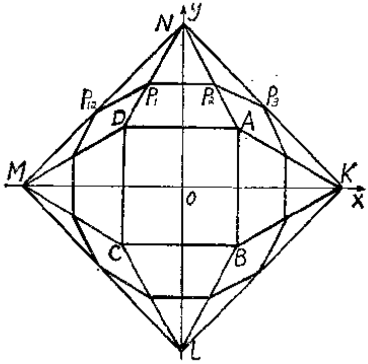



图 2

$$\because \quad P_2P_3 \underline{\perp} \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DA,$$

$$又 \quad P_1P_2 \underline{\perp} \frac{1}{2}DA,$$

$$\therefore \quad P_1P_2 = P_2P_3.$$

同理可证，十二边形 $P_1P_2\cdots P_{12}$ 的其它各边之长也都等于原正方形边长的一半。

由于 $\angle P_1P_2P_3$ 与 $\angle DAK$ 的两边分别平行且方向相同，因此，

$\angle P_1P_2P_3 = \angle DAK = \angle DAB + \angle BAK = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$

同理可证，十二边形的其它各内角也都等于 $150^\circ$.

综上所述，命题得证.

【证法二】 取如图 2 的平面直角坐标系. 设正方形 $ABCD$ 的边长为 2， 根据正方形关于 $x$ 轴、$y$ 轴对称，易知以下各点坐标：

$$A(1,1), \quad B(1,-1), \quad C(-1,-1), \quad D(-1,1);$$

$$K(1+\sqrt{3},0), \quad L(0,-1-\sqrt{3}),$$

$$M(-1-\sqrt{3},0), \quad N(0,1+\sqrt{3}).$$

由中点坐标公式分别求出中点 $P_1, P_2, P_3$ 的坐标：

$$P_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right), \quad P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$P_3\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

又据两点间距离公式得：

$$|P_1P_2| = \sqrt{1^2+0^2} = 1,$$

$$|P_2P_3| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1;$$

$$|OP_1|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$|OP_2|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$|OP_3|=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2\cdot\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

因此，十二边形的诸顶点都在以原点 $O$ 为圆心，以 $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 为半径的圆上，并且各边之长皆为 1，所以该多边形是正十二边形.

**【附注】** 1 这题的证明虽然简单，但图形对称优美，能引起学生学习的兴趣；同时，它涉及到平面几何中直线形的基础知识，以及解析几何的基础知识，因而不失为学生练习的好题.

2 如果是由正方形 $ABCD$ 分别向内侧作等边三角形，同样可证结论的正确性，不过所画图形的线条拥挤一些罢了.

**【第二题】** 在一个有限项的实数数列中，任意接连七项之和为负数，任意接连十一项之和为正数，求这样的数列的最大项数.（6 点）

**【分析】** 显然，这样的数列至少有 11 项，否则“十一项之和”即无意义. 但是，项数也不是多得可为大于 11 的任意自然数，因为题目给定是有限的. 我们用 $S_i$ 表示数列中

任意接连 $i$ 项之和，当项数足够多时，根据题设条件，$S_7$ 可看成 $S_{11}-S_4$. 因 $S_7<0$，即 $S_{11}-S_4<0$，而 $S_{11}>0$，故必有 $S_4>0$. 同理：$S_4$ 可看或 $S_7-S_3>0$，因而 $S_3<0$；$S_3$ 可看成 $S_4-S_1<0$，因而 $S_1>0$.

也就是说，数列中任意一项都是正数. 这与已知条件"任意接连七项之和为负数"矛盾.

到底最大项数可能是多少呢？我们可以从项数为 11 开始，逐个验证观察：比如，当项数为 11 时，根据条件，第 1 至第 11 项和为正，前 7 项和与后 7 项和又为负，可见后 4 项和与前 4 项和必均为正；同理，当项数为 12 时，可推得 2—5 项和与 9—12 项和均为正；依此类推，当项数为 16 时，可推得 6—9 项和与 13—16 项和均为正；当项数为 17 时，可推得 7—10 项和与 14—17 项和均为正. 这就是说，当项数为 17 时，下列连续四项之和：

1—4，2—5，3—6，4—7，5—8，6—9，7—10，
8—11，9—12，10—13，11—14，12—15，13—16，14—17

均为正. 和前面的算法一样，一定导致矛盾，故项数不可能为 17.

项数不能等于 17，能否大于 17（比如项数是 18，19，…）？回答也是否定的. 因为只要项数超过 16，上述的分析推证都成立.

事实上：若项数 $n>17$，则对任意的接连四项来说，必在其后或者其前还有接连的七项，从而有接连的十一项. 因此，对此十一项仍必有：

$$S_4>0,\quad S_3<0,\quad S_1>0.$$

这就是说，数列中任意一项都是正数，与已知条件"任意接连

七项之和为负数”矛盾.

符合题设条件的数列的项数不能超过16这一事实，已在上述分析中得到了证明，因而下面进一步用不同的方法证明项数不能超过16，并举出项数为16的数列实例.

**【解法一】** 先将题设条件用不等式表示出来，通过不等式之间的加减变换，证明项数不能超过16；然后利用解不等式组的办法举出满足题设条件的数列实例.

设有 $n$ 项的实数数列：

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{17},\ \cdots,\ a_n,$$

由已知条件对任一正整数 $k$ 可得：

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+6} < 0, \tag{1}$$

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+6} + a_{k+7} + \cdots + a_{k+10} > 0. \tag{2}$$

(2)－(1)：

$$a_{k+7} + a_{k+8} + a_{k+9} + a_{k+10} > 0. \tag{3}$$

这就是说，从第11项起，任意接连四项之和都是正数.于是我们得到：

$$a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} > 0, \tag{4}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0. \tag{5}$$

(4)＋(5)：

$$a_8 + a_9 + a_{10} + 2a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} > 0. \tag{6}$$

由(1)得：

$$a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} < 0. \tag{7}$$

(6)－(7)：

$$a_{11} > 0.$$

同理可得：

$$a_{12} > 0, \quad a_{13} > 0,$$

所以 $$a_{11}+a_{12}+a_{13}>0. \tag{8}$$

当 $n \geqslant 17$ 时，比如取 $n=17$(对于 $n=18$, 19, …, 以下推证仍成立)，在(1) 中，令 $k=11$ 得：

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{17}<0; \tag{9}$$

在(3) 中，令 $k=7$ 得：

$$a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}>0. \tag{10}$$

(9) − (8)：

$$a_{14}+a_{15}+a_{16}+a_{17}<0. \tag{11}$$

显然，(11)与(10)矛盾．因此，项数 $n \geqslant 17$ 不可能．

另一方面，当 $n=16$ 时，满足题设条件的数列是确实存在的，例如：

$$1, 1, -2.6, 1, 1, 1, -2.6, 1, 1, -2.6, 1, 1, 1, -2.6, 1, 1. \tag{12}$$

这个数列是这样构造出来的：考虑到数列中 $s_7<0, s_{11}>0$ 是当然的；但一下子考虑到很多项时，不好写出数列的开始几项，为此开始写时还要考虑到 $s_3<0, s_4>0$；此外，数列中既有正实数项，也有负实数项，为方便起见，不妨设正实数项都为 1，负实数项为 $-x$．于是得到：

$$1, 1, -x, 1, 1, 1, -x, 1, 1, -x, 1, 1, 1, -x, 1, 1,$$

其中 $x$ 同时满足：

$$2-x<0, \quad 3-x>0, \quad 5-2x<0, \quad 8-3x>0.$$

解此不等式组得：$2.5=\frac{5}{2}<x<\frac{8}{3}=2.\dot{6}$．取 $x=2.6$，即得上述数列(12)．

如设正数项为 $a$，负数项为 $-x$，则 $\frac{5}{2}a<x<\frac{8}{3}a$．当 $a=6$ 时，$15<x<16$，取 $x=15.5$，可得满足题设条件的如下数

列：

$$6, 6, -15.5, 6, 6, 6, -15.5, 6, 6, -15.5, 6, 6, 6,$$
$$-15.5, 6, 6.$$

由此可见，满足题设条件的数列是无限多的，其最大项数皆为 16.

**【解法二】** 先把 $a_1, a_2, \cdots, a_{17}$ 排成如下的数表：

$$\begin{array}{llllll}
a_1, & a_2, & \cdots, & a_7, & a_8, & \cdots, & a_{11}; \\
a_2, & a_3, & \cdots, & a_8, & a_9, & \cdots, & a_{12}; \\
a_3, & a_4, & \cdots, & a_9, & a_{10}, & \cdots, & a_{13}; \\
a_4, & a_5, & \cdots, & a_{10}, & a_{11}, & \cdots, & a_{14}; \\
a_5, & a_6, & \cdots, & a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{15}; \\
a_6, & a_7, & \cdots, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots, & a_{16}; \\
a_7, & a_8, & \cdots, & a_{13}, & a_{14}, & \cdots, & a_{17}.
\end{array}$$

表中有 7 行、11 列，共有数的个数为 $7\times11=77$. 现将这 77 个数的总和记为 $S$，易知，无论按行加或按列加，和 $S$ 不变.

若按行求和，则

$$S=\sum_{i=1}^{11}a_i+\sum_{i=2}^{12}a_i+\cdots+\sum_{i=7}^{17}a_i>0; \qquad (1)$$

若按列求和，则

$$S=\sum_{i=1}^{7}a_i+\sum_{i=2}^{8}a_i+\cdots+\sum_{i=11}^{17}a_i<0. \qquad (2)$$

(1) 与 (2) 显然矛盾.

**【附注】** 1 我国中学数学教材中，介绍了关于数列的基础知识，但此种类型的问题我们的中学生见到不多，它还涉及到一些不等式的基础知识，需要有较强的分析问题和

推理判断的能力才能解出．解题时，宜从具体入手分析，然后给以论证．

2　本题可进一步推广为：

设一有限项的实数序列中，任意接连 $m$ 项之和为负数，任意接连 $n$ 项之和为正数，试确定序列的最大项数（其中 $m$、$n$ 为两不等于 1 、且不相同的正整数)．

**【第三题】**　设给定的自然数 $n>2$，$Vn$ 是形如 $kn+1$ 的数集，其中 $k=1,2,\cdots$．数 $m\in Vn$（符号 $\in$ 读作“属于”），如果不存在两个数 $p$、$q\in Vn$，使得 $pq=m$，则称 $m$ 为 $Vn$ 中的不可分解数．试证，存在一个数 $r\in Vn$，这个数可以用不止一种方式分解为数集 $Vn$ 中的几个不可分解数的乘积（如果分解的表达式仅仅在于 $Vn$ 中的数的乘积次序不同，则看作是同一种方式的分解)．（7 点）

**【分析】**　首先应弄清题意，“给定的自然数 $n>2$，$Vn$是形如 $kn+1$ 的数集，其中 $k=1,2,\cdots$” 是什么意思？具体指的就是：

$$V_3=\{1\times3+1,\ 2\times3+1,\cdots\}=\{4,\ 7,\cdots\};$$
$$V_4=\{1\times4+1,\ 2\times4+1,\cdots\}=\{5,\ 9,\cdots\};$$
$$V_5=\{1\times5+1,2\times5+1,\cdots\}=\{6,11,\cdots\};$$
$$\cdots\cdots$$

什么叫做 $Vn$ 中的可分解数、不可分解数？现以 $V_3$ 为例加以说明．$V_3$是由如下的数所组成：

$$4,7,10,13,16,19,22,25,28,\cdots.$$

16 是 $V_3$ 中的可分解数，因为 $16=4\times4$，而且 16、$4\in V_3$；28 也是 $V_3$ 中的可分解数，因为它可以表为 $V_3$ 中两

个数 4 与 7 的乘积．另外，19 显然是 $V_3$ 中的不可分解数；又如，10 是否为 $V_3$ 中的不可分解数呢？虽然 10 按"通常的分解"可以表示为 $2\times5$，但因 2、$5\overline{\in}V_3$（符号 $\overline{\in}$ 读作"不属于"），故由题中所给定义知：10 仍是 $V_3$ 中的不可分解数．

题目要证明的是：存在一个数 $r\in Vn$，使 $r=p_1p_2=q_1q_2$，其中 $p_i$ 与 $q_j$ $(i,j=1,2)$ 不完全相同，并且都是 $Vn$ 中的不可分解数．

不难看出，要找出符合上述条件的数 $r$，只需事先选取不是 $kn+1$ 型的不等的两数 $s$，$t$；但 $s^2$，$t^2$，$st$ 又都是 $kn+1$ 型的数即可．因为这时若令 $p_1=s^2$，$p_2=t^2$，$q_1=q_2=st$，$r=s^2t^2$（注意到此时的 $p_1$，$p_2$，$q_1$，$q_2$ 不能在 $Vn$ 中分解了），则 $r$ 具有如下的两种不同的分解：

$$r=p_1p_2=(s^2)(t^2)=(st)^2=(st)(st)$$
$$=q_1q_2.$$

易知，这样的 $s$，$t$ 可以从形如 $kn-1$ 的数中选取．

下面，就沿着上面分析的思路来证明这一命题．

【证明】　取两数 $s=n-1$ 与 $t=2n-1$，其中 $n$ 为大于 2 的自然数，作

$$r=[(n-1)^2][(2n-1)^2]=[(n-1)(2n-1)]^2$$
$$=[(n-1)(2n-1)][(n-1)(2n-1)],$$

则 $r$ 就是 $Vn$ 中具有两种不同分解的可分解数．事实上：

第一，$(n-1)^2=n^2-2n+1=(n-2)n+1$

$$=k_1n+1\in Vn$$

（因自然数 $n>2$，故 $k_1=n-2$ 为自然数）；

$$(2n-1)^2=4n^2-4n+1=4(n-1)n+1$$
$$=k_2n+1\in Vn\ (k_2=4(n-1)\ \text{为自然数})；$$