

益,他们能够献身祖国的事业。为了国家的荣誉,他们能有强烈的竞争意识。他们具备唯物辩证的思想方法,也具备忍得住清贫的踏实、严谨、苦干的工作作风。没有一批具备这种素质的年轻力量,要想抵御外界的人才争夺,要想使还没有达到中等发达水平的中国超越西方发达国家都是不现实的。

4 规划与组织

在谈到土木工程的科研工作时,应该首先探讨一下土木工程学科的特点。土木工程学科最大的两个特点就在于它的“个性”和“综合性”。有人描述这个“个性”为“本土性”。许多工业系统是可以引进的,甚至可以全套照搬;但是土木工程不行。即便是外国人设计,也要考虑中国的国土条件,因为工程是建在中国的土地上。即便是外国人管理,多半也需要中国的工人从事第一线建设。不了解中国的国情,在中国的工程就难搞好。正由于这种“个性”,国外提出要像训练医生或律师一样用七年八年来训练土木工程师。土木工程学科的另一特点是“综合性”,这是不言而喻的。土木工程技术人员在工作中往往要面对一个复杂度很高的开放的人机系统,各种专业都在这个系统中发挥一定的作用,组织、运转、协调这个系统绝非易事。在千头万绪的科研工作中,有两件事十分重要:

(1) 必须结合我国国情,特别是考虑在相当长的时间内,由于我们人口负担过重所造成的能源不足,水资源和耕地缺乏,应谨慎而准确地制定各学科发展战略。特别要注意不使西方发达国家在他们发展过程中由于当时缺乏对可持续发展的认识,所造成的错误与严重后果在中国的土地上出现。

(2) 必须考虑到我国在相当一段时间里教育和科研投入的不足和专业人员的缺乏,应认真组织跨学科的“团队”作战。也就是说,在重大的研究项目上,仍要发扬“两弹一星”的精神,组织起来,使我国能在较短的时间内在急需的领域内出现整体的世界水平的成果。

5 结束语

在 21 世纪来临的前夕,我们已经看到中国土木工程界存在着一个可能超越西方发达国家的机遇。在中国近代史上,这种机遇并不多,我们应该抓住这个机遇,努力工作,改进我们的不足,实现这个超越。希望寄托在我国青年科技工作者身上。

内 容 简 介

本书是中国科协第20次“青年科学家论坛”——《二十一世纪土木工程学科的发展趋势》报告论文集。本次论坛活动邀请了活跃在我国土木工程教育、学术、设计、工程与企业界科研第一线、已经取得突出成就的近30位年轻博士和教授参加。共收集论文27篇,这些论文反映了近年来我国土木工程青年科学家们在“土木工程的设计与分析方法”、“土木工程中的减灾与防灾问题”、“土木工程施工、维修与管理问题”、“土木工程中的重大结构与关键技术”等研究领域所取得的最新的研究成果和发展动向,同时也反映了未来三到五年内,亦即跨世纪时期,我国新一代土木工程科技工作者在理论研究和工程实践方面的创新和发展趋势。

本书可供高校土木工程系的师生,工程技术人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

二十一世纪土木工程学科的发展趋势:中国科协第20次“青年科学家论坛”报告文集/袁驷等主编. —北京:科学出版社,1997.6

ISBN 7-03-006042-3

I. 二… I. 袁… II. 土木工程-技术发展-远景-文集 IV. TU-53

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第07183号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1997年6月第一版 开本:787×1092 1/16

1997年6月第一次印刷 印张:17 1/2

印数:1—1 000 字数:423 000

定价:35.00元

前 言

当前以及跨世纪前后的相当一个时期,我国都将进行着有史以来最大规模的基本建设。现代化的铁路公路运输网络、跨江越海的桥梁和隧道、高耸入天的电视塔和高楼大厦、人口聚集的城市居住群等等巨大工程已经在我国到处可见。可以说,我们面临着一个伴随着国民经济飞跃的土木工程大发展的大好时期。这样一个优良的发展环境已经受到并将继续受到西方发达国家的急切关注。

作为跨世纪的一代,我们深受这一大好形势的鼓舞,它为我国青年土木工程科技工作者提供了空前难得的施展才干、向国际水平冲击的良好机遇。同时,我们也深深感到,这是一个“机遇”与“挑战”并存、“合作”与“竞争”交织、“创新”与“循旧”相争的时代,如何把握住世纪之交时土木工程学科的发展趋势,培养造就一大批新世纪的优秀人才,开创具有中国特色、具有国际一流水平的土木工程学科的新纪元,是对我们这些跨世纪一代人的严峻挑战。

面对上述形势,在这即将进入 21 世纪的前夕,利用中国科协为我国青年科技工作者提供的“青年科学家论坛”这一学术交流园地,将活跃在我国土木工程教育、学术、设计、工程与企业界中的一批已经取得突出成就的青年科学家共聚一堂,在一个高水准、融洽和谐的学术氛围里,增进新的学术思想和学术观点的交流,研讨 21 世纪土木工程学科的发展趋势以及相应的队伍组织和人才培养的发展战略与对策,具有十分重要和深远的意义。

为了达到上述目的,1996 年初由清华大学土木工程系的袁驷教授和张跃博士发起向中国科协提出了举办题为《二十一世纪土木工程学科的发展趋势》的“青年科学家论坛”活动的建议,这一建议得到了哈尔滨建筑大学欧进萍教授和同济大学吕西林教授以及其他多位青年科学家们的热情响应和支持,并获得了中国科协“青年科学家论坛”组织委员会的正式批准与支持。

此次论坛活动为中国科协第 20 次“青年科学家论坛”,于 1997 年 6 月 7 日到 9 日在北京举行,由上述四位教授、博士担任执行主席。论坛的主要报告和讨论的议题为:

1. 土木工程的设计与分析方法;
2. 土木工程中的减灾与防灾问题;
3. 土木工程施工、维修与管理问题;
4. 土木工程中的重大结构与关键技术;
5. 土木工程队伍组织发展与人才教育培养;

近 30 位特邀的青年科学家参加了论坛活动,并专门为此次论坛撰写了综述性的学科前沿方面的学术论文。这些论文反映了近年来我国土木工程青年科学家们各自研究领域的最新的研究成果和发展动向,同时也反映了未来三到五年内,亦即跨世纪时期,我国新一代土木工程科技工作者在理论研究和工程实践方面的创新和发展趋势。

在国家自然科学基金委员会和清华大学土木工程系的共同资助下,在科学出版社的大力支持下,在各位青年科学家的积极主动配合下,我们协同国家自然科学基金委员会正式编辑出版了这次论坛活动的报告论文集。为了表示对清华大学土木工程系为论文集出版所给予的大

力支持与资助的感谢,我们邀请了清华大学土木工程系系主任刘西拉教授为本文集写了一个序。最后,我们感谢中国科协为我们提供了“青年科学家论坛”这一极好的交流园地,也感谢每一位与会青年科学家和论文作者的贡献。

袁 驷 张 跃
1997 年 3 月于清华园

序:迎接 21 世纪的挑战

刘西拉

(清华大学土木工程系)

我们怀着十分喜悦的心情,在这个中国近代史上值得记忆的 1997 年,在我们祖国首都北京欢迎来自各地的土木工程界高层次的青年学者们。我们十分感谢中国科协和国家自然科学基金委员会能支持这个有关“21 世纪土木工程学科发展趋势”的研讨会。这次出版的文集中收集了这次研讨会上发表的 27 篇有关 4 个分主题的综述论文。从这些有着闪光思想的论文中可以看到年青作者们对我们共同的土木工程事业的殷切关心和热情支持,也可以看到中国未来土木工程的希望。我们特别赞赏这些年青作者们都是数年如一日地踏踏实实地默默无闻地在中国的土地上为中国的土木事业发展而奋斗。他们有理想,有干劲,也有大量的成果。作为东道主单位,特为论文集写了一个序,谈一个我们共同关心的议题,以相互勉励。不当之处,望批评指正。

1 严峻的挑战

世界即将跨入 21 世纪。记得在 1987 年,我们在国家自然科学基金的资助下研究结构工程学科跨世纪的战略规划时,当时 21 世纪离我们似乎还很遥远,现在却是可以听到她的脚步声了。正如大多数人所预料的那样,在这世纪之交的 20 至 30 年内,世界经济发展的热区将从环太平洋的东海岸移到西海岸,而中国就是这个热区中的热点。随着改革开放的不断深入和经济的迅速发展,中国将面临一个更大规模的建设高潮。这种形势为中国土木工程各学科的发展提供了一个难得的发展环境,这一优势甚至西方也不具备。我们能不能把握好这个千载难逢的机遇,能不能准确判断学科发展的趋势,能不能按新世纪的要求精心培养造就我们的队伍,能不能在土木工程领域里带头超越西方发达国家,这是一个严峻的挑战。

2 机遇与危机

人口城市化是一个不可逆转的趋势。根据国际上发展中国家的资料统计,当城市人口接近总人口的 30%—40% 时不可避免地要出现经济的腾飞和基本建设的高潮。当今的中国正处在这个时期。可以说,我们正在从事世界上最大规模的基本建设。可以肯定,不仅在整体规模上,在单项上中国也会出现一批世界一流的项目。我们应该充分利用这一大好发展背景来促进我国的科技进步,缩小自己国家与西方的差距。然而,如果我们不能充分把握这个机会,也完全可能丧失良机甚至一事无成,这是应该引起注意的。

目前中国正处在一个从社会主义计划经济向社会主义市场经济转轨时期,这对土木工程学科的发展同时具备正、负面的影响和冲击。正面的影响在于:由于在今后相当一段时期内,投

• iii •

入不足,迫使教育和科研更面向工程和社会。这无疑是一个巨大的促进。高楼深院式的土木工程高等教育和科研单位势必在此压力下出现根本改变。负面的冲击在于:教学科研的骨干忙于开发,在教学和纵向科研上投入越来越少。

“文化大革命”停止教育 10 年,使我们队伍中出现年龄“断层”和技术上的“软弱层”。与国际水平相比,我们 45 岁以上的技术骨干平均年龄比国外大 10 岁,这正是“文化大革命”的结果。渡过这个“断层”的办法可以有两种,一种是大胆的启用年青力量,特别是启用我国实行学位制度以后培养出来的许多优秀青年人才。这种“跨越式”的启用年青人可以较快地更新许多陈旧的学术环境,大幅度地降低骨干队伍的平均年龄。另一种是按步就班地“自然”更替,这样的后果,表面上平稳,实质上会严重影响年青科技人才的发展,在学科上贻误我们参与国际竞争的时机。

总之,我们正面临一个大发展、大变动和大换班的形势,在这个形势下,危机和机遇并存。我们不仅应该有力争国际一流的意识,也应该特别强调危机意识和紧迫感。

3 目标和差距

我们能不能在土木工程领域树立争国际一流的意识,这需要对我们的目标和差距进行一些分析。所谓“一流”包括两个含义:一是要造就一流的有社会主义觉悟的技术人才,一是要出一流的符合我国国情需要的科技成果。当然,首先是人才。

在谈人才之前,我们应该区别一下工程技术人员和科学家的不同。科学家是从事“认识自然”工作的,他们的约束仅仅是自然规律;而工程技术人员是从事“改造自然”工作的,他们的约束不仅是自然规律,而且有社会规律。因此,从事工程技术方面工作的人员不可能不接触其他人,不可能不与社会打交道。任何一个工程方案的完成都是某种“社会活动”,决不可能靠一个人在房间里独自完成。任何一个工程一般都不会只有一个“唯一解”,往往得到的是一组“可行解”。因为我们不可能把有关这个工程项目的信息的不确定性和不确知性都解决。在大多数情况下,我们是在众多的解答中选一个各方比较满意的“满意解”。就是这个“满意解”在工程实施过程中也往往要进行修改。因此,对一个工程技术人员的贡献要求与科学家是不同的。科学家的贡献主要强调创造性;但对工程技术人员来说,首先要解决工程技术问题,完成工程任务,这本身就是贡献。此外,只要有助于工程应用,创造是贡献,集成别人的成果也是贡献,移植或传播新技术都可以算作贡献。

21 世纪对人才的要求应该有更高的标准,如:

(1) 具备完整的知识结构以适应现代工程科技发展的需要,即在工程实践、理论修养和计算能力三个方面有严格的高水平的训练。这三方面的要求缺一不可,否则在今后的竞争中就会十分被动。

(2) 具备工程分析、系统工程和社会工程的知识层次。也就是说,他们不仅应该具备分析的能力,而且应该能从系统工程和社会工程的水平上去思考、规划、衡量、安排自己的研究工作。

(3) 不仅具备创新的能力,更加需要具备适应的能力和合作的能力;此外,还要有交流的能力和组织的能力。

当然,最重要的是:他们应该具备高尚的道德文化修养和思想品质。为了国家和民族的利

目 录

1. 袁 驷,面向“常微”的半解析结构分析方法	1
2. 张 跃,结构模糊随机系统分析与设计理论的发展和展望.....	11
3. 欧进萍,钢筋混凝土结构地震损伤理论与应用.....	24
4. 吕西林、吴晓涵,结构抗震研究的新进展	36
5. 茹继平,大型复杂结构体系的关键科学问题及研究	46
6. 马智亮,土木工程施工中的计算机应用与 CIC 和 CALS	54
7. 王复明、刘文廷,路面无损检测与评价技术的研究与应用	65
8. 牛荻涛,服役结构的抗力衰减模型与可靠性研究.....	74
9. 田志敏、钱七虎,地下工程爆炸震动防护研究进展	83
10. 李小军,地下隧道式结构动力分析方法研究	94
11. 李宏男、贾 影,调液阻尼器减振研究的现状与展望	105
12. 李 杰,复合工程系统灾害反应分析与系统控制	114
13. 李国强,我国高层建筑钢结构的发展及存在的主要问题	124
14. 李爱群、瞿伟廉等,高层高耸结构的混合振动控制	135
15. 陈云敏,土的动力特性及测试方法的现状与发展	144
16. 杜修力,高拱坝抗震研究	152
17. 张鸿儒,土-结构动力相互作用理论与应用	159
18. 杨 敏,岩土工程设计理论的发展——以变形控制为设计原则	170
19. 金伟良,具有结构-桩-土相互作用的结构体系承载能力的概率分析	179
20. 金 星、崔 杰,我国防震减灾体系及地震工程研究中的若干问题	190
21. 周绪红,冷弯薄壁型钢受压构件稳定性研究综述	198
22. 赵成刚、王元丰,固体、流体多相孔隙介质中的波动理论及其数值模拟的进展	207
23. 郭彦林、Xiao-Ling Zhao,轻型钢结构建筑体系的发展趋势及存在的问题	218
24. 顾 明,桥梁风致振动及控制的理论与应用	231
25. 顾 强,钢结构在地震荷载作用下的破坏机理及抗震设计对策	241
26. 栾茂田,关于岩土力学与岩土工程研究中若干问题的思考	247
27. 韩林海,钢管混凝土结构的特点及发展	261

面向“常微”的半解析结构分析方法*

袁 驹

(清华大学土木系)

摘要:随着现代计算技术的发展,出现了一类新型的、面向求解常微分方程的半解析结构分析方法。与目前广泛采用的基于代数方程求解的方法相比,该法定位于一个更高的计算平台,展现了广阔的、崭新的研究领域。本文对半解析法的这一新走向作了介绍和评述,回顾了线法、Kantorovich 法等经典方法,列举了一系列有代表性的新方法,包括:常微分方程求解器法、参数差分线法、有限元线法、延拓 Kantorovich 法、形函数优化法、有限元网络法,以及其它方法。文中对该类方法的发展潜力和前景作了分析和展望。

1 引言

综观横览目前结构分析中常用的各种方法,如:有限元法、有限差分法、加权残值法,等等,都是想方设法将问题转化为代数方程问题,以代数方程的解答来近似原问题的解答。因此从共性上来讲,目前的绝大多数方法是面向代数方程求解的方法,即使是有半解析之称的有限条法、边界元法等也不例外。这里面主要的原因之一是人们对代数方程的求解比较有办法,特别是计算机出现之后,求解能力获得了巨大的解放,发展了一些很有效的代数方程求解器,使得面向“代数方程”的方法得以迅速的发展,取得了巨大的成功。理论上讲,只要计算机的资源允许方程组阶数的不断增加,再复杂庞大的问题也能计算求解。

然而,工程中很多问题在理论上并不直接归结为“代数方程”问题,而是归结为对“微分方程”的求解,如:偏微分方程(Partial Differential Equation,简称 PDE)或常微分方程(Ordinary Differential Equation,简称 ODE),只是在人为的离散近似之后才转化为目前普遍应用的代数方程。这里,在原偏微分方程问题的解析方法和全离散后的代数方法之间,存在着一类半解析半离散的常微分方程方法。该类方法比求解代数方程的方法在求解方式上高一个层次,也更接近于原工程问题的理论模型。受分析手段的限制,多年来该类方法几乎无任何进展。

但是,随着近年来计算技术和软件的发展,直接对常微分方程进行高效求解已成为可能,这就促使半解析法的研究有了一个新的取向,即以求解常微分方程作为基本的求解手段,以常微分方程的解近似偏微分方程的解的方法。该类方法可以直接对“常微”问题进行求解,而对“偏微”问题则想方设法将之转化为“常微”问题后求解。因此这类方法是面向常微分方程求解的方法,我们将之简称为面向“常微”的方法。本文对面向“常微”的方法的概貌作一描述,文后所列的几篇参考文献中包含了多数参考文献,限于篇幅,文中不一一列出。

* 国家自然科学基金、国家杰出青年基金、教委博士点基金及优秀年轻教师基金资助项目。

2 ODE 求解器

面向“常微”的方法得以问世发展的先决条件是要有较好的办法对一般的常微问题进行精确、高效、可靠的求解。这就需要高质量、高效能、通用的常微分方程(ODE)求解器。

早在 1975 年,著名的数值分析专家 Keller 便预言道:“各种迹象相当清楚地表明,再有 10 年或更短的时间,求解 ODE 边值问题的标准计算软件便会问世”。事实证明这一预言是正确的。自 70 年代末 80 年代初以来,一系列的 ODE 通用求解程序相继问世并在不断更新。

在目前众多的求解器中,从性能、功能及使用的广泛性及可靠性来看,COLSYS 较为突出。COLSYS 程序以样条 Gauss 配点法直接求解混合阶的 ODE 体系,共含有约三千条标准 FORTRAN 语句。可解线性及非线性方程,具有可靠的误差估计、误差重分布、网格自动调节等先进的自适应求解功能,以满足用户预先对解答精度所指定的误差限,因而对一般的 ODE 问题,均能给出数值解析解的精度。本文所提到的工作,均是由 COLSYS 计算的。总之,COLSYS 使用方便,性能优越,功能较强,是面向“常微”方法的较好的支撑软件。更详细的说明见有关文献。

3 ODE 求解器法

ODE 求解器大都是按照某种标准 ODE 形式研制的,而工程中大量的 ODE 问题呈现为非标准的特殊形式,难于直接求解。为了克服这一困难,我们精心提炼了三个 ODE 变换技巧,从而能方便灵活地将大批特殊问题转化为标准形式,然后统一地调用 ODE 求解器进行高精度高效率的求解。这三个 ODE 技巧分别为:

(1) 平凡 ODE(Trivial ODE)技巧:对某些未知待定的物理常数 α (如特征值、拉氏乘子、应力强度因子、弹塑性交界点坐标值等)建立形如 $\alpha' = 0$ 的平凡 ODE,从而在保证 α 为常数的前提下将其引入到 ODE 体系中去求解。

(2) 区间映射(Interval Mapping)技巧:将非规则的、不确定的、甚至于无穷长的求解区间映射为确定的标准的区间。如 $\eta = (x-a)/(\xi-a)$ 可将不定区间 $[a, \xi]$ (ξ 为未知待定)映射到确定的区间 $[0, 1]$ 上,使 ODE 有了明确的定义域。

(3) 等价(Equivalent) ODE 技巧:将积分式

$$\bar{W} = \int_a^b F(t; \{y(t)\}) dt \quad (1)$$

化为如下的等价的 ODE 问题

$$\begin{aligned} R'(x) &= F(x; \{y(x)\}) & a < x < b \\ R(a) &= 0, & R(b) &= \bar{W} \end{aligned} \quad (2)$$

这一技巧已成功地应用于处理特征函数的归一化条件等。

这些变换技巧的联用将各类特殊的线性及非线性 ODE 问题变换为标准的统一的形式,既便于理论分析也便于数值计算,极大地增强了求解器的求解力及覆盖域,提高了分析计算人员的效率。

ODE 求解器以及上述的变换技巧的联合应用构成了 ODE 求解器法。该法以其简便灵活、高效实用、精确可靠为主要特征,迅速地显示出普遍的应用价值。几乎所有的一维问题,或难或易,或线性或非线性,均可应用。

ODE 求解器法应用例子很多,这里难于一一提及,可参阅有关文献,如文献[1]。

4 差分线法

差分线法是指经典的线法(Method of Lines,简称 MOL),由于后来出现了以有限元为离散手段的有限元线法(第 7 节),所以为区分起见,将经典的以差分为离散手段的线法称为差分线法(Finite Difference Method of Lines,简称 FDMOL),而将两种线法统称为线法(MOL)。

差分线法的思想和作法非常简单:用平行规则的网线代替差分法中的网点对区域进行离散,线之间以差分算子近似微分算子,最后归结为 ODEs 的求解。例如,对于矩形域上的 Poisson 方程(弹性扭转问题)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \tag{3}$$

用具有 $O(h^2)$ 阶精度的三点中心差分直接替换以上方程中的 $\partial^2 u/\partial x^2$,便可得到一组定义在离散线 $x=x_i$ 上的 ODEs:

$$u_i'' = -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - 2 \quad i = 0, 1, \dots, N \tag{4}$$

其中 $u_i = u_i(y) = u(x_i, y)$;引入适当的边界条件(简称 BCs)后,便可求解。

可见,差分线法是差分法的发展,可看作是半解析的差分法。前苏联、欧美对该法几十年的研究没有造成声势,主要受阻于两点:1) ODE 体系的求解;2) 规则区域的限制。难点一已由近年来出现的 ODE 求解器解决;为了克服难点二,我们提出了参数化差分线法。

5 参数差分线法

如前所述,差分线法简便易行,可直接对控制微分方程离散,无须能量泛函,若能方便地求解任意区域上的问题,则可望成为一种通用有效的方法,特别对于某些没有能量泛函(如流体力学)问题。借助于参数变换技巧,我们提出了参数化差分格式^[1]。如图 1 所示,首先将非规则区域上用非等长线划分的网格映射为规则区域上规则的网格,并采用局部参数坐标 $t \in [-1, 1]$ 作为自变量,则可以建立(以 $\partial^2 u/\partial x^2$ 的近似为例)形如下式的 $o(h^2)$ 阶精度的三点差分格式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_i} &= \frac{u_j - 2u_i + u_k}{h^2} - \frac{u'_{yj}b_j + u'_{yk}b_k}{h^2} \\ &+ \frac{(2b_j - b_k)(b_j + b_k)u''_{yj} + 2(b_j^2 - b_jb_k + b_k^2)u''_{yy} + (2b_k - b_j)(b_j + b_k)u''_{yk}}{6h^2} + O(h^2) \end{aligned} \tag{5}$$

式中, $u'_{yi} = du_i/dy, b_j = y_j - y_i, b_k = y_k - y_i$ 。可以看出,当各线等长时, $b_j = b_k = 0$,退化为规则的差分格式。

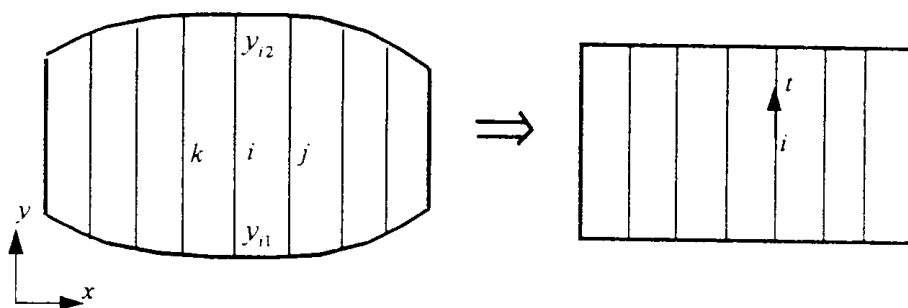


图1 参数线映射

一阶到四阶导数的参数化差分格式均已成功地建立,并用于分析了一批二阶和四阶(薄板弯曲)方程问题。参数化差分格式虽比规则的差分格式略多几项,但仍以显式给出,并且具有理想的二阶精度。另外值得一提的是,线法的半解析性质决定了它可以比全离散的差分法提供更为丰富的求解信息(如线方向的导数信息),而恰恰是这些特有的信息的合理应用才使得非规则网格上的参数差分格式成为可能;换言之,是线法的半解析的性质帮助我们克服了规则区域的限制,而导数的参与对于通用的 ODE 求解器来讲并不增加求解困难。目前,参数差分格式还只限于平行的格线,非平行线以至于曲线网格上的参数差分格式的建立一个有待于研究的课题。

6 Kantorovich 法

面向常微的方法系列中另一大类方法是基于能量变分法的方法,其中最具有代表性的经典方法是 Kantorovich 法。Kantorovich 法通常将试探函数设为如下的形式:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n \bar{X}_i(x) Y_i(y) \quad (6)$$

式中,各项 x 方向的变化假定为 $\bar{X}_i(x)$,通常取整体多项式或解析函数(如三角函数)系列;对 y 方向的变化 $Y_i(y)$ 则不作任何人为假定,由泛函变分导出的常微分方程组解出。经典的 Kantorovich 法是经典的 Ritz 法在半解析方向上的发展,求解精度高为大家所熟知,但多年来求解 ODEs 的困难一直是影响该类方法发展的重要因素。ODE 求解器的出现使这一困境得以解脱,使得这类方法有了重大的新发展,派生出来一系列新型的半解析方法,如下面讨论的有限元线法、延拓 Kantorovich 法、形函数优化法、有限元网络法等等。其中以下节介绍的有限元线法最富有特色和代表性。

7 有限元线法

有限元线法(Finite Element Method of Lines,简称 FEMOL)^[1]是作者于 1989 年在国家自然科学基金支持下率先创立的一种以常微分方程求解器为支撑软件的半解析数值方法。该法以一组结线对任意区域进行划分,结线方向通常取在未知量变化较为复杂剧烈的方向;然

后利用有限元作为离散手段,对能量泛函进行半离散,并由其变分导出定义在结线上的常微分方程组和全部边界条件;最后调用 ODE 求解器进行求解,得到满足用户预先指定的误差限的 ODE 解答,以此作为原问题的近似解。

该法自开创以来,经过几年的开发研究,已取得了令人瞩目的进展。初步形成了独特的理论体系与实施方案,在线弹性领域内已趋于成熟,在非线弹性领域内也已取得了一系列的成功。文献[1]是国内外关于有限元线法的首部英文专著,基本上总结了我们的 1994 年以前的工作,详尽内容可在该部专著中找到。文献[2]是一更为新近的综述文章,亦可作为参考。

就目前的发展状况来看,有限元线法是面向常微方法研究中的重头戏,下面对其的一些主要特点和成果作一简要的评述。

7.1 标准的曲线曲边单元

对于一般的 C^0 问题均可建立曲线曲边参数 FEMOL 单元。图 2 所示为一典型的二次单元映射。一般的 p 次单元映射为

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{P+1} N_i(\xi) x_i(\eta) \\ y &= \sum_{i=1}^{P+1} N_i(\xi) y_i(\eta) \end{aligned} \tag{7}$$

其中 N_i 为 p 次 Lagrange 插值形函数。单元上的位移向量 $\{u\}$ 在结线上任其未知待定,结线之间用适当的形函数对结线位移插值而成,即

$$\{u\} = [N(\xi)]\{d(\eta)\}^e = [N]\{d\}^e \tag{8}$$

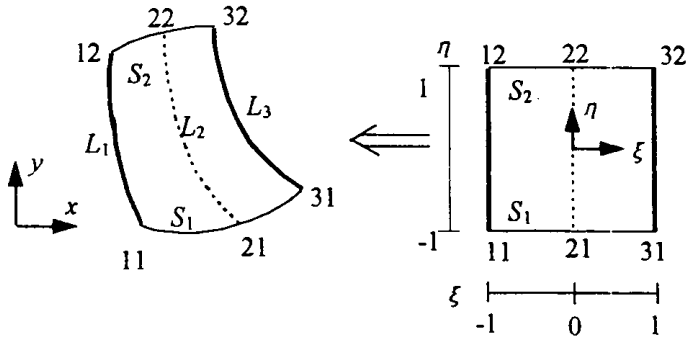


图 2 典型的二次 FEMOL 单元映射

这里, $[N]$ 为单元形函数阵, $\{d\}^e$ 为单元结线位移向量,依问题的不同而含有不同的自由度。由最小势能原理或虚功方程,可导出形如下式的一组二阶 ODEs

$$[A]\{d''\} + [G]\{d'\} + [H]\{d\} + \{F\} = \{0\} \quad -1 < \eta < 1 \tag{9a}$$

以及三类标准的端点边界条件(BCs)

- (1) 固定端点自由度: $d_m = \bar{d}_m$
- (2) 载荷端点自由度: $Q_{jm} = \eta_j P_{jm}$
- (3) 交接端点自由度: $d_m = d_n, Q_{jm} + Q_{jn} = \eta_j (P_{jm} + P_{jn})$

其中 $\{d\}$ 为总体结线位移向量, d_m 为 $\{d\}$ 中的第 m 个分量, $(\)'$ 表示 $d(\)/d\eta$ 。式(9a)和(9b)构成了标准的 ODE 两点边值问题,可直接调用求解器求解。

7.2 误差估计与精度分析

作为半解析法, FEMOL 在结线方向由 ODE 控制,在离散方向则由有限元插值控制,因此直观上看,宜将结线沿解答变化复杂剧烈的方向布置,而仅对较为平缓易解的方向进行离散,这样便可充分发挥该法的半解析的优势。庞之垣在文献[5]中所作的误差分析证实了这一点:即 FEMOL 的误差与有限元法具有相同的收敛阶,但不依赖于真解在结线方向的变化。

7.3 “三角形”单元 —— 边与线的退化

FEMOL 的合理有效应用要求在网格划分上能有较大的灵活性与任意性。如果允许单元的结线或端边退化,则在网格划分上便有了相当大的灵活与方便。我们对各种边线退化的情况系统地作了理论分析,去掉了各种映射中人为的奇异性,合理地导出了各种退化单元的计算公式与定解条件。这实际上相当于为 FEMOL 配备了一族“三角形”单元,使 FEMOL 特有的半解析的效力更加顺乎人意地得以发挥。

7.4 特殊单元

- 到目前为止已经建立的特殊单元有:
- 弹性力学三维空间问题的棱柱形曲线曲边单元。
 - C^1 类薄板弯曲的矩形单元。该单元每条结线上仅两个自由度(挠度与法向转角),精度高收敛快。非矩形 C^1 类薄板单元目前尚为空白。
 - 用于裂纹或 V 型切口等奇异性问题的奇异元。作法是将结线取为射线方向,同时结线映射采用特殊的奇异映射: $\eta = -1 + 2(r/L)^{\frac{1}{2}}$,其效果是将真解中 $r^{\frac{1}{2}}$ 的多项式变换为 η 的多项式,使求解极为容易,且适于任何的 V 型张角。这一点比有限元中 1/4 结点的作法适用上更为广泛,也更精确。
 - 用于无穷域上问题的无穷单元。作法是引入了无穷结线映射。无穷线映射一举两得:一方面将无穷长区间映射到标准区间 $[-1, 1]$,另一方面改变了解的性质,由原来的 $1/(r+a)$ 的多项式改变为局部坐标中 η 的多项式,使求解大为容易。FEMOL 无穷元的一个特点是中间结点的位置只稍稍影响求解时间而不影响解答精度。

7.5 通用程序 FEMOL95 for Windows

FEMOL95 for Windows 是在 FEMOL92^[4]通用程序基础之上,伴随着 FEMOL 研究的最新版本。该软件的核心计算程序采用 Fortran 90 编制,具有高度的动态内存管理和模块封装等特性。计算平台采用 MS Visual Basic 开发而成,界面友好且集成度高。整个程序可在中文或英文(外挂中文平台)Windows 3. x, Windows 95/NT 下运行。

表 1 FEMOL95 for Windows 程序的解题范围

序号	问题类型	直角坐标	极(柱)坐标	位移自由度
1	Poisson 方程	(x, y)	(r, θ)	u
2	平面应力	(x, y)	(r, θ)	u, v
3	平面应变	(x, y)	(r, θ)	u, v
4	三维轴对称应力	(r, z)	(R, φ)	w, u
5	中厚板弯曲	(x, y)	(r, θ)	w, Ψ_x, Ψ_y
6	中厚扁壳弯曲	(x, y)	(r, θ)	u, v, w, Ψ_x, Ψ_y
7	三维空间弹性体	(x, y, z)	(r, θ, z)	u, v, w
8	三维 Poisson 方程	(x, y, z)	(r, θ, z)	u
9	旋转薄壳(混合法)		(r, θ, z)	$u, v, w, \Psi_\varphi, \Psi_\theta$
10	旋转中厚壳(混合法)		(r, θ, z)	$N_\varphi, N_\theta, Q_\varphi, M_\varphi, M_\theta$ $u, v, w, \Psi_\varphi, \Psi_\theta$
11	旋转中厚壳(位移法)		(r, θ, z)	$N_\varphi, N_\theta, Q_\varphi, M_\varphi, M_\theta$ $u, v, w, \Psi_\varphi, \Psi_\theta$
12	旋转弹性体		(r, θ, z)	u, v, w
13	旋转域 Poisson 方程		(r, θ, z)	u

该程序具有对表 1 所示全部问题进行线弹性分析、振动特征值求解以及温度应力的分析计算等功能,是一富有特色、富有竞争力的软件系统,在一大批实际应用及计算中表现出色。特别是对于某些较难的问题,如应力集中,应力奇异,几乎不可压缩材料,狭长区域、无穷域问题等效力更为突出。

FEMOL 在非线性问题中也有一系列成功而富有特色的应用。总之,FEMOL 已建立起一套严紧且系统的基本理论,为线性及非线性应用打下了扎实的理论基础。

8 延拓 Kantorovich 法

前面所讨论的方法,均为单一方向求解常微的方法,而另一方向仍要人为的离散,其结果是解答的精度在一个方向高,在另一个方向低;我们不妨将此类半解析方法称为“单向解析法”。“单向解析”既是这类方法的优点,也是这类方法的缺点:优点是至少与全离散法相比可以免除一个方向的忧虑,缺点是仍有另一个方向的忧虑与困扰。这样,如何使问题求解的解析度提高,至少使另一方向具有同等的解析度,实现解答的各向同性,纠正“一手硬,一手软”偏误,便成为人们思考和研究的新课题。

新近的研究表明,确实存在一大类“双向解析法”^[3],可以弥补“单向解析法”的“先天不足”。这类方法中,较为经典的是 Kerr 提出的延拓 Kantorovich 法 (Extended Kantorovich Method) 以及我们对该法的具有重要意义的新延拓、发展与推广。

延拓 Kantorovich 法将一个 n 项的试探函数取为

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n X_i(x) Y_i(y) = \{X(x)\}^T \{Y(y)\} \quad (10)$$

与经典的 Kantorovich 法相比,这里去掉了对任何方向变化的人为假定(即去掉了上表示人为给定的一横道)。将这样的试探函数代入泛函,可导出两组耦合的 ODEs:

$$[L_1(\{X\})]\{Y\} = \{F_1(\{X\})\}, [L_2(\{Y\})]\{X\} = \{F_2(\{Y\})\} \quad (11)$$

以第一组方程为例, $[L_1(\{X\})]$ 是常微分算子矩阵, $\{F_1(\{X\})\}$ 是荷载向量,其中各系数由 $\{X\}$ 的某种能量积分形成。延拓 Kantorovich 法的作法是:首先做一个 Kantorovich 法的求解,即事先人为给定 $\{X\}$,解第一组方程得到 $\{Y\}$;然后用此 $\{Y\}$ 建立第二组方程,求解后得到一新的改进的 $\{X\}$,反复这一迭代过程直至得到满意结果。

由于求解 ODEs 的困难,该方法一直没有得到应有的发展。在早期的工作中,几乎毫无例外的采用一项试函数,以避免求解常微分方程组。近来,我们采用 ODE 求解器,引进了多项试探函数,拓宽了应用领域,使该法获得了新的发展。研究表明,延拓 Kantorovich 法具有以下几个特点:1) **双向解析**:两个方向的解均由 ODEs 的解求出;2) **收敛十分迅速**:一般二至三次延拓迭代足以;3) **任意初始试函数**:收敛性与初始试函数选取无关,不要求其满足任何边界条件;4) **高精度**:多数情况下,单项试探函数便可得到满足工程精度的解答,通常取三项便可得到几乎精确的解答;5) **多项必要**:对某些问题(如板的稳定问题),一项试函数问题退化成非特征值问题;6) **求解器必要**:求解器使 ODEs 的求解成为方便易事,使该法获得了新生。

9 有限元线法的形函数优化

有限元线法是一种优秀的单向解析法,结线上的解由 ODEs 的解给出,结线之间以及单元的端边上均由人为的插值函数给出;因此,若将其升级为双向解析法,至少有两个走向:一是在形函数上做文章,二是在单元端边上做文章。前者派生了这一节介绍的形函数优化法,后者派生了下一节讨论的有限元网络法。这两种方法都是我们新近提出并且正在进行研究的方法,这里给予简单的介绍。

有限元线法单元的试探函数(以二维问题为例)为两组一元函数的乘积和,即为 $[N(\xi)] \cdot \{d(\eta)\}'$ 的形式,其中结线位移向量 $\{d(\eta)\}'$ 解析地解出,而形函数阵 $[N(\xi)]$ 由人来假定。 $[N(\xi)]$ 假定得好,解答的计算量小且精度高,否则相反。如何能将形函数取得最优呢?类似于延拓 Kantorovich 法,在得到线法结线位移 $\{d(\eta)\}'$ 的解之后将其取定,反过来放松对形函数 $[N(\xi)]$ 的假定,代到能量泛函中,由其变分过程导出关于 $[N(\xi)]$ 的 ODEs,将形函数由 ODEs 的解给出,相当于对 $[N(\xi)]$ 的一级优化。

如果将有限元线法看成是分片插值的 Kantorovich 法,则有限元线法的形函数优化法便可看成是分片插值的延拓 Kantorovich 法。初步的尝试表明,这一方法对精度提高极为显著,而且还具有如下几点明显的优点:1) **方便灵活**:可以很容易地处理非规则区域上的问题;2) **稀疏的 ODE 体系**:关于 $[N(\xi)]$ 的微分方程之间并无耦合,联系只反映在边界条件上;3) **数值稳定**:方程之间无耦合极大地增强了求解过程的数值稳定性。

这一方法目前正处于刚刚开始研究阶段,但已显示了相当的优势。

10 有限元网络法

在有限元线法中,单元的四条边线分为结线和端边:结线是解析方向,精度高;端边是离散方向,精度低。这是由单向解析的性质所决定的。为了使解答双向同性,我们提出了有限元网络法。在这一方法中,我们不再区分结线和端边,单元的四条边线都是结线,其上的解均由 ODEs 的解给出。此时,单元上的试探函数采用如下的 Coons 曲面插值:

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) d_i(\eta) + \sum_{j=1}^2 N_j(\eta) d_j(\xi) - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 N_i(\xi) N_j(\eta) d_{ij} \quad (12)$$

其中, $N_i(\xi), N_j(\eta)$ 分别为两个方向的形函数, $d_i(\eta), d_j(\xi)$ 为边线上的位移函数, d_{ij} 为单元角点处的位移。类似于延拓 Kantorovich 法,求解时也是逐方向迭代求解。

由于网络法是以有限元线法为基础,因此保留了有限元线法的优点(如可方便地用于任意区域上的问题),但同时弥补了有限元线法单向解析的不足,使得解答在两个方向上地位相等,精度(特别是位移的导数和应力的精度)也因此大为提高。研究表明,网络法的迭代收敛同样十分迅速,通常二至三次迭代即可。采用迭代的作法是一种将问题化大为小,各个击破的策略,由于收敛迅速,因此效率很高。

网络法是对有限元线法本质上的改进与发展,具有广阔的发展前景。

11 Hilbert 命题

以“常微”的解近似“偏微”的解,从本质上讲是以一元函数近似多元函数的问题。有关这方面的研究,到目前为止,在数学界中也是很少的。那么,用一元函数近似多元函数的精度、效率如何?潜力有多大呢?数学伟人 Hilbert 曾经对这个问题提出过一个令人鼓舞的命题。

Hilbert 生前曾提出 23 个著名的问题留给后人解决,其中第 13 个问题便是(大意):规则区域上任意一个多元函数都可以用有限个一元函数来表示。Kolmogorov 曾证明:对任一二元函数均存在 5 对一元函数将该二元函数精确地表示出来。当然,Kolmogorov 只证明了存在性,并没有给出实用的构造方法。设 Hilbert 的命题成立,则用有限个一元函数可精确地表示多元函数就意味着对偏微分方程的求解可以用有限数目的常微分方程的解取代。这无疑是面向常微方法的一大幸事,对于工程问题的分析计算来讲也无疑是重大的突破,其发展前景是十分诱人的。这最终也许只是一个梦想,但就作者而言,这一点恰恰是这类方法研究中最富有意义、最鼓舞人心、最引人入胜的。

12 结束语

面向“常微”的半解析方法是伴随着计算技术的发展所出现的一类新型结构分析方法,从性质上讲,它一举改观了目前大多数现存方法中以求解代数方程为基本求解手段的现状,由代数方程的求解上升到常微分方程的求解这一更高档次的分析计算平台,展现了宽广的发展前景和巨大的发展潜力。作者相信,文中所列举的几个方法只不过是这类方法中的区区几例,只要深入发掘,还会发现更多的新奇。作为一个暂新的研究领域,其幅员之辽阔、富藏之精深,是作者目前无法望到边际的。正是这个领域的新奇、宽广、深邃与艰难,吸引和鼓舞着作者不断地在这个领域中探索。

参考文献

- [1] Yuan Si, The Finite Element Method of Lines: Theory and Applications, Science Press, Beijing-New York, 1993.
- [2] 袁驷,有限元线法的进展与展望,走向 21 世纪的中国力学——中国科协第 9 次青年科学家论坛报告文集(杨卫、郑泉水、靳征谟主编,清华大学出版社,北京,1996)253-263。
- [3] Yuan Si and Jin Yan, A class of bi-analytical methods in structural analysis, New Developments in Structural Engineering - Theories and Practices (ed. Yuan Si and Ma Zhiliang, China Architecture and Building Press, Beijing, 1996) 243-248.
- [4] 袁驷,有限元线法通用程序—FEMOL92,计算结构力学及应用,第 10 卷,第 1 期(1993) 118-122。
- [5] 庞之垣,有限元线法的误差估计,计算数学,第 15 卷,第 1 期(1993) 110-120。

作者简介:袁驷,博士,1953年9月生于北京。曾先后在美国、英国作博士后和访问教授。现为清华大学土木系教授、博士生导师。兼清华大学校长教学顾问、《力学学报》编委、中国力学学会计算力学专业委员会委员、国际计算力学协会会员、国家教委工科力学课程教学指导委员会秘书、国家教委工科结构力学课程教学指导委员会委员。先后获国家教委科技进步一、二、三等奖(第二完成人,1991年、1986年、1993年)各一项,“作出突出贡献的中国博士”(1991年),霍英东基金(主要研究者,1990年),国家杰出青年科学基金(第二届,1995年),宝钢教育奖优秀教师特等奖(第一名,1995年)等学术奖励。1989年在国家自然科学基金的支持下创立了以有限元线法为代表的新型半解析法,并对其作了系统的开发与扩展。1993年出版了独著的国内外首部有关有限元线法的英文专著《The Finite Element Method of Lines—Theory and Applications》。

