王子侠 单墫 编著

对应

UI
YING

科学技术文献出版社

对　应

DUi　YiNG

王子侠　单　墫

科学技术文献出版社

内 容 提 要

"对应"不仅是一个极基本的数学概念，还作为一种方法、技巧，在数学研究和解题中发挥着重要作用。"对应"的内容非常丰富，本书所介绍的只是一般中学生易于接受、且常会用到的那一部分。全书计分四章，即：映射，计数，卡特郎数，表示；下又分成五十多个小节，通过一系列数学游戏和数学竞赛题，显示了"对应"的方法在解决问题中的威力。全书通俗易懂，寓知识性于趣味性之中，利于中学生长知识、发展智力，培养数学学习和解题的能力。鉴于目前国内、外中学生竞赛题多偏重于组合数学的方向，本书还是中学生数学竞赛辅导的很好教材。

本书作者加拿大籍台湾数学家王子侠教授是著名的组合数学专家，另一位作者单墫教授曾从事我国中学生数学竞赛的培训工作多年，撰写过一些科普读物。因此，本书还能集海内、外的数学教育之长，对读者学习数学能有更多的启发性。

本书主要读者对象是广大中学生、中学数学教师、数学爱好者。

对 应

王子侠 单 墫

科学技术文献出版社出版

(北京市复兴路15号)

上海新华印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

开本 787×1092 1/32 印张 4 字数 89,000

1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷

印数 1—3,000 本

ISBN 7-5023-0993 4/O·80 定价：1.45元

前　言

“对应”是一个极基本的数学概念.

人类，在上古时代就已经知道把自己的手指或石子与货物(牛、羊等等)对应起来,进行计数. 随着时间的推移，对应的作用越来越大,地位越来越重要.

几何中的各种变换,数学分析中的各种函数,都是对应的例子.

现代数学中,同态、同构、同伦、同胚、……,无一不是具有某种性质的对应. 各种各样的“表示”，实质上也就是各种各样的对应.

为了计算一个集合的元素个数,在组合数学中,常常利用这个集合与另一个集合之间的对应关系. 这种方法称为“对应原理”.

数学证明中,也常常出现“对应”这个幽灵.

被誉为本世纪最重大成果的 Faltings 定理，就是证明了一系列的对应都是同构，从而解决了长期悬而未决的 Mordell 猜测.

这本小书,通过许多初等问题,介绍“对应”在计算与证明中的应用. 这是我们在 1987～1988 年合作的结果,希望它能伴随读者度过一些愉快的时光。

王子侠，单　墫

1988年8月

目　录

一、映　　射

1. 映　　射

人们常常说到“对应”，例如“兵对兵，将对将”，“兵来将挡，水来土掩”，“天上一颗星，地下一个人”，…….

“对应”，是数学中一个极为重要的基本概念.

如果有两个集合 X、Y，对每个 $x\in X$，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与它对应，我们就得到一个从集合 X 到集合 Y 的**映射** f. 记为

$$f:\quad X\to Y.$$

映射也称作**函数**. 这里，y 称为 x（在映射 f 下）的**像**，而 x 称为 y 的**原像**，记为

$$y=f(x),$$

或

$$x\mapsto y.$$

［例 1］ $X=\{a, b, c\}$，$Y=\{1, 2, 3\}$. 从集合 X 到 Y 有许多不同的映射（不久我们就会知道，共有 27 个不同的映射）. 例如，我们可以令映射 f 为：

$$a\mapsto 1,\qquad b\mapsto 2,\qquad c\mapsto 3.$$

令映射 g（在同一个问题中，对不同的映射采用不同的记号，以免混淆）为

$$a\mapsto 2,\qquad b\mapsto 1,\qquad c\mapsto 3.$$

［例 2］ $X=\{1, 2, \cdots, n\}$，$Y=\{0\}$. 映射 f 定义为

$f(x)=0$（其中 $x\in X$）. 这样的映射可称为**零映射**.

［例 3］ 集合X到集合X自身的映射f,定义为

$$f(x)=x \qquad (\text{其中 } x\in X).$$

这个映射称为**恒等映射**.

［例 4］ $X=\{1, 2, 3, \cdots, 300\}$, $Y=\{0, 1, 2\}$. 映射 f 定义为

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 被 3 整除;}\\ 1, & \text{若 } x \text{ 除以 3 余 1;}\\ 2, & \text{若 } x \text{ 除以 3 余 2.}\end{cases}$$

［例 5］ $X=\{1, 2, \cdots, 100\}$, $Y=\{1, 2, \cdots, 200\}$. 映射φ定义为

$$\varphi(n)=2n, \qquad \text{其中 } n=1, 2, \cdots, 100.$$

［例 6］ $X=\{1, 2, \cdots, 200\}$, $Y=\{1, 2, \cdots, 100\}$. 映射 ψ 定义为

$$\psi(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{如果 } n \text{ 为偶数;}\\[2ex] \dfrac{n+1}{2}, & \text{如果 } n \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

［例 7］ $X=\{1, 2, \cdots, 3n\}$, $Y=\{1, 2, \cdots, n\}$. 映射f定义为

$$f(3k-2)=f(3k-1)=f(3k)=k, \quad \text{其中 } k=1, 2, \cdots, n.$$

［例 8］ $X=\{1, 2, \cdots, n\}$,映射f定义为

$$f(x)=n+1-x, \qquad \text{其中 } x\in X.$$

这是从X到X自身的映射.

请读者自己举一些映射的例子.

2. 一一对应

设f是从集合X到集合Y的一个映射.

如果对于集合X中任意两个不同元素$x \neq x'$,都有

$$f(x) \neq f(x'),$$

即不同元素的像不同,那么f称为**单射**.

上一节例1、例3、例5、例8中的映射，都是单射. 例2、例4、例6、例7中的映射不是单射.

如果对于集合Y中每个y,都有(至少一个)$x \in X$,使得

$$f(x) = y,$$

即集合Y中每个元素都是(集合X中某些元素的)像，那么f称为**满射**(或称为**映上的**).

上一节例1、例2、例3、例4、例6、例7、例8中的映射都是满射. 例5中的映射不是满射，因为Y中的奇数不是X中元素的像.

如果映射f既是单射,又是满射,那么f称为**一一对应**.

上一节例1中的两个映射，都是一一对应. 例3中的恒等映射当然是一一对应. 例8中的映射也是一一对应。而上一节其他例子中的映射都不是一一对应.

显然,如果集X与集Y之间存在一一对应f,那么集X与集Y的元素个数相等,即

$$|X| = |Y|,$$

这里$|X|$表示一个集X的元素个数.

反过来,如果$|X| = |Y|$,那么在集X与集Y之间必存在一个一一对应. 这只要使X的第一个元素的像为Y的第一个元素,X的第二个元素的像为Y的第二个元素,依此类推.

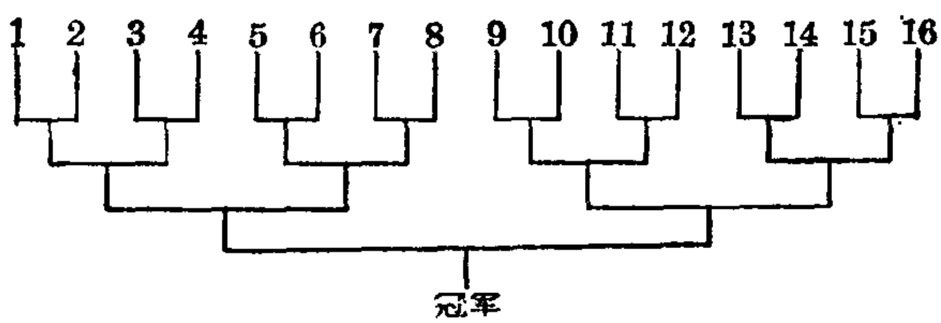
如果f是满射，并且每一个$y\in Y$恰好是X中m个元素的像，那么f称为**倍数映射**.

上一节例2、例4、例6、例7中的映射，都是倍数映射，倍数m分别为n、100、2、3. 例5中的映射不是倍数映射.

一一对应也可以看成倍数$m=1$的倍数映射。

3. 淘 汰 赛

16名乒乓球选手要决出单打冠军，通常按下表进行淘汰赛：



即第一轮分成8对进行比赛，胜者进入第二轮，再分成4对进行比赛. 第二轮的胜者（4名）分成两对进行第三轮的比赛. 最后，由第三轮的胜者（2名）决出冠军.

如果选手的人数不是2的正整数幂，通常先补充几名“乌有先生”，凑成2的正整数幂，那些与乌有先生配对的选手称为“轮空”，不用比赛便可直接进入下一轮. 例如在仅有12名选手参加比赛时，可以将上面的表中4个号码作为乌有先生. 如果2、6、10、14是乌有的，那么1、5、9、13四名选手第一轮轮空，直接进入第二轮.

［问题］ n名选手（例如$n=16$或12）参加淘汰赛，需要进行多少场比赛，才能决出冠军？

如果先算出第一轮的场数，第二轮的场数，……，然后相

加，是比较麻烦的．简便的解法是注意每场比赛恰好淘汰一名选手，即比赛的场次与被淘汰的选手是一一对应的．由于一共淘汰 $n-1$ 名选手，所以比赛的场数也是 $n-1$。

4．锯立方体

一个边长为 3 个单位的立方体，锯 6 次：横锯两次，纵锯两次，竖锯两次，可以锯成 27 个边长为 1 个单位的立方体．如果允许你把各次得到的木块任意地叠起来锯，能否锯 5 次（或更少）就得出 27 个单位立方体？

问题的关键是在原立方体中心的那个单位立方体有 6 个面．每锯 1 次至多能使它有 1 个面暴露在"光天化日"之下．因此，要使它的 6 个面完全"曝光"，至少要锯 6 次．当然，6 次也确实可以把原立方体锯成 27 个单位立方体．

这里，第一次锯，第二次锯，…，第六次锯，恰好与在原立方体中心的那个单位立方体的 6 个面一一对应．

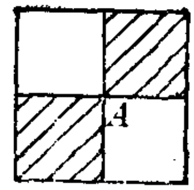
5．棋盘上的方格

所谓 $m\times n$ 的棋盘，是指一边由 m 个方格组成、另一边由 n 个方格组成的矩形棋盘．例如 8×8 的棋盘就是通常的国际象棋棋盘．

［问题］ 在 8×8 的棋盘上取两个小方格，这两个小方格恰有一个公共点，问有多少种不同的取法？

解 每一种取法，有一个点与它对应．这个点就是所取的两个小方格的公共点．它是棋盘上横线与竖线的交点，不在棋盘的边界上．

从右图可以看出，每一个点对应于两种不同的取法，即取两个黑格，或两个白格；与它们对应的是同一个点（A 点）. 所以，这里的映射是一个倍数映射（$m=2$）.



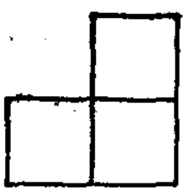
由于在 8×8 的棋盘上，内部的 7 条横线与 7 条竖线有 $7\times7=49$ 个交点，所以共有

$$49\times2=98$$

种不同的取法.

一般地，在 $m\times n$ 的棋盘中，取两个恰有一个公共点的小方格，共有 $2(m-2)(n-2)$ 种方法.

类似地，我们可以解决下面的问题：



［问题］ 从 $m\times n$ 的棋盘中，取出一个由三个方格组成的L形（左图），有多少种不同的取法？

答案是 $4(m-2)(n-2)$. 因为每一个点与 4 种取法对应.

6. 对　　称

在几何中，“对称”是一种常见的对应. 例如，在坐标平面中，令

$$(x,\ y)\mapsto(x,\ -y),$$

这个一一对应就是上半平面 $\{(x,\ y)\,|\,y>0\}$ 关于 x 轴的轴对称. 而

$$(x,\ y)\mapsto(-x,\ y)$$

是右半平面 $\{(x,\ y)\,|\,x>0\}$ 关于 y 轴的轴对称.

$$(x,\ y)\mapsto(-x,\ -y)$$

是以原点 $O(0,\ 0)$ 为对称中心的中心对称.

[问题] 甲、乙两人轮流在一张方桌(或圆桌)上放硬币(硬币互不重叠),直至放不下为止。规定放最后一枚的为胜.说明放第一枚硬币的甲,有百战百胜的策略.

解 甲将第一枚硬币放在桌子中央(对称中心). 以后,每当乙放一枚硬币时,甲就在(关于中心)对称的地方放一枚硬币. 这样,只要乙能放硬币,甲一定能放,所以甲必胜无疑.

7. 集合自身的对称

设 $X=\{1,\ 2,\cdots,\ n\}$ 是一个有限集合. X 到自身的映射 f:

$$x \mapsto n+1-x \qquad (\text{其中 } x=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

是一一对应(即第 1 节例 8 中的映射). 它可以称为**集合自身的对称**.

[问题 1] 求 $1+2+3+\cdots+n$.

解 将 $S=1+2+3+\cdots+n$ 与

$$S=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$$

相加,得

$$2S=\overbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}^{n\text{个}}=(n+1)n,$$

所以

$$S=\frac{n(n+1)}{2}.$$

这是一个众所周知的问题,它有各种各样的"变形".

[问题 2] 设不超过 n 并且与 n 互质的数共 $\varphi(n)$ 个. 如

果 n 的质因数分解式是

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

这里 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是不同的质数，那么，在数论中有计算$\varphi(n)$的公式

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1).$$

试利用这个公式，求出和

$$1+3+7+9+11+\cdots+99.$$

这里的加数，是$X=\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 100,\ x$为与 100 互质的自然数$\}$中的所有元素.

解 $f(x)=100-x$ 是集X自身的对称. 所以

$$99+97+93+91+89+\cdots+1$$

也是X中所有元素的和. 将它与

$$1+3+7+9+11+\cdots+99$$

相加，得 $100\varphi(100)$，从而所求的和为

$$\begin{aligned}\frac{100\varphi(100)}{2} &= \frac{100\times\varphi(2^2\times5^2)}{2}\\ &= \frac{100\times2\times5\times(2-1)(5-1)}{2}=2000.\end{aligned}$$

一般地，小于 n 并且与 n 互质的自然数的和为$\frac{1}{2}n\varphi(n)$.

[问题 3] 对于数集 M，M中最大的数与最小的数的和，称为M的特征，记为 $m(M)$. 求集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$的所有非空子集的特征的平均数.

解 设 $A\subset X$，则

$$A'=\{n+1-a \mid a\in A\}\subset X.$$

所以

$$A\mapsto A'$$

是X的子集的全体(子集组成的集)Y到Y自身的一一对应. 特征的平均数

$$g=\frac{1}{|Y|}\sum_{A\subset X}m(A)=\frac{1}{2|Y|}\sum_{A\subset X}(m(A)+m(A')).$$

注意A中最大(小)的数与A'中最小(大)的数相加得$n+1$,所以

$$\frac{1}{2}(m(A)+m(A'))=\frac{1}{2}\times 2(n+1)=n+1,$$

从而

$$g=\frac{1}{|Y|}\sum_{A\subset X}(n+1)=(n+1)\cdot\frac{1}{|Y|}\sum_{A\in Y}1=n+1.$$

8. 自然数的因数

设自然数n的(正)因数个数为$\tau(n)$,因数的和为$\sigma(n)$. 例如,对于$n=12=2^2\times 3$,有6个因数($\tau(12)=6$),即1,2,3,4,6,12. 因数的和为

$$\sigma(12)=1+2+3+4+6+12=28.$$

[问题] 证明:

(1) n的因数的积为$n^{\tau(n)/2}$;

(2) $\tau(n)\leqslant 2\sqrt{n}$;

(3) $\dfrac{\sigma(n)}{\tau(n)}\geqslant\sqrt{n}$.

解 (1) 设集$M=\{d|d$是n的因数$\}$,则由于$\dfrac{n}{d}$是自然数,而且是n的因数,所以

$$d\mapsto\frac{n}{d}\tag{1}$$

是集M到自身的一一对应（这与上一节的映射类似，只不过那里是$+$、$-$，现在是$\times$、$\div$）．n的所有因数的积是（符号$\prod$表示求积）．

$$S=\prod_{d\in M}d,$$

它也等于

$$\prod_{d\in M}\frac{n}{d}.$$

将这两个式子相乘，得

$$S^2=\prod_{d\in M}\left(d\cdot\frac{n}{d}\right)=\prod_{d\in M}n=n^{\tau(n)}.\qquad (\tau(n)=|M|)$$

所以

$$S=n^{\tau(n)/2}.$$

(2) 因为$d\cdot\dfrac{n}{d}=n$，所以d与$\dfrac{n}{d}$中总有一个$\leqslant\sqrt{n}$，另一个$\geqslant\sqrt{n}$．从而映射(1)也是集合

$$M_1=\{d\mid d\in M,\ d\leqslant\sqrt{n}\}$$

到

$$M_2=\{d\mid d\in M,\ d\geqslant\sqrt{n}\}$$

的一一对应．于是$|M_1|=|M_2|$，

$$\begin{aligned}\tau(n)&=|M|=|M_1\cup M_2|\\&\leqslant|M_1|+|M_2|=2|M_1|\leqslant2\sqrt{n}.\end{aligned}$$

(3) 由于m个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数，所以

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)}=\frac{1}{\tau(n)}\sum_{d\in M}d\geqslant\sqrt[\tau(n)]{\prod_{d\in M}d}=\sqrt[\tau(n)]{n^{\frac{\tau(n)}{2}}}=\sqrt{n}.$$

在上面的证明中，我们并未利用计算$\tau(n)$与$\sigma(n)$的公式．