高等学校教材

随机过程

王自果　田　铮　编

西北工业大学出版社
1990年3月　西安

内 容 提 要

本书共有六章及附录Ⅰ和附录Ⅱ。内容包括随机过程的基本概念，马尔可夫过程，二阶矩过程和均方微积分，平稳过程，时间序列分析，鞅过程，以及概率论补充知识和常系数差分方程。各章配有适量的习题，书末附有习题答案。

本书内容丰富，深广度适宜，概念清晰，系统性强，文字通俗易懂，便于教学和自学。

本书可作为高等院校工科研究生及高年级本科生的教材，也可供有关科技工作者参阅。

高等学校教材
随机过程
编 者 王自果 田 铮
责任编辑 刘彦信
责任校对 樊 力
*
西北工业大学出版社出版
（西安市友谊西路 127 号）
陕西省新华书店发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0248-2/O·28(课)
*
开本 850×1168 毫米 1/32 15.375 印张 394 千字
1990 年 3 月第 1 版 1990 年 3 月第 1 次印刷
印数：1—2000 册 定价：3.48 元

前　　言

随机过程是现代概率论的一个重要课题，它主要研究和探讨客观世界中随机演变过程的规律性，并已在许多领域中得到广泛应用。如在控制、通信、生物、物理、社会科学以及其它工程技术中发挥了重要作用。学习和掌握随机过程的基本理论并将其应用于科学研究和工程实际中，是高度发展的现代科学技术提出的要求。只有熟练掌握随机过程的基本理论和方法，才能为进一步学习现代科学技术，探索科学技术的新领域奠定基础。

近年来，编者为西北工业大学工科硕士研究生开设了“随机过程及其应用”课程，积累了丰富的经验和资料。本书就是在为该课程编写并经过多次教学使用的讲义的基础上，吸取了目前国内外同类书籍长处，经修改、充实编写而成的。

本书注重基本理论、基本概念和基本方法的论述，力求做到论述严谨清晰，资料丰富，文字通俗易懂，数学工具的运用简明、准确，以便读者系统地掌握随机过程的基本理论和分析方法，进而了解和掌握随机过程发展的一些新内容和新领域。阅读和学习本书需要掌握高等数学，线性代数和概率论的有关基础知识。

本书取材较为全面。内容包括随机过程基本概念，马尔可夫过程，二阶矩过程和微积分，平稳过程，时间序列分析和鞅过程。为使读者便于阅读和学习，书后附录Ⅰ介绍了概率论补充知识，附录Ⅱ介绍了常系数差分方程。内容安排和布局合理，讲授全书内容大约需要 40—50 学时。

本书第一章到第四章由王自果编写，第五章和第六章及附录由田铮编写。

西安电子科技大学赵炜教授审阅了全部书稿，并提出了许多

宝贵意见；本书的出版得到西北工业大学研究生院和应用数学系的热情支持和帮助，谨此一并致谢。

限于水平，书中错误在所难免，欢迎读者指正。

编　　者

1989年7月

目　录

第一章　随机过程的基本概念

为了描述随机现象，我们在概率论的基本理论中，首先建立了概率空间。并进一步建立了随机变量和分布函数等概念，用以刻划随机现象的统计规律性。在那里，我们主要研究一个或有限个随机变量，即一维或 n 维随机变量（随机向量）。然而，在客观中存在的随机现象是极其复杂的，往往需要用一族（无穷多个）按照某种特定的关系联系起来的随机变量才能描述它的完整统计规律性。这也就是要求我们从理论上扩大概率论的研究范围。随机过程正是在这种要求下，于本世纪产生并发展起来的一个数学分支（更确切地说是概率论的一个分支），它是概率论的发展和继续。但它有别于概率论。如果认为概率论是研究“静止”（相对于时间不变）的随机现象，那么随机过程可认为是研究“运动”（相对于时间而变化）的随机现象，它更有实际意义。目前已广泛应用于近代物理、无线电技术、自动控制、生物学和管理科学等方面。

§1.1　随机过程的概念

通常我们把一族按照某种特定的关系联系起来的随机变量称为随机过程。

例 1　以 $X(e,t)$ 表示电话总机在 $[0,t)$ 内接收到的呼唤次数，对于每个固定的时刻 t，$0\leqslant t<+\infty$，$X(e,t)$ 是一个随机变量，它可以取所有非负整数 0，1，2，…，随着 t 的变动，就得到一族（无穷多个）相互有关的随机变量。则 $\{X(e,t),t\in[0,+\infty)\}$ 是一个随机过程。

例 2　在数字通讯中，若传输过程是用 0 和 1 两个码元通过

编码来传递信息。由于我们事先不知道传送什么信息，因此，在某一时刻 t 它传送的信息是 0 还是 1 都不能预先知道，故是一随机变量。若我们进行长期观察，如每隔 1 秒钟观察一次，将这个随机变量用 $X(e,t)$ 表示，其中 t 取 0，1，2，…，随着 t 的变动就得到一族（无穷多个）随机变量。则 $\{X(e,t),t\in N\}$, $N=\{0,1,2,\cdots\}$ 是一个随机过程。

例 3 热噪声：考虑电网络中的一个电阻。由于电阻中自由电子的随机运动，在电阻两端的电压会出现微小的随机波动。波动的电压记 $X(e,t)$ 称为热噪声。它是依赖于时间 t 的一族（无穷多个）随机变量。则 $\{X(e,t),t\in[a,b]\}$ 是一个随机过程。

例 4 在射击过程中，我们以 $X(e,n)$ 表示 n 次射击中击中目标的次数。由于在每次射击时受到随机因素的影响，对每一个固定的 n 值，$X(e,n)$ 是一个随机变量，但由于 n 可取 1，2，…，因此，它是依赖于 n 的一族（无穷多个）随机变量，则 $\{X(e,n), n=0,1,2\cdots\}$ 是一个随机过程。

从以上这些例子我们知道，随机过程就是依赖于一个参数而变化的随机变量，也可以说是一族随机变量。下面我们给出随机过程的精确定义。

一、随机过程的定义

定义 设给定概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 和参数集 $T\subset(-\infty,+\infty)$，若对于每个 $e\in\Omega$ 和 $t\in T$ 都有一个定义在概率空间上的随机变量 $X(e,t)$ 与它对应，则称依赖于参数 t 的随机变量 $\{X(e,t),t\in T\}$ 为随机过程。简单地记为 $\{X(t),t\in T\}$ 或 X_T 或 $X(t)$。参数集 T 通常是下列几种情形之一：$T=(-\infty,+\infty)$；$T=(0,+\infty)$；$T=\{\cdots-2,-1,0,1,2\cdots,\}$；$T=\{0,1,2,\cdots\}$；$T=[a,b]$ 和 $T=(a,b)$ 等。

由上述定义可知：

（1）随机过程的概念是普通函数概念的推广。对普通实函数

来说，当 $t\in T$ 时总有一个确定的实数 x 与之对应；对随机过程来说，当 $t\in T$ 时与之对应的是 $X(e,t)$ 为一个随机变量（可以说是 e 的函数）。所以随机过程的概念将普通函数的概念从实数与实数的对应关系推广到实数与随机变量的对应关系。

（2）随机过程的概念是随机变量概念的推广。随机变量是定义在 Ω 上的一个函数，即对每个 $e\in\Omega$，都有确定的实数 x 与之对应；而随机过程当 $e\in\Omega$ 时与之对应的 $X(e,t)$ 是 t 的函数，称它为样本函数或样本曲线。有时也称为轨道或现实。所以随机过程的概念将随机变量的概念从 e 与实数的对应关系推广到 e 与实函数的对应关系。

（3）随机过程就是一族随机变量。由随机过程的定义可知 T 中每一个 t 对应着一个随机变量。所以 T 中有多少个元素，随机过程就对应着多少个随机变量。

（4）随机过程是一族样本函数，由随机过程定义可知 Ω 中每一个 e 对应着一个样本函数，所以 Ω 中有多少个基本事件（元素），随机过程就相应地有多少个样本函数（或多少条样本曲线）。

二、参数空间与状态空间

随机过程定义中的参数集 T 可以是时间集也可以不是。而是长度、重量、速度等物理量的集合。本来随机过程通称为随机函数，只有当参数集 T 是时间集时才称这种随机函数为随机过程。但近年来在许多书籍中不论 T 是什么集合，皆称为随机过程。所以本书中也不再用随机函数一词。习惯上将参数集 T 称为参数空间，$X(t)$ 所能取的一切值的集合，记作 I，称为值域或状态空间。I 中每一个元素称为状态。

如果我们把随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 设想为一个作随机运动的质点 M 的运动过程。以 $X(t)$ 表示 M 在时刻 t 的状态，于是 $\{X(t),t\in T\}$ 描述了 M 所作的随机运动的变化过程，这时把状态空间的每一点 x 称为状态（$X(t)=x$），就可形象地说成“在时

刻 t 质点M处于状态 x（某确定的位置）”。

例 5 设随机相位正弦波 $X(t)=a\cos(\omega t+\Phi)$，其中 a，ω 为实常数，随机变量Φ在 $(0,2\pi)$ 内服从均匀分布。显然，$\{X(t), t\in T\}$ 是一个随机过程。当 e 给定时，即在 $(0,2\pi)$ 内任选一个相位 φ_i，则有

$$X_i(t)=a\cos(\omega t+\varphi_i)$$

它是随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的一个样本函数。此外，若固定时刻 $t=t_1\in T$，不难看出，$X(t_1)=a\cos(\omega t_1+\Phi)$ 是一个随机变量。若 e，t 均给定，则

$$X_i(t_1)=a\cos(\omega t_1+\varphi_i)$$

是一个标量。即状态空间 I 中的一个状态。

工程技术中有许多随机现象，例如，地震波幅，结构物承受的风载荷，船舶甲板“上浪”的次数以及通讯系统、自控系统中的各种噪声和干扰等等的变化过程都可用随机过程这一数学模型来描绘。不过这些随机过程却都不能象随机相位正弦波那样可具体地用时间和随机变量（一个或几个）的关系式来表示出，其主要原因在于自然界产生随机因素的机理是极为复杂的，甚至是不可能被观察到的。因而对于这样的随机过程（实际中大多是这样的随机过程），我们只有通过由测量所得到的样本函数集合的分析才能掌握它们随时间变化的统计规律性。

§1.2 随机过程的分布

我们研究随机现象，主要是研究它的统计规律性。对于随机过程也是这样，问题不仅在于如何定义它，更主要的是研究它的统计规律性。

在概率论中我们知道，一个随机变量X的统计特性完全被它的分布函数所刻划；有限个随机变量的统计特性完全被它们的联

合分布函数所刻划，至于可列个随机变量的分布问题，基本上是假定它们是相互独立的，这样问题便归结为一个随机变量的分布问题。而在随机过程中必须更多地考虑不独立的情形，也就是说要考虑一个随机过程中各个不同的 $X(t)$ 之间的相关性。因为在实际的随机过程中，不同时刻 t 所对应的随机变量 $X(t)$ 之间不可能总是独立的。又因为随机过程是一族（无穷多个）随机变量。于是随机过程的分布是否也可用一个无穷多维的联合分布函数来刻划它呢？由测度论知识可知，使用无穷维分布函数的方法是行不通的。可行的办法就是采用有限维分布函数族来刻划随机过程的统计规律性。

设 $\{X(t),t\in T\}$ 是一个随机过程，对于每一个固定的 $t_1\in T$，$X(t_1)$ 是一个随机变量，它的分布函数一般与 t_1 有关，记为

$$F_1(x_1;\ t_1)=P\{X(t_1)\leqslant x_1\},\quad (-\infty<x_1<+\infty)$$

称为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的一维分布函数。如果存在非负二元函数 $f_1(x_1;\ t_1)$，使

$$F_1(x_1;\ t_1)=\int_{-\infty}^{x_1}f_1(x_1;\ t_1)dx_1,\quad (-\infty<x_1<+\infty)$$

成立，则称 $f_1(x_1;\ t_1)$ 为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的一维概率密度函数。简称概率密度或密度函数。

随机过程的一维分布函数或概率密度刻划了随机过程在各个孤立时刻的统计特性，但不能反映随机过程不同时刻的状态之间的联系。

为了刻划随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在任意两个时刻 t_1 和 t_2 对应状态之间的联系，就需要引进二维随机变量 $(X(t_1),X(t_2))$ 的分布函数，它一般依赖于 t_1 和 t_2，记为

$$F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2\}$$
$$(-\infty<x_1,\ x_2<+\infty)$$

称它为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的二维分布函数。如果存在非负函

数 $f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)$ 使

$$F_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)dx_1dx_2$$

成立，则称 $f_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)$ 为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的二维概率密度函数，或二维概率密度或二维密度函数。

类似地，当时间 t 取任意 n 个数值 $t_1,\cdots,t_n\in T$ 时，n 维随机变量 $(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$ 的分布函数记为

$$\begin{aligned}&F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n\},\\&\qquad(-\infty<x_1,\cdots,x_n<+\infty)\end{aligned}$$

称它为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的 n 维分布函数。如果存在非负函数 $f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)$，使

$$\begin{aligned}&F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)dx_1dx_2\cdots dx_n\end{aligned}$$

成立，则称 $f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,\cdots,t_n)$ 为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的 n 维概率密度函数。或 n 维概率密度或 n 维密度函数。

随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的一维分布、二维分布，$\cdots$，n 维分布等等其全体 $\{F_n(x_1,x_2,\cdots x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n);\ t_1,t_2,\cdots,t_n\in T;\ n\geqslant 1\}$ 称为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的有限维分布函数族。

给出了随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的有限维分布函数族，便可知该随机过程的任意有限维随机变量的联合分布，也就能完全刻划这有限维随机变量之间的相互关系。

由多维分布函数的性质和上述定义，容易看出随机过程的有限维分布函数族具有下列性质：

(1)对称性　对$(1,2,\cdots,n)$的任一排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$，有

$$\begin{aligned}&F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=F_n(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n};\ t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n}).\end{aligned}$$

（2）相容性　对任意 $m<n$，有

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty;\ t_1,\cdots,t_m,\cdots,t_n)$$
$$=F_m(x_1,x_2,\cdots,x_m;\ t_1,t_2,\cdots,t_m).$$

由附录Ⅰ知特征函数

$$\begin{aligned}&\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=E\left[e^{j[u_1X(t_1)+u_2X(t_2)+\cdots+u_nX(t_n)]}\right]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n)}dF_n(x_1,x_2,\\&\quad\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n),\end{aligned}$$

称 $\{\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n);\ t_1,\cdots,t_n\in T;\ n\geqslant1\}$ 为随机过程的有限维特征函数族。它具有如下性质：

（1）对称性　对（$1,2,\cdots,n$）的任一排列（$j_1,j_2,\cdots,j_n$），有

$$\varphi(u_{j_1},u_{j_2},\cdots,u_{j_n};\ t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n})$$
$$=\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

（2）相容性　对任意 $m<n$，有

$$\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_m,0,\cdots,0;\ t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n)$$
$$=\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_m;\ t_1,t_2,\cdots,t_m).$$

由特征函数的唯一性定理可知，有限维分布函数族与有限维特征函数族互相唯一决定。

现在我们考虑一个相反的问题。已给一个分布函数族满足对称性和相容性，问是否存在一个随机过程，它的有限维分布函数族与已给出的分布函数族相重合吗？柯尔莫哥洛夫存在定理肯定地回答了这一问题。

存在定理（柯尔莫哥洛夫定理）设分布函数族 $\{F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n);\ t_1,\cdots,t_n\in T;\ n\geqslant1\}$ 满足上述对称性和相容性，则必存在一个随机过程 $\{X(t),t\in T\}$，使 $\{F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n);\ t_1,t_2,\cdots,t_n\in T;\ n\geqslant1\}$ 恰好是该随机过程 $\{X(t),$

$t\in T\}$ 的有限维分布函数族，其中

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n\}.$$

证明略。

在实际问题中，我们有时还必须同时考虑两个或两个以上的随机过程。如布郎运动：当一个用显微镜才能看到的质点漂浮在流体中时，由于分子的碰撞而使质点不断地进行着杂乱无章的运动，我们称这种运动为布郎运动。从统计物理学的观点来看，质点的这种运动是由于受到大量随机的、相互独立的分子碰撞的结果，用 $(X(t),Y(t))$ 表示时刻 t 时质点的平面位置，则由于运动是杂乱无章的，$X(t)$ 和 $Y(t)$ 都是随机变量，于是描述质点位置的 $(X(t),Y(t))$ 就是二维随机过程，出现二维或二维以上随机过程时除了对各个随机过程的统计特性加以研究外，还必需对它们之间的联合特性加以研究。

设 $\{(X(t),Y(t)),t\in T\}$ 是二维随机过程，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和 $t_1',t_2',\cdots,t_m'$ 是 T 中任意两组实数，我们称 $n+m$ 维随机变量

$$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n);\ Y(t_1'),Y(t_2'),\cdots,Y(t_m'))$$

的联合分布函数

$$F_{n,m}(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n;\ y_1,y_2,\cdots,y_m;$$
$$t_1',\cdots,t_m')$$
$$=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n;$$
$$Y(t_1')\leqslant y_1,\cdots,Y(t_m')\leqslant y_m\}$$

为二维随机过程 $\{(X(t),Y(t)),t\in T\}$ 的 $n+m$ 维联合分布函数。相应的 $n+m$ 维联合概率密度函数为

$$f_{n,m}(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n;\ y_1,y_2,\cdots,y_m;\ t_1',\cdots,t_m')$$
$$=\frac{\partial^{n+m}F_{n,m}(x_1,\cdots,x_n;\ t_1,\cdots,t_n;\ y_1,\cdots,y_m;\ t_1',\cdots,t_m')}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n\partial y_1\partial y_2\cdots\partial y_m}.$$

对于任意正整数 n 和 m 以及 T 中的任意 $n+m$ 个实数 t_1，t_2，

$\cdots, t_n; \ t'_1, t'_2, \cdots, t'_m$，有限维分布函数，其全体

$$\{F_{n,m}(x_1, x_2, \cdots, x_n; \ t_1, \cdots, t_n; \ y_1, y_2, \cdots, y_m; \ t'_1, t'_2, \cdots, t'_m); \ t_1, t_2, \cdots, t_n; \ t'_1, t'_2, \cdots, t'_m \in T, n \geqslant 1, m \geqslant 1\}$$

称为二维随机过程 $\{(X(t), Y(t)), t \in T\}$ 的有限维分布函数族。

如果对任意正整数 n 和 m 以及 T 中的任意 $n+m$ 个实数 t_1, $t_2, \cdots, t_n; \ t'_1, t'_2, \cdots, t'_m$，联合分布函数满足关系式

$$\begin{aligned} &F_{n,m}(x_1, x_2, \cdots, x_n; \ t_1, t_2, \cdots, t_n; \ y_1, y_2, \\ &\quad \cdots, y_m; \ t'_1, t'_2, \cdots, t'_m) \\ &= F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) \cdot F_m(y_1, y_2, \\ &\quad \cdots, y_m; t'_1, t'_2, \cdots, t'_m), \end{aligned}$$

则称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 是相互独立的。

二维随机过程 $\{(X(t), Y(t)), t \in T\}$ 的有限维分布函数族给定后，便知道二维随机过程 $\{(X(t), Y(t)), t \in T\}$ 的任意有限个随机变量的联合分布。因此，它既刻划了 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的统计规律性，也刻划了 $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$；$Y(t'_1), Y(t'_2), \cdots, Y(t'_m)$ 这些随机变量之间的相互关系，等等。

§1.3 随机过程的数字特征

在概率论中，我们知道期望、方差、协方差等各种数字特征能够描述随机变量的某些重要特性，它们在实际中非常有用。对于随机过程，虽然可以用有限维分布函数族来较完整地刻划它的统计特性，但是，在实际应用中除少数特殊情形外，大部分的随机过程的有限维分布函数族是很难给出的，有时甚至根本不可能得到。因此，在许多情形下，研究随机过程的各种数字特征具有理论和实际意义。它们一方面能反应出随机过程的局部特性。另一方面在对于一些特殊情形的随机过程而言，它们也可以完全决定有限维分布函数。因而有必要引入随机过程的数字特征。这些数

字特征既能刻划随机过程的重要特征，又便于进行运算和实际测量。因此对随机过程数字特征的研究是随机过程理论的一个重要方面。下面我们来讨论随机过程的一些数字特征。

一、均值函数

设 $\{X(t), t\in T\}$ 是一随机过程，如果对于每一个 $t\in T$，随机变量 $X(t)$ 的均值（期望）存在，则称

$$E[X(t)] = \mu_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_1(x;t), \quad (t\in T) \qquad (1.3.1)$$

为随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 的均值或数学期望，有时记为 $EX(t)$。其中 $F_1(x;t)$ 为随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 的一维分布函数。

当 $\{X(t), t\in T\}$ 的状态空间是离散型时（对每个 $t\in T$ 随机变量 $X(t)$ 为离散型随机变量），则

$$E[X(t)] = \mu_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P\{X(t) = x_i\}, \quad (t\in T)$$

当 $\{X(t), t\in T\}$ 的状态空间是连续型时（对每个 $t\in T$ 随机变量 $X(t)$ 为连续型随机变量），则

$$E[X(t)] = \mu_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x;t) dx, \quad (t\in T)$$

其中 $f_1(x;t)$ 为随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 的一维概率密度函数。

$E[X(t)]$ 是随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 的所有样本函数在时刻 t 的函数值的平均，通常称这种平均为集平均或统计平均或空间平均。由于对不同时刻 t，$\mu_X(t)$ 的值不一定相等。因此，$\mu_X(t)$ 是随时间 t 而变化的函数。确切地说，它是随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 的均值函数，简记为 $EX(t) = \mu_X(t)$。

二、方差函数

对于确定的 t 我们把随机变量 $X(t)$ 的二阶原点矩记为 $\Psi_X^2(t)$ 即

$$\Psi_X^2(t)=E[X^2(t)],\ (t\in T) \qquad (1.3.2)$$

它称为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的均方值函数，而把 $X(t)$ 的二阶中心矩记为 $\sigma_X^2(t)$ 或 $D[X(t)]$，（有时记为 $DX(t)$），即

$$\sigma_X^2(t)=D[X(t)]=E[X(t)-\mu_X(t)]^2=\Psi_X^2(t)-\mu_X^2(t) \qquad (1.3.3)$$

它称为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的方差函数。方差函数 $\sigma_X^2(t)$ 的平方根 $\sigma_X(t)$ 称为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的均方差函数，它表示随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在时刻 t 对于均值 $\mu_X(t)$ 的偏离程度。

由上述定义可见，均值函数和方差函数仅涉及随机过程的一维分布，只能刻划随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在各个孤立时刻的统计特性。不能反映随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在两个不同时刻状态之间的相互关系。因此为了要刻划随机过程在两个不同时刻状态之间的相互关系，我们还需利用二维概率分布引入新的数字特征。

三、自相关函数

设 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在任意两个时刻 t_1 和 t_2 时的状态（随机变量）。$f_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)$ 是相应的二维概率密度函数。称二阶原点混合矩

$$R_{X,X}(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;\ t_1,t_2)dx_1dx_2 \qquad (1.3.4)$$

为随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的自相关函数，简称相关函数。它反映了随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在任意两个不同时刻取值之间的相关性。记号 $R_{X,X}(t_1,t_2)$ 在不致引起混淆的情况下常简记为 $R_X(t_1,t_2)=EX(t_1)X(t_2)$。

类似地，设 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 在任意两个时刻 t_1 和 t_2 时的状态（随机变量），则 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 的二阶中心混合矩