

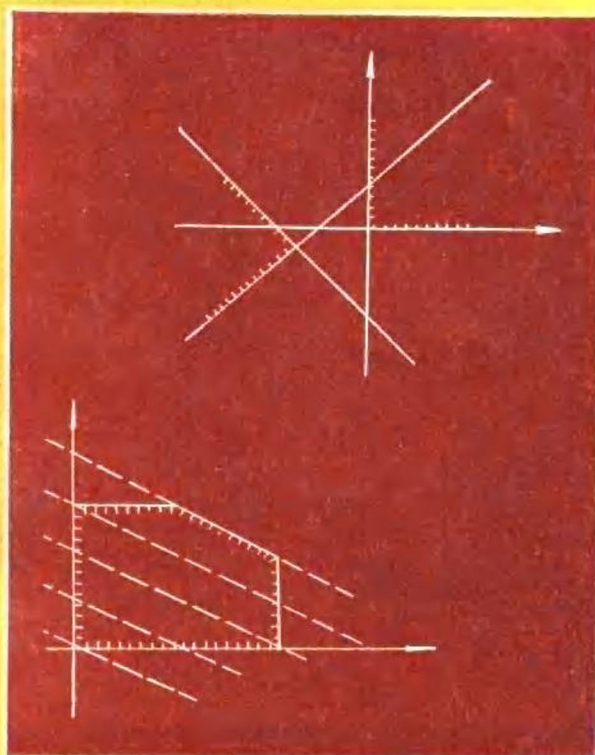
高等学校文科教材

经济应用数学基础（四）

线性规划

（修订本）

胡富昌 编



中国人民大学出版社



中财 80090955

高等学校文科教材

经济应用数学基础 (四)

线性规划

(修订本)

胡富昌 编

CD268/14

中央财经大学图书馆藏书章

登录号

459033

分类号

F224.0/19=2

中国人民大学出版社

高等学校文科教材
经济应用数学基础（四）
线 性 规 划（修订本）
胡富昌 编

*

中国人民大学出版社出版
（北京西郊海淀路 39 号）
北京市丰台区印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

*

开本：850×1168 毫米 32 开 印张：6.125

1981 年 7 月第 1 版

1990 年 5 月第 2 版 1995 年 2 月第 6 次印刷

字数：148 000 册数：798 001-839 000

■

ISBN 7-300-00902-6
O·27 定价：5.90 元

再 版 说 明

《线性规划》是原教育部委托中国人民大学经济信息管理系赵树嫄教授主编的高等学校文科教材《经济应用数学基础》的第四册。几年来教学改革的深入、学生素质的提高等，这一切都对线性规划的教学提出了更高的要求。为此对本书第一版进行了修订。

这次修订工作是在国家教委的支持与领导下进行的，并得到北京大学、北京经济学院、北京商学院、北京财贸学院、中央财政金融学院、对外经济贸易大学等兄弟院校有关同志的大力协助。他们对本书的修改提出了许多宝贵意见，在此我们表示衷心的感谢。

这次修订对第一版的第四、五两章作了较大的修改与补充，并增加了习题答案。

本书第一版由胡富昌编写，赵树嫄主编。参加审阅的有陆启良、马兴忠等。第二版仍由胡富昌编写，赵树嫄主编。参加审阅的有陆启良和付维潼。

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编者 1989.1

目 录

第一章 线性规划问题的数学模型	1
§1.1 引言	1
§1.2 线性规划问题的数学模型	4
习题一	20
第二章 线性规划问题解的性质	24
§2.1 两个变量的线性规划问题的图解法	24
§2.2 线性规划问题的标准形式	28
§2.3 线性规划问题解的性质	30
习题二	37
第三章 单纯形方法	38
§3.1 引例	38
§3.2 单纯形方法	42
§3.3 改进单纯形方法	90
习题三	98
第四章 对偶线性规划问题	101
§4.1 对偶线性规划问题	101
§4.2 对偶问题的几个基本性质	102
§4.3 对偶问题的经济意义——影子价格	109
§4.4 对偶单纯形方法	115
习题四	119
第五章 参数线性规划问题与灵敏度分析	121
§5.1 参数线性规划问题	121
§5.2 灵敏度分析	136

习题五	148
第六章 运输问题的特殊解法	150
§6.1 运输问题的表上作业法.....	150
§6.2 运输问题的图上作业法.....	167
习题六	179
习题答案	185

第一章 线性规划问题的数学模型

§ 1.1 引言

在工农业生产、交通运输、财贸工作等各项经济活动中，必须提高经济效益，做到耗费较少的人力物力财力，创造出较多的经济价值。

提高经济效益可以通过两种途径：一是技术方面的各种改进，例如工业生产上改善工艺，使用新的设备和新型原材料等。二是生产组织和计划的改进，即合理安排人力物力资源，合理组织生产过程，在条件不变的情况下，统筹安排，使总的经济效益最好。后者就是运筹学研究的主要内容。

运筹学有规划论、排队论、对策论等许多分支。线性规划是其中的一个重要分支。早在本世纪30年代末就有人从运输等问题开始研究它。它在运筹学中是研究较早、发展较快、应用较广、比较成熟的一个分支。它研究的问题主要有两类：一是一项任务确定后，如何统筹安排，尽量做到用最少的人力物力资源去完成这一任务。二是已有一定数量的人力物力资源，如何安排使用它们，使得完成任务最多。其实这两类问题是一个问题的两个方面，就是所谓寻求整个问题的某个整体指标最优的问题。在经济领域里，这种问题很多。

（一）运输问题

在某一地区内，有某种产品的产地与销地各若干个，把这种产品从各个产地调运到各个销地，调运方案可以很多，应如何组

织调运,才能使总的运费或运输量(即总的运行吨公里数)最少。

(二) 生产的组织与计划问题

一个工厂或车间有各种不同类型的车床各若干台,各种不同车床生产各种零件的效率不同,在一个生产周期,应如何安排各车床的生产时间,使得成套的产品总量最大。类似的还有劳动力的安排等问题。

(三) 合理下料问题

在加工中需要将某类条材或板材下不同规格的毛坯,各种毛坯的数量也可能不同,应如何选取合适的裁法,使毛坯数量符合要求,并且使总料头最少(即所用原材料最少)。

(四) 配料问题

在食品、化工、冶炼等企业,常常用几种原料,制成达到含有一定成分的产品,而这些不同原料价格不同,应如何决定配料的方案,才能使生产的产品所含成分合乎要求,而产品的成本最低。

(五) 布局问题

各种作物在不同土壤上单位面积产量不一样,如何合理安排各种作物在各种土壤上的种植面积,达到因地制宜,在完成种植计划的前提下,使总产量最多。这是作物布局问题。将某几个地方出产的原料,集中到某几个地方加工成成品,然后再运到某几个成品需要地。有些地方可能既是原料出产地,又是成品需要地,也是成品加工地。因各地间运费不同,成品加工费不同,设厂条件不同,应在什么地方设厂,规模多大,才能满足成品需要地的需要,又使费用(包括运费、加工费)最低。这是工厂布局问题。

(六) 分派问题

n 件工作分派给 n 人去做,每人做一件工作,而各人对做各种工作的效率不同,问应如何合理分派,才能使完成全部工作的

总工时最少。类似的问题还有作物的种植安排、机床加工零件任务的分配问题等。

在经济领域中应用初等数学方法进行计算，有着悠久的历史，而运用高等数学方法作为分析经济活动、提高经济效益的辅助手段，则是近几十年的事情。线性规划和其他学科一样，也是由于生产力发展的需要，而产生和发展的。随着现代生产的规模越来越大，各个部门之间的相互联系越来越密切和复杂，在生产组织与计划、交通运输、财贸等方面都要求有新的数学方法来为它们服务。因此，早在本世纪30年代末40年代初，康托洛维奇（Конторвич）和希奇柯克（Hitchcock）等在生产组织和运输问题等方面就开始研究应用线性规划这一数学方法；后来，在40年代末又由丹茨基（Dantzig）等人提出了单纯形方法并进一步从理论上给线性规划奠定了基础。

我国也在建国初期就开始应用线性规划的方法。如东北的一个物资调运小组，就创造了一个物资调运的图上作业法；并经中国科学院数学研究所的同志给予理论上证明，在全国推广应用，成效显著，对我国交通运输工作作出了重大贡献。随着电子计算机的不断发展，计算能力的大大提高，使这一数学方法在经济活动中的广泛应用不仅提供了可能性，而且发展的速度也是很快的。在1951年，国际水平只能解约束条件为10个方程的线性规划问题，到了1963年就能解1 000—10 000个方程的线性规划问题了。另一方面，从时间上看，解一个67个方程的线性规划问题，1956年要1小时，到1963年只要28秒钟。现在，不但解题规模更大，速度更快，而且还有解线性规划问题的专用程序，解题时，只要调用这专用程序，输入有关数据，几乎立即就可把要求计算的结果显示或打印出来。另外，计算机的日益普及给线性规划的推广应用创造了极为有利的条件，它已成为国家重点推广的现代管理方法之一。

§ 1.2 线性规划问题的数学模型

前面提到，线性规划的应用是很广泛的，应用的实际问题各式各样。数学模型是描述实际问题共性的抽象的数学形式。对数学模型的研究，有助于我们认识这类问题的性质和寻求它的一般解法。现在首先介绍几个典型的实际问题。

(一) 运输问题

例 设有两个砖厂 A_1 、 A_2 。其产量分别为23万块与27万块。它们生产的砖供应 B_1 、 B_2 、 B_3 三个工地。其需要量分别为17万块、18万块和15万块。而自各产地到各工地的运价列表如下（见表1-1）：

表 1-1

运价 (元/万 块) 砖 厂 \ 工地			
	B_1	B_2	B_3
A_1	50	60	70
A_2	60	110	160

问应如何调运，才使总运费最省？

解 设 x_{ij} 表示由砖厂 A_i 运往工地 B_j 砖的数量（单位：万块）（ $i=1,2$ ； $j=1,2,3$ ），例如 x_{11} 表示由砖厂 A_1 运往工地 B_1 砖的数量等等。现列表如下（见表1-2）。

因为由砖厂 A_1 运往三个工地砖的总数应为 A_1 的产量23万块，即： $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 23$ 。

同样由砖厂 A_2 运往三个工地砖的总数应为 A_2 的产量27万块，即： $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 27$ 。

另一方面，两个砖厂运往 B_1 工地的砖的数量应等于 B_1 的需要

表 1-2

工地 砖厂	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	23
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	27
收量	17	18	15	50

量17万块，即： $x_{11} + x_{21} = 17$ 。

同理可得： $x_{12} + x_{22} = 18$ ；

$$x_{13} + x_{23} = 15。$$

因此，调运方案就是满足下面约束条件的一组变量 x_{11} 、 x_{12} 、 x_{13} 、 x_{21} 、 x_{22} 、 x_{23} 的值：

$$\text{约束条件} \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 23 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 27 \\ x_{11} + x_{21} = 17 \\ x_{12} + x_{22} = 18 \\ x_{13} + x_{23} = 15 \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2; j=1,2,3) \end{array} \right.$$

显然，可行的调运方案有很多个。

现在的问题就是要在这些很多个可行的方案中，找一个运费最少的方案，即：

求一组变量 x_{11} 、 x_{12} 、 x_{13} 、 x_{21} 、 x_{22} 、 x_{23} 的值，使它满足

$$\text{约束条件} \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 23 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 27 \\ x_{11} + x_{21} = 17 \\ x_{12} + x_{22} = 18 \\ x_{13} + x_{23} = 15 \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2; j=1,2,3) \end{array} \right.$$

并使目标函数 $s = 50x_{11} + 60x_{12} + 70x_{13} + 60x_{21} + 110x_{22} + 160x_{23}$ 的值最小（即总运费最少）。

一般地，设某种物资有 m 个产地： $A_1, A_2, \dots, A_m$ ，联合供应 n 个销地： $B_1, B_2, \dots, B_n$ 。各产地产量（单位：吨），各销地销量（单位：吨），各产地至各销地单位运价（单位：元/吨）如表 1-3 所示：

表 1-3

产 地	销地 单价(元/吨)					产量(吨)
		B_1	B_2	$\dots$	B_n	
A_1		c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}	a_1
A_2		c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m		c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}	a_m
销量(吨)		b_1	b_2	$\dots$	b_n	

表中： a_i 表示产地 A_i 的产量 ($i=1,2,\dots,m$)；

b_j 表示销地 B_j 的销量 ($j=1,2,\dots,n$)；

c_{ij} 表示 A_i, B_j 间的单位运价 (元/吨) ($i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$)。

问应如何调运，才使总运费最少？

运往销地 B_j 的物资数($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$)。那么, 上述运输问题的数学模型为:

求一组变量 x_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) 的值, 使它满足

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} &= a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} &= a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} &= a_m \\ x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} &= b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} &= b_n \\ x_{ij} &\geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \text{约束条件}$$

并使目标函数 $s = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$ 的值最小。

利用连加号(Σ), 这一数学模型可以写为:

求一组变量 x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 的值, 使它满足

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

(产地 A_i 发到各销地的发量总和应等于 A_i 的产量)

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

(各产地发到销地 B_j 的发量总和应等于 B_j 的销量)

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$$

(调运量不能为负数)

并且使目标函数 $s = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}$ 的值最小。

(总运费最少)

如果运输问题中, 没有产销平衡这一限制, 当产大于销时
(即 $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$), 这一问题的数学模型应为:

求一组变量 x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 的值, 使它满足

$$\text{约束条件} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \quad \quad \quad \text{(产地 } A_i \text{ 发到各销地的发量总和不超过 } A_i \text{ 的产量)} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \quad \quad \quad \text{(各产地发到销地 } B_j \text{ 的发量总和应等于 } B_j \text{ 的销量)} \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \\ \quad \quad \quad \text{(调运量不能为负数)} \end{array} \right.$$

并且使目标函数 $s = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}$ 的值最小。

(总运费最少)

(二) 布局问题

1. 作物布局

某生产队要在 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 块地上, 种植 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 种作物。各块土地亩数、各种作物计划播种面积及各种作物在各块地上的单产 (每亩的产量) 如表 1-4 所示, 问应如何合理安排种植计划, 才使总产量最多。

这里假设 $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ (即计划播种总面积等于土地面积)。

表 1-4

作物	单产 (公斤/亩)	土地					播种面积(亩)
			B_1	B_2	$\dots$	B_n	
A_1			c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}	a_1
A_2			c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m			c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}	a_m
土地亩数			b_1	b_2	$\dots$	b_n	

表中: a_i 表示作物 A_i 的播种面积 ($i = 1, 2, \dots, m$);

b_j 表示土地 B_j 的亩数 ($j = 1, 2, \dots, n$);

c_{ij} 表示在土地 B_j 上种植作物 A_i 的单产数 ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$)。

解 设 x_{ij} 为土地 B_j 种植作物 A_i 的亩数 ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), 那么作物布局问题的数学模型为:

求一组变量 x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 的值, 使它满足

约束条件

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

(在各块地上种植作物 A_i 的总亩数, 应等于 A_i 的计划播种数)

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(在土地 B_j 上种植各种作物的总亩数, 应等于 B_j 的面积)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n) \\ \text{(种植数不能为负数)} \end{array} \right.$$

并且使目标函数 $s = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij}$ 的值最大。

(总产量最多)

这一数学模型和前面运输问题的数学模型相同。具有这样数学模型的问题还有机床加工零件的问题(见习题一第2题)等。我们称这类问题为康-希问题,或统称为运输问题。

2. 工厂布局问题

设有 n 个地区 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 在某一个计划期内, A_i 生产某种原料 a_i 吨, 同时需要用这种原料加工的某种产品 b_i 吨 ($i=1,2,\dots,n$), 已知 k 吨原料可制造 1 吨该产品。设这 n 个地区所产原料的总数恰好能生产各地区所需该产品的总数, 即

$$\sum_{i=1}^n a_i = k \sum_{i=1}^n b_i.$$

另外已知在 A_i 设厂加工该产品的加工费为每吨 d_i 元。在 A_i 设厂生产该产品数最多为 e_i 吨, 最少为 f_i 吨 ($i=1,2,\dots,n$)。从 A_i 运原料或产品到 A_j ($i,j=1,2,\dots,n$) 每吨运价为 c_{ij} 元。问应在何地设厂, 生产多少该产品, 才能既满足需要, 又使生产费用(包括原料和产品运费、产品加工费)最少?

解 设 x_{ij} 表示由 A_i 运到 A_j 的原料数(单位: 吨) ($i,j=1,2,\dots,n$), 其中 $j=i$ 时表示 A_i 留用数; y_{ij} 表示由 A_i 运到 A_j 的成品数(单位: 吨) ($i,j=1,2,\dots,n$), 其中 $j=i$ 时, 表示 A_i 留用数; z_i 表示 A_i 设厂的年产成品数(单位: 吨) ($i=1,2,\dots,n$)。它们之间的关系如表 1-5 所示。

根据题意, 得数学模型如下:

求一组变量 x_{ij} ($i,j=1,2,\dots,n$), y_{ij} ($i,j=1,2,\dots,n$), z_i ($i=1,2,\dots,n$) 的值, 使它满足

表 1-5

	A_1	A_2	...	A_n	生产原料数	生产成品数	加工费
A_1	x_{11} c_{11} y_{11}	x_{12} c_{12} y_{12}	...	x_{1n} c_{1n} y_{1n}	a_1	$f_1 \leq z_1 \leq e_1$	d_1
A_2	x_{21} c_{21} y_{21}	x_{22} c_{22} y_{22}	...	x_{2n} c_{2n} y_{2n}	a_2	$f_2 \leq z_2 \leq e_2$	d_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_n	x_{n1} c_{n1} y_{n1}	x_{n2} c_{n2} y_{n2}	...	x_{nn} c_{nn} y_{nn}	a_n	$f_n \leq z_n \leq e_n$	d_n
需成品数	b_1	b_2	...	b_n			
需原料数	kz_1	kz_2	...	kz_n			

约束条件

$$\sum_{i=1}^n x_{i1} = a_1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

(从 A_i 运往各地原料总数以及 A_1 的 留用数应等于 A_1 的原料产量)

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = kz_j \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

(从各地运往 A_1 的原料总数以及 A_1 的留用数应等于在 A_1 设厂所需原料数)

$$\sum_{i=1}^n y_{ii} = z_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$