微积分基础

上册

陈伟侯 翟连林 段云鑫 编著

$$f'(x)=0 \qquad \frac{dv}{dt}=\frac{2v}{\sqrt{v^2+1}}$$

$$y'_x=\frac{x+y}{x-y} \qquad y''=0$$

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)} \qquad \boxed{f(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

$$\int\frac{x^3}{x+1}dx \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int\frac{\cos 2\theta}{\sin^2\theta+1}d\theta \qquad \int \sin t\, dt$$

$$\int f(u)du \qquad \int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$$

$f(t)$ t

科学出版社

微积分基础

上 册

陈伟侯　翟连林　段云鑫 编著

1984

内 容 简 介

为满足读者自学微积分和提高青年教师的教学水平的需要，该书作者积多年讲授微积分的经验，以通俗易懂的语言、由浅入深的安排、逻辑严谨的结构，系统地介绍了一元微积分的基本概念、运算法则和定理等．书中以“无限变化过程”为纵线贯穿了各章内容，使读者懂得微积分基本概念的形成和深化的全过程．为便于自学，书中列举了丰富的实例．本书分上、下两册（上册讲一元函数微分学；下册讲积分学及级数、常微分方程初步）．

本书可供自学青年、业余大学或电视大学学员等自学用，亦可供高中数学教师以及医科、农科、财经等院校的一年级大学生等参考．

微 积 分 基 础

上 册

陈伟侯　翟连林　段云鑫 编著

责任编辑　徐一帆

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984年5月第一版　开本：787×1092 1/32

1984年5月第一次印刷　印张：13 1/4

印数：0001—20,200　字数：258,000

统一书号：13031·2572

本社书号：3533·13—1

定价：2.10元

前　　言

本书是在作者多年讲授的微积分讲稿的基础上，针对读者自学一元微积分的需要而编写的．在编写过程中，我们注意了以下几点：

第一　便于自学

为减少自学者起步时的困难，解决好中学数学与大学数学的衔接问题，我们在本书的开头，安排了一定的篇幅，对现行中学教材中已经提到的实数、函数、极限、连续等知识，进行概括、整理和深化，使它们能够成为一个比较严谨的系统，使读者从中熟悉微积分学中的一些习惯说法及推理格式，为今后的学习打下比较坚实的基础．我们还特别强调：微积分总是把问题放到某一个无限变化的过程中去考虑，这样做，对读者自学微积分是很有益处的．

第二　充分注意到数学概念的形成和深化的全过程

对于数学概念的理解，如果仅仅停留在定义上，往往是不深刻的．要深刻理解，就必须了解它的形成和深化的全过程．例如，中学数学中已经提到过的反函数，自学者已有相当的理解，但又感到比较模糊．本书中，把反函数概念的形成和深化作为一个全过程来介绍．作者的教学实践表明，对反函数的这种讲授方法，效果比较好．

第三　重视逻辑严谨性

逻辑严谨是近代数学的重要特点．我们认为，在学习高等数学知识的同时，培养逻辑推理能力是不应忽视的．如果自学者具备了比较好的逻辑推理能力，他就可以比较顺利地学习一元微积分以后的各门高等数学课程．由于本书是一本自学普及读物，不可能把严谨的实数公理体系搬到书上来．尽管这样，凡在本书这个体系之内可以证明的，我们都给出了推理详尽的证明．比如，在证明 $0/0$ 型的洛必达法则时，采用了一个辅助定理，使得证明更严谨了，并且避免了常常发生的一种误解．

对概念和定理，如果只从正面去理解，往往是不巩固的．本书在一些重要的场合，注意引导读者去考察概念的反面，定理的逆命题或否命题，从而加深对概念和定理的理解．例如，极限定义的否定形式、在一点连续但不可导函数的例题等等，都是出于这样一种考虑而安排的．这是逻辑严谨性的一种体现．

在流行的教材中，将不定积分的换元积分法分为第一换元积分法和第二换元积分法，到了定积分的换元积分法时，就不再分为第一换元积分法和第二换元积分法了．这在自学者看来也颇觉诧异．在本书中，已将定积分的换元积分法分为第一换元积分法和第二换元积分法．当然，这也是逻辑严谨性的一种体现．

第四　恰当地联系实际

在介绍概念和定理时，必然要涉及到实际模型．而实际

模型是五花八门的，需要各种专业知识才能理解，而专业知识又不是人人都已具备的．因此，本书在选择实际模型时，尽可能选用涉及的专业知识不多，一般人都能理解的模型．我们认为，这样处理，会给自学者减少许多不必要的困难．

第五　介绍了一些比较艰深的数学问题

大家都知道，π 和 e 这两个数，不仅是无理数，而且是超越数．但是，怎样证明呢？在初等的微积分教材中一般不作介绍，因为，这是比较艰深的数学问题．本书引入了证明，这就会使自学者感到，尽管只学了一元函数微积分的基础知识，也可以解决一些比较艰深的数学问题．读者还能从中体会到方法的微妙，进一步激发学习数学的兴趣．

为节省篇幅，我们删去了各章的习题，但读者可参照我们编写的《中等数学习题集》第四册上的有关习题进行练习，以消化和巩固所学的内容．

总之，从主观上讲，我们力求按上述想法来编写本书，有的章节曾几易其稿．但由于我们学识浅薄，疏漏不妥之处在所难免，敬请读者不吝指正．

北京师范大学朱鼎勋教授为本书的附录作了详细的校阅，在此致谢．

陈伟侯　翟连林　段云鑫

1983．3．于北京

目　　录

第一章 函 数

函数是微积分研究的对象．在这一章中，我们把中学已经学过的函数知识加以概括、整理和深化，为学习微积分打好基础．

由于微积分是在实数集R内讨论问题的，因此在本章开头，有必要将中学学过的有关实数的性质作一简略地回顾．

第一节 实 数

1.1 实数系

从小学学习自然数开始，我们逐步扩充了有关数的知识，这个过程可列表如下：

$$
\begin{array}{l}
\text{自然数} \\
\quad\downarrow \\
\text{整　数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases} \\
\quad\downarrow \\
\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\end{cases} \\
\quad\downarrow \\
\text{实　数}\begin{cases}\text{有理数}\\ \\ \text{无理数}\end{cases}
\end{array}
$$

什么是有理数？如果一个实数，可以表示成为两个整数之比（分母不为0），就叫做有理数．因此，有理数又叫做比数．换句话说，可用十进位制记数法表示为有限小数（包括整数）和无限循环小数的实数，就叫做有理数，如：3，－2，2.1，$3.\dot{5}01\dot{2}$．

什么是无理数？如果一个实数，不能表示成为两个整数之比（分母不为0），就叫做无理数．因此，无理数又叫做非比数．换句话说，可用十进记数法表示为无限不循环小数的实数，就叫做无理数，如：π，$\sqrt{2}$，3.010010001…（0的个数有规律的增加）．

实数可以看作人们用度量单位对现实中对应的量进行测量的结果．人们日常测得的结果都是有理数，而且与那个客观存在的数大都有一定的误差．随着测量技术的改进，误差可以逐渐变小．这个事实反映到数学里来，就成为可用有理数去逼近任何一个实数，使得两者的误差越来越小．

在有理数集Q内，我们可以进行加、减、乘（包括乘方）、除（除数不为0）这四种运算，即

有理数＋有理数＝有理数，

有理数－有理数＝有理数，

有理数×有理数＝有理数，

有理数÷有理数（≠0）＝有理数．

换句话说，在有理数集合Q内，加、减、乘、除四种运算是封闭的．但是，对正有理数进行开平方运算，其运算结果就不一定是有理数．例如，$\sqrt{2}$ 就不是有理数了．

在实数集 R 内，我们可以进行加、减、乘(包括乘方)、除(除数不为 0)这四种运算，即

$$实数+实数=实数,$$

$$实数-实数=实数,$$

$$实数\times实数=实数,$$

$$实数\div实数(\neq 0)=实数.$$

对非负实数进行开方运算，其结果还是实数．但对负实数进行开方运算，就不一定是实数了．例如，$\sqrt{-3}$ 就不是实数。

由此可见，在实数集 R 内，加、减、乘、除四种运算仍然是封闭的。

1.2 实数轴

给定一条直线，规定它的正向，选定一个点叫做原点，选定一条线段作为长度单位（如图 1-1)．那么，对于每一个实数 x，在这条直线上总可以找到唯一的一个点与之对应；反之，对于直线上的每一个点，在实数集 R 中总可以找到唯一的一个数与之对应．这样，实数集 R 和这条直线上的点集之间建立了一一对应关系．这样的直线就叫做实数轴．

由于直线给人的直观形象是连续的，因此，实数集 R 又叫

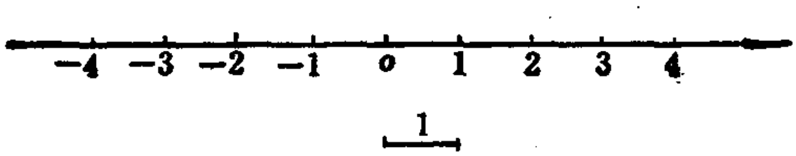

图 1-1

做连续统.

由于实数轴上的点和实数集R中的实数建立了一一对应关系，所以，今后我们常常用"点 x"来代表"实数 x". 换句话说，"点 x"和"实数 x"往往表示同一个意思.

给定两个实数a和 b，那么

$$a=b,\ a<b,\ a>b$$

这三个关系中，有且仅有一个成立. 这说明实数是有大小的.

给定实数轴上的点a和点 b，那么

a与b重合，a在b的左边，a在b的右边

这三个关系中，有且仅有一个成立. 这说明实数轴上的点是有顺序的.

这种点的顺序和实数的大小，我们可以用下面的式子联系起来:

点a在点b的左边$\Leftrightarrow a<b \Leftrightarrow a-b<0$,

点a在点b的右边$\Leftrightarrow a>b \Leftrightarrow a-b>0$,

点a和点b重合$\Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow a-b=0$.

要注意: 在实数轴上，两个点之间存在无限个点，这是明显的几何事实；在实数集R中，介于两个实数之间的实数也有无限个.

这就是说，下面的命题都是正确的:

两个不等的有理数之间，存在无限多个有理数；

两个不等的有理数之间，存在无限多个无理数；

两个不等的无理数之间，存在无限多个有理数；

两个不等的无理数之间，存在无限多个无理数.

这些命题的完整的证明，涉及到建立实数系的理论，本书就不讲了.

1.3 绝对值

我们把符号$|a|$读作实数a的绝对值，它是用下式来定义的:

$$|a|=\begin{cases} a\ (\text{当}\ a\geqslant 0), \\ -a\ (\text{当}\ a<0). \end{cases}$$

$|a|$ 在实数轴上表示什么意思呢？它代表点a与原点O之间的距离.

根据$|a|$的定义，我们有:

(1) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$;

(2) 如果 $k\geqslant 0$，那么 $|a|\leqslant k \Leftrightarrow -k\leqslant a\leqslant k$;

(3) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$;

(4) $\begin{cases} |a-b|\geqslant |a|-|b|, \\ |a-b|\geqslant |b|-|a|; \end{cases}$

(5) $|ab|=|a|\cdot|b|$;

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$.

利用数学归纳法，可以将性质(3)和性质(5)推广到任意个实数的和与积的情形，例如:

$$|a+b+c|\leqslant |a|+|b|+|c|;$$

$$|abc|=|a|\cdot|b|\cdot|c|.$$

实数a的绝对值的这些性质，在微积分中经常要用到，希望读者能够记住.

1.4 区间

实数集 R 有各种各样形式的子集，微积分学中所涉及的子集，通常是由介于两个给定实数之间的全体实数组成的，对这样的子集，我们规定了一个专门名称——区间：

介于某两个给定实数之间的全体实数叫做区间，这两个给定的实数就叫做区间的端点．

由于区间不一定包括端点在内，因而有必要加以明确规定．给定实数 a 和 b，$a<b$，那么：

$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，即介于 a 与 b 之间的全体实数，叫做闭区间，包括 a 和 b；

$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，即介于 a 与 b 之间的全体实数，包括 a 不包括 b，叫做左闭右开区间；

$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，即介于 a 与 b 之间的全体实数，不包括 a，包括 b，叫做左开右闭区间；

$(a, b)=\{x|a<x<b\}$，即介于 a 与 b 之间的全体实数，既不包括 a，也不包括 b，叫做开区间．

在数轴上，区间的意义就是一个线段，这个线段的端点就是该区间的端点，因此，在数轴上我们就得到上述四个区间的几何表示（如图 1-2）．

在图 1-2 中，如果区间不包括端点，那么端点就描成空圈．如果区间包括端点，那么端点就描成实圈．

在实数轴上，线段的长度就是它的两个端点坐标之差的绝对值．因此，上述区间的长度都是 $b-a$．

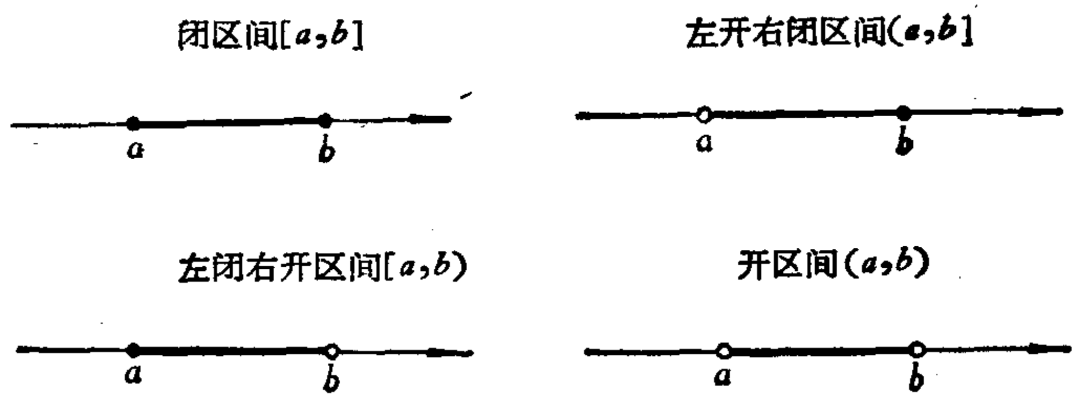

图 1-2

凡可计算长度的区间叫做有限区间. 我们还进一步规定不可计算长度的无限区间:

$(-\infty, +\infty)=\{x|x\in R\}$, 即整个实数轴上的点;

$(-\infty, b]=\{x|x\leqslant b\}$, 即不在 b 右边的全体点;

$(-\infty, b)=\{x|x<b\}$, 即在 b 左边的全体点;

$(a, +\infty)=\{x|x>a\}$, 即在 a 右边的全体点;

$[a, +\infty)=\{x|x\geqslant a\}$, 即不在 a 左边的全体点.

要注意: 符号"∞"读作"无限大(或无穷大)", "$-\infty$"读作"负无限大", "$+\infty$"读作"正无限大". 它们不是实数, 目前不能进行运算.

对于开区间 (a, b), 我们设想: 左边的端点 a 沿实数轴的负方向移动,移到无限远的地方去, 这时, 点 a 就被记成"$-\infty$"; 右边的端点 b 沿实数轴的正方向移动, 移到无限远的地方去,这时,点 b 就被记为"$+\infty$". 按照这种想象,$-\infty$ 是实数轴的负方向上的无穷远点; $+\infty$是实数轴的正方向上的无穷远点. 有时, 把正无穷远点和负无穷远点统称为无穷远点,记作"∞".

设 a 和 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,则

$$(a-\delta,\ a+\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

在实数轴上,这一集合的几何意义是一个不包括端点 $a-\delta$ 和 $a+\delta$ 的线段,线段的中点是 a。

我们把区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 叫做点 a 的 δ 邻域,a 是该邻域的中心,δ 是该邻域的半径. 邻域这个概念在微积分学中要经常用到,但在本书中往往被说成"在点 a 及其附近".

对于不包含中心 a 的邻域 $(a-\delta,\ a)\cup(a,\ a+\delta)$,叫做 a 的空心邻域,在本书中往往被说成"在点 a 附近,但不包含 a"。

第二节 函 数

2.1 变量与常量

我们知道,客观世界是在不断地发展和变化着的. 要认识和改造客观世界,就必须首先观察和研究各式各样的变化着的量以及它们之间的关系.

例 1 民航客机从北京飞往广州. 在这一飞行过程中,飞机中的乘客人数,行李重量,飞机的容积等等都是数值保持不变的量;而飞离北京的时间,飞行速度,贮油量,飞离北京的距离等等,都是数值起变化的量.

在某个变化过程中,可以取不同数值的量,叫做这个变化过程中的变量;只能取同一数值的量,叫做这个变化过程中的常量.