电动力学解题指导

高等学校教学用书

王雪君 编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

电动力学解题指导

王雪君　编

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电动力学解题指导/王雪君编 . 一北京:北京师范大学出版
社,1998.6
ISBN 7-303-04434-5

Ⅰ. 电… Ⅱ. 王… Ⅲ. 电动力学-解题 Ⅳ. O442-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 12893 号

北京师范大学出版社出版发行
(100875 北京新街口外大街 19 号)
北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:850×1168 1/32 印张:7 字数:169 千
1998 年 6 月北京第 1 版 1998 年 6 月北京第 1 次印刷
印数:1～3 000 册
定价:9.00 元

前　言

本书是国家教委高教司八五（1991--1995）教材规划中 09 项《理论物理解题指导》中的卷Ⅲ。它是目前国内使用最多的四本理论物理教材之一的辅助教材。

众所周知，理论物理必须通过作大量习题，才能正确深入地理解和掌握基本概念和规律。多年来我系学生一贯反映电动力学课好听习题难做，因此一本解题指导辅助教材是完全必要的。

本人长期从事电动力学课教学，主要担任主讲，也作过辅导，并讲过数届 cuspea 电动力学辅导，因此见过、作过大量的国内外电动习题，自己也编过不少，由此积累了许多解题方法、技巧，在此基础上，总结、归纳挑选出一部分写成本书。

全书共分五章，第一章为矢量场论，第二章为静电场和恒定电流磁场，第三章为狭义相对论，第四章为电磁波传播，第五章为电磁辐射，使用SI 单位制，涉及的电动力学公式主要引自郭硕鸿先生著《电动力学》，对其余少量公式已在使用处注明出处。全书通过 122 个习题阐述。

本书强调基本概念、基本规律的理解和使用。内容有浅有深、有简有繁，如在静电场中，除常见的镜象法、分离变量法外，还有较难、深的格林函数法。对镜象法本书扩充至恒定电流磁场及电磁辐射，先讲真空后扩充到介质。

注意理论联系实际，如将镜象法应用到密立根油滴实验，在相对论力学中有“单束机和对撞机”等。

题目有趣味性，在相对论中尤为突出，如“谁开第一枪”、“飞船彗星碰撞”、“火车钻隧道”、“红灯变绿灯”等等。讲课时用它们举例，能引起学生的浓厚兴趣，积极思维。

综上所述本书可适用于不同学习要求的学生学习，如师专、本科、物理专业以及一些非物理专业。亦可作为本课教师的教学参考资料。

在编写过程中，梁绍荣教授审阅了全部初稿，梁竹健教授对相对论部分初稿作了仔细推敲，他们都提出了许多宝贵的意见和建议，作者在此一并致谢。

因作者水平有限，错误之处在所难免，请广大教师和读者批评指正。

编　　者

1996年3月于北京师范大学

目　录

第一章 矢量分析

1. 提要

三矢量的混合积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$是一标量. 有如下性质

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$
$$=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) \qquad (1.1.1)$$

上式表明，把三个矢量按循环次序轮换，其积不变；若只把两矢量对调，其积差一个负号.

三矢量的矢积 $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$是一矢量.

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}) \qquad (1.1.2)$$

∇算符在直角坐标系中的定义

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \qquad (1.1.3)$$

直角坐标系中散度、旋度和梯度的表示式

（一）散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{f}=\nabla\cdot\boldsymbol{f}=\dfrac{\partial f_x}{\partial x}+\dfrac{\partial f_y}{\partial y}+\dfrac{\partial f_z}{\partial z}$ (1.1.4)

（二）旋度

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{f}=\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$
$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f_x & f_y & f_z\end{vmatrix} \qquad (1.1.5)$$

（三）梯度 $\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$ (1.1.6)

（四）梯度和方向导数的关系

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \nabla \varphi \cdot \hat{\boldsymbol{l}} \tag{1.1.7}$$

∇ 算符运算公式

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0 \tag{1.1.8}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{f} = 0 \tag{1.1.9}$$

$$\nabla (\varphi\psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi \tag{1.1.10}$$

$$\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{f}) = \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{f} + \varphi \nabla \cdot \boldsymbol{f} \tag{1.1.11}$$

$$\nabla \times (\varphi \boldsymbol{f}) = \nabla \varphi \times \boldsymbol{f} + \varphi \nabla \times \boldsymbol{f} \tag{1.1.12}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\nabla \times \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{f} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{g}) \tag{1.1.13}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{g} \cdot \nabla) \boldsymbol{f} + (\nabla \cdot \boldsymbol{g}) \boldsymbol{f} - (\boldsymbol{f} \cdot \nabla) \boldsymbol{g} - (\nabla \cdot \boldsymbol{f}) \boldsymbol{g} \tag{1.1.14}$$

$$\nabla (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f} \times (\nabla \times \boldsymbol{g}) + (\boldsymbol{f} \cdot \nabla) \boldsymbol{g} + \boldsymbol{g} \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) + (\boldsymbol{g} \cdot \nabla) \boldsymbol{f} \tag{1.1.15}$$

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \tag{1.1.16}$$

$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{f}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{f}) - \nabla^2 \boldsymbol{f}$（此式也是 $\nabla^2 \boldsymbol{f}$ 的定义） (1.1.17)

一些常用结果

$\boldsymbol{x}$ (x, y, z) 表示场点位矢，$\boldsymbol{x}'$ (x', y', z') 表示源点位矢，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{r}$ 的大小 $r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$.

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \nabla' = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z'}$$

$\boldsymbol{a}$ 代表常矢. 有

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \hat{\boldsymbol{r}}, \nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3, \nabla \times \boldsymbol{r} = \nabla \times \hat{\boldsymbol{r}} = 0.$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0, (r \neq 0). \nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0, (r \neq 0) \tag{1.1.18}$$

$$\nabla (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}, (\boldsymbol{a} \cdot \nabla) \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}, \nabla \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} \hat{\boldsymbol{r}}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

柱坐标系

坐标 ρ、φ、z，单位矢 $\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$，它们的方向沿该点这些坐标的增加方向.

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.19}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \tag{1.1.20}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_\rho}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.21}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{1.1.22}$$

球坐标系

坐标 r、θ、φ，单位矢 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$. 它们的方向沿该点这些坐标的增加方向.

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.1.23}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta f_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \tag{1.1.24}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta f_\varphi\right) - \frac{\partial f_\theta}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r f_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r f_\theta) - \frac{\partial f_r}{\partial \theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.1.25}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \tag{1.1.26}$$

积分变换

（一）高斯定理 $$\oint_S \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}V \tag{1.1.27}$$

（二）斯托克斯定理 $$\oint_L \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{11.1.28}$$

（三）格林公式　设区域 V 内有两个函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$，有格林公式

$$\int_V(\psi\nabla^2\varphi-\varphi\nabla^2\psi)\mathrm{d}V=\oint_S\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \qquad (1.1.29)$$

并矢　　两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 并列，它们之间不作任何运算，称为并矢. $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的并矢写作 $\boldsymbol{AB}$. 一般来说 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$

张量　$$\overleftrightarrow{\mathscr{T}}=\sum_{ij}T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \qquad (1.1.30)$$

其中 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}$. $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 是并矢，在坐标系转动时九个分量 T_{ij} 按一定的方式变换，并矢是张量的一种特殊情形.

单位张量　$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \qquad (1.1.31)$$

并矢和矢量的点乘规则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{C}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\\ \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{AB})&=(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\end{aligned} \qquad (1.1.32)$$

点乘结果是一个矢量，而且一般有 $(\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{AB})$

两个并矢的二次点乘规则

$$(\boldsymbol{AB}):(\boldsymbol{CD})=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}) \qquad (1.1.33)$$

即先把靠近的两矢量点乘，然后把剩下的两矢量点乘，点乘结果是一个标量. 有 $\boldsymbol{AB}:\boldsymbol{CD}=\boldsymbol{CD}:\boldsymbol{AB}$

一些重要结果

（一）单位张量和任一矢量点乘等于该矢量

$$\overleftrightarrow{\mathscr{I}}\cdot\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{I}}=\boldsymbol{f} \qquad (1.1.34)$$

（二）　$$\nabla\boldsymbol{x}=\overleftrightarrow{\mathscr{I}} \qquad (1.1.35)$$

（三）　$$\nabla\nabla\frac{1}{R}=\frac{3\boldsymbol{xx}-R^2\overleftrightarrow{\mathscr{I}}}{R} \qquad (R\neq0) \qquad (1.1.36)$$

并矢的散度　$$\nabla\cdot(\boldsymbol{fg})=(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g}+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} \qquad (1.1.37)$$

张量的散度　$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}=\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{i}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}})+\frac{\partial}{\partial y}(\boldsymbol{j}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}})$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{k}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}) \tag{1.1.38}$$

张量和并矢的积分变换

$$\oint d\boldsymbol{S}\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}}=\int dV\nabla\cdot\overleftrightarrow{\mathscr{T}} \tag{1.1.39}$$

$$\oint d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{fg})=\int dV\nabla\cdot(\boldsymbol{fg}) \tag{1.1.40}$$

§1.1 矢量分析

1. 矢量代数

例 1 证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

证 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ 是一个矢量. 将它看作一个整体，等式左方是三矢量的混合积. 由（1.1.1）有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$$

由三矢量的矢积（1.1.2）有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})]\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

例 2 在球坐标系中，单位矢量 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{n}'$ 的方向分别由（θ、φ）和（θ'、ϕ'）决定. 求这两个方向之间的方向余弦.

解 设 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}'$ 之间的夹角为 α，它们的方向余弦是

$$\cos\alpha=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'$$

已知 $\boldsymbol{n}=\cos\theta\boldsymbol{e}_z+\sin\theta(\cos\varphi\boldsymbol{e}_x+\sin\varphi\boldsymbol{e}_y)$

$$\boldsymbol{n}'=\cos\theta'\boldsymbol{e}_z+\sin\theta'(\cos\phi'\boldsymbol{e}_x+\sin\phi'\boldsymbol{e}_y)$$

所以

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'\\&=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'(\cos\varphi\cos\phi'+\sin\varphi\sin\phi')\\&=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\phi')\end{aligned}$$

2. 梯度、散度、旋度

这类题是求$\nabla\varphi$、$\nabla\cdot\boldsymbol{f}$、$\nabla\times\boldsymbol{f}$. 当$\varphi$或$\boldsymbol{f}$较简单时，如$\nabla\boldsymbol{r}$、$\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$、$\nabla\cdot\boldsymbol{r}$、$\nabla\times\boldsymbol{r}$等，只能直接用它们在直角坐标系的表示式求解. 如例3、例4. 但它们的结果如（1.1.18）却非常重要. 常可直接引用.

一般φ或$\boldsymbol{f}$都比较复杂，如$\varphi=\dfrac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$，$\boldsymbol{f}=\dfrac{\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}}{r}$等，我们应该先将$\varphi$、$\boldsymbol{f}$进行分解，然后再按梯度、散度、旋度的表示式作，甚至可直接引用结果（1.1.18）. 如例5、例6.

例3 $\boldsymbol{x}(x,y,z)$表示场点位矢，$\boldsymbol{x}'(x'、y'、z')$表示源点位矢. $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$，其大小

$$r=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}}.$$

求∇r和$\nabla r'$.

解 由（1.1.6），$\nabla r=\nabla(\boldsymbol{e}_x\dfrac{\partial r}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{\partial r}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\dfrac{\partial r}{\partial z})$

因为，$\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{(x-x')}{r}$，$\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{(y-y')}{r}$，$\dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{(z-z')}{r}$

所以
$$\begin{aligned}\nabla r&=\frac{1}{r}[(x-x')\boldsymbol{e}_x+(y-y')\boldsymbol{e}_y+(z-z')\boldsymbol{e}_z]\\&=\frac{1}{r}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\\&=\frac{\boldsymbol{r}}{r}\\&=\hat{\boldsymbol{r}}\end{aligned}\tag{1}$$

$$\nabla' r=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial r}{\partial x'}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial r}{\partial y'}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial r}{\partial z'}$$

因为
$$\frac{\partial r}{\partial x'}=\frac{-(x-x')}{r}=\frac{-\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y'}=\frac{-(y-y')}{r}=\frac{-\partial r}{\partial y},$$
$$\frac{\partial r}{\partial z'}=\frac{-(z-z')}{r}=\frac{-\partial r}{\partial z}$$

所以
$$\nabla' r=-\nabla r=-\hat{\boldsymbol{r}}\tag{2}$$

下面说明（1）、（2）两式为什么相差一个负号.

r 是源点 $\boldsymbol{x}'$ 和场点 $\boldsymbol{x}$ 之间的距离. $\nabla \boldsymbol{r}$ 的方向是，源点固定时，r 增长最快的方向. 显然它应该沿着 $\boldsymbol{r}$ 方向. 而 $\nabla' r$ 的方向是，场点固定时 r 增长最快的方向，所以它沿着 $-\boldsymbol{r}$ 方向.

例 4 求 $\nabla \cdot (\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{x}}{r^3})$. 式中 $\boldsymbol{m}$ 为常矢，$r=|\boldsymbol{x}|$.

解 将 $(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3})=\boldsymbol{f}$，由（1.1.4）求 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3})_x+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3})_y+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3})_z$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3})_x=\frac{\partial}{\partial x}(m_y\frac{z}{r^3}-m_z\frac{y}{r^3})=(m_y z-m_z y)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r^3})$$

$$=-3(m_y z-m_z y)\frac{x}{r^5}$$

同样有 $$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3})_y=\frac{\partial}{\partial y}(m_z\frac{x}{r^3}-m_x\frac{z}{r^3})=-3(m_z x-m_x z)\frac{y}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3})_z=\frac{\partial}{\partial y}(m_x\frac{y}{r^3}-m_y\frac{x}{r^3})=-3(m_x y-m_y x)\frac{z}{r^5}$$

所以 $$\nabla\cdot(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3})$$

$$=\frac{-3}{r^5}[x(m_y z-m_z y)+y(m_z x-m_x z)$$

$$+z(m_x y-m_y x)]$$

$$=0$$

此题亦可用公式（1.1.13）作. 令 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{f}$，$\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\boldsymbol{g}$，有

$$\nabla\cdot(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3})=(\nabla\times\boldsymbol{m})\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}-\boldsymbol{m}\cdot(\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3})$$

因为 $\nabla\times\boldsymbol{m}=0$，$\nabla\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0$

所以 $\nabla\cdot(\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3})=0$ 结果一样.

第二种方法很简便，但必须记熟公式（1.1.13）. 第一种方法也不

复杂，仍是一种好方法.

例 5 求$\nabla(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3})$，其中 $\boldsymbol{p}$ 是常矢量. $\boldsymbol{r}$ 是它到场点的位矢，$r=|\boldsymbol{r}|$.

解 方法（一） 由（1.1.10）

$$\nabla(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3})=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\nabla\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^3}\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})$$

由（1.1.18），
$$\nabla\frac{1}{r^3}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\frac{1}{r^3})\hat{r}=-\frac{3}{r^5}\boldsymbol{r},\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{p}$$

所以
$$\nabla(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3})=\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{r}^3}-\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}$$

方法（二） 因为梯度不随坐标系的选择而改变，现在用球坐标系中的表示式（1.1.23).

令 $\boldsymbol{p}$ 在坐标系原点，并以它的方向为极轴方向，有

$$\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

由（1.1.23），

$$\nabla(p\,\frac{\cos\theta}{r^2})=\frac{\partial}{\partial r}(p\,\frac{\cos\theta}{r^2})\boldsymbol{e}_r+\frac{1\partial}{r\partial\theta}(p\,\frac{\cos\theta}{r^2})\boldsymbol{e}_\theta$$

$$=\frac{-2}{r^3}p\cos\theta\boldsymbol{e}_r-p\,\frac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta$$

因为
$$\boldsymbol{e}_z=\cos\theta\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{p}=p\boldsymbol{e}_z$$

所以
$$\nabla(p\,\frac{\cos\theta}{r^2})=\frac{-3}{r^3}p\cos\theta\boldsymbol{e}_r+\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}$$

$$=\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}-\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}$$

和方法（一）的结果相同.

所以
$$\nabla(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3})=\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}-\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}.$$

例 6 求$\nabla\times\frac{\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}}{r}$,其中 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{k}$ 是常矢.

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',\qquad r=|\boldsymbol{r}|$$

解　由(1.1.12)，　$\nabla\times\frac{\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}}{r}=\nabla\frac{e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}}{r}\times\boldsymbol{E}_0$

由(1.1.10)　$\nabla\frac{e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}}{r}=\frac{1}{r}\nabla e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}+e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\nabla\frac{1}{r}$

由(1.1.18)　$\nabla e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}=e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\nabla(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=i\boldsymbol{k}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$

由（1.1.18）　$\nabla\frac{1}{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\frac{1}{r})\boldsymbol{r}=\frac{-\boldsymbol{r}}{r^3}$

所以　$\nabla\times\frac{\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}}{r}=[\frac{i\boldsymbol{k}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}}{r}-\frac{\boldsymbol{r}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}}{r^3}]\times\boldsymbol{E}_0$

例 7　求$\nabla^2\boldsymbol{f}$在球坐标系中的分量形式.

解　从（1.1.17）知，在球（柱）坐标系中，定义

$$\nabla^2\boldsymbol{f}=-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{f})+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{f})$$

所以　$(\nabla^2\boldsymbol{f})_r=-[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{f})]_r+[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{f})]_r$

由（1.1.25）知

$$[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{f})]_r=\frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin\theta(\nabla\times\boldsymbol{f})_\varphi]-\frac{\partial}{\partial\varphi}(\nabla\times\boldsymbol{f})_\theta\right\}$$

$$=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\sin\theta}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(rf_\theta)-\frac{\partial f_r}{\partial\theta}]\right\}-\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_r}{\partial\varphi}$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}(rf_\varphi)]$$

$$=\frac{-1}{r^2\sin\theta}[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f_r}{\partial\theta})]-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f_r}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta f_\theta)$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f_\theta}{\partial r})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 f_\varphi}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi}$$

由（1.1.23）和（1.1.24），

$$[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{f})]_r=\frac{\partial}{\partial r}[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta f_\theta)$$

$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi}]$$

$$=\frac{\partial^2 f_r}{\partial r^2}+\frac{2\partial f_r}{r\partial r}-\frac{2}{r^2}f_r+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f_\theta}{\partial r})-\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta f_\theta)+$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 f_\varphi}{\partial r\partial\varphi}-\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi}$$

由（1.1.26），

$$\nabla^2 f_r=\frac{\partial^2 f_r}{\partial r^2}+\frac{2\partial f_r}{r\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f_r}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f_r}{\partial\varphi^2}$$

所以 $$(\nabla^2 \boldsymbol{f})_r=\nabla^2 f_r-\frac{2}{r^2}f_r-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta f_\theta)-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi}$$

同理可求得

$$(\nabla^2 \boldsymbol{f})_\theta=\nabla^2 f_\theta-\frac{f_\theta}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2\partial f_r}{r^2\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$(\nabla^2 \boldsymbol{f})_\varphi=\nabla^2 f_\varphi-\frac{f_\varphi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f_r}{\partial\varphi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial f_\theta}{\partial\varphi}$$

3. 积分变换

例 8 将积分 $\oint_L \varphi \mathrm{d}r$ 换为面积分.

解 因为 $r^2=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$， $r\mathrm{d}r=\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，

所以 $dr=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

$$\oint_L\varphi\mathrm{d}r=\oint_L\varphi\,\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},\mathrm{d}\boldsymbol{r}\text{ 即 }\mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

用斯托克斯定理（1.1.28）

$$\oint_L\hat{\boldsymbol{r}}\,\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S\nabla\times(\hat{\boldsymbol{r}}\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\int_S(\nabla\varphi\times\hat{\boldsymbol{r}})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

其中已用了 $\nabla\times(\hat{\boldsymbol{r}}\varphi)=\nabla\varphi\times\hat{\boldsymbol{r}}+\varphi\nabla\times\hat{\boldsymbol{r}}$，$\nabla\times\hat{\boldsymbol{r}}=0$.

例 9 证明 $\int_V(\nabla\times\boldsymbol{f})\mathrm{d}V=\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{f}$. $\boldsymbol{f}$ 为任意一矢量场. S 为体积 V 的包面.

证 上式两方积分后仍都是矢量. 要证明两个矢量相等，只要证明它们在任意一个方向 $\boldsymbol{c}$ 上的投影相等即可，即有 $\boldsymbol{c}\cdot\int_V(\nabla\times\boldsymbol{f})\mathrm{d}V=\boldsymbol{c}\cdot\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{f}$. 由(1.1.1)

$$\boldsymbol{c} \cdot \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{f} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{c}$$

用高斯定理（1.1.27）

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{c} = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{c}) \mathrm{d}V$$

因为 $\nabla \cdot (\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{c}) = \frac{\partial}{\partial x}(f_y c_z - f_z c_y) + \frac{\partial}{\partial y}(f_z c_x - f_x c_z)$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(f_x c_y - f_y c_x)$$

$$= c_x\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + c_y\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + c_z\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial x}\right)$$

$$= \boldsymbol{c} \cdot \nabla \times \boldsymbol{f}$$

所以 $\boldsymbol{c} \cdot \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{c} \cdot \int_V (\nabla \times \boldsymbol{f}) \mathrm{d}V$

因为 $\boldsymbol{c}$ 是一个任意常矢（如 $\boldsymbol{c}$ 是基矢 $\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$）. 所以命题成立.