编者的话

从根本上改革应试教育，全面推行素质教育，已成为我国基础教育的当务之急。

我们曾对五千名城乡少年作过问卷调查，结果表明：70%以上的少年朋友迫切希望通过阅读课外读物来实现“学会学习”的目的。“使少年朋友学会学习、主动发展”，是我们编辑出版《初中学科素质教育新起点丛书》的初衷。

与以往的一些学科辅导书籍不同的是，这套丛书拒绝死记硬背，不搞“题海战术”，力求生动有趣，着重“授人以渔”。毫无疑问，阅读这套丛书将有利于提高少年朋友的学习起点，有利于培养少年朋友的智能素质。

年少好读书。作为教育工作者，我们深知少年朋友对各门功课都有一种不可遏止的求知欲，同时又或多或少地对学科学习有一种不可名状的压力。如果这套丛书能激发少年朋友的学习欲望，稍许减轻学科学习上的压力，帮助你们轻松愉快地学好一些功课，我们就深感欣慰了。

目录

方法篇

趣 味 篇

应 用 篇

方 法 篇

有理数运算技巧

有理数的运算，一般是按照运算法则和运算顺序逐步进行，如果不出现计算错误，就可以得出正确结果.

如果要把这部分知识学“活”，真正提高自己的思维能力，使计算做到“准”而“快”，就要观察题目的特点，找出其中的规律，发现巧妙的算法.

1.凑整法

在计算中，为了计算的方便，常把非整数凑成整数，一般凑成整一、整十、整百、整千等数.

例1 计算 $89+899+8999+89999+899999$.

分析：观察各数的特征，它们都是由 8 和 9 组成，只要将第一个数加上 1 就凑成 90，第二个数加上 1，就凑成 900，…，最后一个数加 1，凑成 900000，再求和就很简便.

解：原式 $=(90+900+9000+90000+900000)-5$

$=999990-5$

$=999985$.

2.改变运算顺序

改变运算顺序，可以减小运算量.

例2 计算 $3\frac{1}{4}-2\frac{3}{8}+1\frac{1}{8}-48\times(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})$.

分析：按照算式的运算顺序计算，就较麻烦.如果我们把整

数与分数分别结合起来计算,就简捷得多.

解:原式 $=(3-2+1)-48\times\frac{1}{6}+48\times\frac{1}{8}+(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8})$

$=2-2=0.$

3.添括号或去括号

例3 计算 $1+2-3-4+5+6-7-8+\cdots+97+98-99-100$.

解:原式 $=(1-3)+(2-4)+(5-7)+(6-8)+\cdots+(97-99)+(98-100)$

$=(-2)\times 50=-100.$

例4 计算 $\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})-(\frac{1}{4}-\frac{1}{8})-\cdots-(\frac{1}{8192}-\frac{1}{16384})$.

分析:把所有小括号去掉,因为括号前面都是减号,所以括号中各数都要改变符号,这时恰好使一些数互相抵消了,整个算式只剩下 $\frac{1}{16384}$.

4.拆项法

在进行有理数计算时,根据不同的情况,常常将一个数拆成两个或两个以上的数,最常用的是这个关系式:

$$\frac{m+n}{mn}=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}.$$

除了这个关系式外,还有下面一些常见的关系式.若能灵活应用这些关系式,可大大简化计算.

(1) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$;

(2) $\frac{m}{n(n+m)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}$ 或 $\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m})$;

(3) $\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$;

(4) $\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

例 5　求$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{1994\times1995}$的值.

分析:观察题目,可以发现本题中的每一个分数的分子都是1,分母依次为 $1\times2,2\times3,\cdots$,即两个连续自然数之积.像这类分数可以分解成两个数之差,如$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$,$\cdots$,一般地,$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.这样,把每个分数恒等变换之后,计算就容易了.

解:原式$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{1994}-\frac{1}{1995})$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1994}-\frac{1}{1995}$$
$$=1-\frac{1}{1995}=\frac{1994}{1995}.$$

例 6　计算$\frac{1}{3\times7}+\frac{1}{7\times11}+\frac{1}{11\times15}+\cdots+\frac{1}{55\times59}$.

分析:同上例一样,把每个分数作恒等变换.

如$\frac{1}{3\times7}=\frac{1}{4}\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{7})$,$\frac{1}{7\times11}=\frac{1}{4}\times(\frac{1}{7}-\frac{1}{11})$,$\cdots$,一般地,当 $n>m$ 时,$\frac{1}{m\times n}=\frac{1}{n-m}(\frac{1}{m}-\frac{1}{n})$.根据这些等式,我们可以把这类分数作恒等变换,使计算由繁变简.

比较有理数的大小

我们常常遇到比较有理数的大小问题.解决这类问题的一般方法是作差与零比较,或作商与1比较.其实,还可以根据题目的特点,选取以下两种方法.

例1　已知 $A=54324\times54321$, $B=54322\times54323$,试判断 A、B 哪个大?大多少?

方法1:$\because$　$A=2950934004$,

$B=2950934006$,

$\therefore$　$B-A=2$.

故　B 比 A 大 2.

方法2:设　$a=54321$,则

$$A=a(a+3)=a^2+3a,$$

$$B=(a+1)(a+2)=a^2+3a+2.$$

于是　B 比 A 大 2.

1.各数加上同一个数再比较

例2　比较 $-\frac{95}{96}$, $-\frac{1995}{1996}$, $-\frac{96}{97}$, $-\frac{1996}{1997}$ 的大小.

分析:直接通分再比较大小,运算量很大,且容易出错.若把各数都加上1再比较,则十分简捷.

解:$-\frac{95}{96}+1=\frac{1}{96}$,

$-\frac{1995}{1996}+1=\frac{1}{1996}$,

$-\frac{96}{97}+1=\frac{1}{97}$,

$-\frac{1996}{1997}+1=\frac{1}{1997}$,

$\because \frac{1}{96}>\frac{1}{97}>\frac{1}{1996}>\frac{1}{1997}$,

$\therefore -\frac{95}{96}>-\frac{96}{97}>-\frac{1995}{1996}>-\frac{1996}{1997}$.

2.把分子通分

例3 已知五个分数$\frac{10}{17}$, $\frac{12}{19}$, $\frac{15}{23}$, $\frac{20}{33}$, $\frac{60}{97}$,按照由小到大的顺序排列是(　　)

(A)$\frac{20}{33}<\frac{60}{97}<\frac{15}{23}<\frac{12}{19}<\frac{10}{17}$.　(B)$\frac{10}{17}<\frac{20}{33}<\frac{15}{23}<\frac{12}{19}<\frac{60}{97}$.

(C)$\frac{10}{17}<\frac{20}{33}<\frac{60}{97}<\frac{12}{19}<\frac{15}{23}$.　(D)$\frac{10}{17}<\frac{20}{33}<\frac{12}{19}<\frac{60}{97}<\frac{15}{23}$.

分析:把分母通分十分困难,但把分子通分则容易.

$\because \frac{10}{17}=\frac{60}{102}$, $\frac{12}{19}=\frac{60}{95}$, $\frac{15}{23}=\frac{60}{92}$, $\frac{20}{33}=\frac{60}{99}$,

$\frac{60}{102}<\frac{60}{99}<\frac{60}{97}<\frac{60}{95}<\frac{60}{92}$,

$\therefore \frac{10}{17}<\frac{20}{33}<\frac{60}{97}<\frac{12}{19}<\frac{15}{23}$.　选(C).

一元一次方程的特殊解法

方程是中学数学的重要内容,解一元一次方程是解其他方

程的基础. 这部分的内容不难，但要提高解题速度，还要根据方程的特点，选用以下简便的解法.

1. 化小数为整数

例 1　解方程　$0.4(2x+3)=0.8(1-x)-0.5(x-2)$.

解：方程两边乘以 10，得

$$4(2x+3)=8(1-x)-5(x-2).$$

化简，得　　$21x=6$.

$\therefore x=\frac{2}{7}$.

2. 化分子、分母的小数为整数

例 2　解方程　$\frac{0.4x+0.6}{0.5}-\frac{0.03+0.02x}{0.03}=1$.

解：第一个分式的分子、分母同乘以 10，第二个分式的分子、分母同乘以 100，原方程可化为：

$$\frac{4x+6}{5}-\frac{3+2x}{3}=1.$$

去分母，化简得　$2x=12$.

$\therefore x=6$.

3. 约去两边的公因数

例 3　解方程　$75\times24\%=(8-x)\times50\%$.

解：两边约去公因数 50%，得

$36=8-x$.

$\therefore x=-28$.

4. 由外向内去括号

例 4　解方程　$\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{x}{5}+2\right)+3\right]+7=x$.

解：$\frac{x}{5}+2+\frac{9}{4}+7=x$.

$\therefore x=\dfrac{225}{16}$.

5.巧用运算律

例5 解方程 $2(3x+1)-3(6x+2)=-(21x+7)$.

分析:本题若先去括号,则计算量较大.仔细观察原方程,不难发现方程各项都有因式$(3x+1)$,故可逆用乘法分配律求解.

6.拆项

例6 解方程$\dfrac{x}{6}+\dfrac{x}{12}+\dfrac{x}{20}+\dfrac{x}{30}=1$.

分析:$\dfrac{x}{6}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}$,　$\dfrac{x}{12}=\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{4}$,

$\dfrac{x}{20}=\dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{5}$,　$\dfrac{x}{30}=\dfrac{x}{5}-\dfrac{x}{6}$.

原方程拆项相互抵消后,再解方程就要简便得多.

抓住不变量

在瞬息万变的自然界里,在千变万化、错综复杂的社会生活中,“变化”是事物的本质特征,“不变”而往往是相对的、暂时的现象.如果我们能抓住“不变”,对付“万变”,有时也能解决问题.在解某些数学题时,这种“抓不变,应万变”的思路常常可以奏效.下面举例说明.

1986年江苏省初中数学竞赛中有这样一道题:

任意调换五位数12345的各数位上数字的位置,所得的五位数中,质数的个数是(　　)

$(A)4$.　$(B)8$.　$(C)12$.　$(D)0$.

分析:如果从调换五位数各数位数字的各种情况分别讨论,将十分繁琐.从整体上考虑,抓住它们的"数字和"不变这个关键,问题就轻而易举地解决了.

不论如何调换各数位上的数字,它们的各数位上的数字之和不变,都是

$1+2+3+4+5=15.$

15 能被 3 整除,所以所得的五位数也一定能被 3 整除,都不是质数,故选(D).

第 36 届美国中学数学竞赛试卷上有这样一道题:

六只袋子分别装有 18、19、21、23、25 和 34 粒弹子.其中有一只袋子装的全是有缺口的弹子,其他五袋都是不含缺口的弹子.珍妮取了三袋,乔治取了另外两袋,剩下的那袋是有缺口的弹子.若珍妮得到的弹子总数比乔治多一倍,则有缺口的弹子有(　　)

(A)18.　(B)19.　(C)21.　(D)23.　(E)25.

分析:如果考虑珍妮取三袋弹子比乔治取两袋弹子数多一倍的各种情况,比较繁琐.如果抓住"被取走的五袋弹子之和能被 3 整除",解答就不难了.

六袋弹子之和为 $18+19+21+23+25+34=140$.因为 $140\div3=46\cdots\cdots2$.由此断定剩下的那袋的弹子数被 3 除后应余 2.逐个考察六袋弹子数,知道剩下的那袋是 23 粒有缺口的弹子,选(D).

整数分离法

在数学竞赛中,有些题似乎很难,但如果能灵活运用整数分离法进行分析,就找到了解题的突破口.现举例如下:

例1 使 n^3+100 能被 $n+10$ 整除的正整数 n 的最大值是( )

(A)90. (B)890. (C)900. (D)9900.

解:$\frac{n^3+100}{n+10}$

$$=\frac{n^3+1000-900}{n+10}$$

$$=\frac{(n+10)(n^2-10n+100)-900}{n+10}$$

$$=n^2-10n+100-\frac{900}{n+10}.$$

要使 $\frac{n^3+100}{n+10}$ 为整数,只要 $\frac{900}{n+10}$ 为整数,故 n 的最大值是890.选(B).

例2 一队旅客乘坐公共汽车.若每辆公共汽车坐22人,则剩下1人未上车;如果有一辆公共汽车空车开走,那么所有的旅客正好能平均分乘到其他车上.已知每辆车最多只能容纳32人.求一共有多少辆公共汽车?多少名乘客?

解:设一共有 k 辆公共汽车,开走一辆空车后,平均每辆车有 n 名乘客.依题意有

$$22k+1=n(k-1).$$

$\therefore n=\dfrac{22k+1}{k-1}$

$=\dfrac{22k-22+23}{k-1}$

$=22+\dfrac{23}{k-1}$.

$\because n$ 为正整数,

$\therefore k=2$ 或 $k=24$.

当 $k=2$ 时,

$n=45$,不合题意,舍去;

当 $k=24$ 时,

$n=23$, $n(k-1)=529$.

答:一共有 23 辆公共汽车,529 名乘客.

想一想:

在向"希望工程"捐款活动中,甲班的 m 个男生和 11 个女生的捐款总数与乙班的 9 个男生和 n 个女生的捐款总数相等,都是 $(mn+9m+11n+145)$ 元.已知每人的捐款数相等,且都是整数元,求每人的捐款数?

字母代数巧解题

我们对于计算题,不管数值多大,一般是不加思考直接计算.其实,这种习惯不好,在计算中浪费了大量的时间.有些计算题,如果用字母代替数,就能得到巧妙、简捷的解法.