

## 编者的话

从根本上改革应试教育,全面推行素质教育,已成为我国基础教育的当务之急。

我们曾对近千名青少年作过问卷调查,结果表明:70%以上的青少年朋友迫切希望通过阅读课外读物来实现“学会学习”的目的。使青少年朋友“学会学习,主动发展”,是我们编辑出版《**江苏工业学院图书馆藏书音**》(学科素质教育新起点丛书)的初衷。

与以往的一些学科辅导书籍不同的是,这套丛书拒绝死记硬背,不搞“题海战术”,力求生动有趣,着重“授人以渔”。毫无疑问,阅读这套丛书将有利于提高少年朋友的学习起点,有利于培养少年朋友的智能素质。

年少好读书。作为教育工作者,我们深知少年朋友对各门功课都有一种不可遏止的求知欲,同时又或多或少地对学科学习有一种不可名状的压力。如果这套丛书能激发少年朋友的学习欲望,稍许减轻学科学习上的压力,帮助你们轻松愉快地学好一些功课,我们就深感欣慰了。



---

## 方 法 篇

---

有理数运算技巧	(3)
比较有理数的大小	(6)
一元一次方程的特殊解法	(7)
抓住不变量	(9)
整数分离法	(11)
字母代数巧解题	(12)
幂的运算性质的逆用	(14)
过列方程审题关	(15)
算术解法与代数解法	(17)
$(\sqrt{a})^2$ 与 $\sqrt{a^2}$ 的异同	(19)
列方程的设元技巧	(20)
追及问题的解法	(23)
译式法解应用题	(26)
一道航行题的多种解法	(28)
巧用倒推法解题	(30)
方程组的特殊解法	(32)
不定方程	(35)
定义新运算问题	(38)
近似数中的“学问”	(40)
乘法公式的灵活运用	(42)
因式分解的数学思想	(45)
因式分解的常用方法	(48)
分组分解例说	(51)

因式分解的应用	(52)
自然数乘方的个位数字	(55)
分式求值技巧种种	(57)
分式加减法则的逆用	(60)
二次要式的化简	(61)
数字穿“墙”的奥妙	(64)
比较二次根式的大小	(65)
一元二次方程的解法	(67)
分式方程的解法	(69)
无理方程的解法	(72)
增根的应用	(75)
二元二次方程的解法	(76)
重构方程组巧求参数值	(79)
方程的根的应用	(80)
正解 误解 巧解	(82)
整体思维的应用	(84)
一次函数图象的特殊情况	(86)
二次函数的解析式	(88)
从锯角问题谈分类思想	(90)
学好定理 提高解题能力	(92)
如何学好概念	(94)
抽屉原理	(97)
解数学题的常用技巧	(99)
根与系数的关系的逆用	(102)
插值代换的妙用	(105)
数学解题的转换途径	(109)
代数式求值的巧解策略	(112)
待定系数法	(116)

---

配方法	(119)
换元法	(123)
数形结合法	(128)
特殊值法	(133)
观察发现法	(136)

---

### 趣 味 篇

---

数学笑话	(141)
数学家的幽默	(145)
奇怪的麦比乌斯圈	(147)
$\sqrt{2}$ 惨案	(149)
全体数字向他称臣	(151)
莱布尼茨与二进制	(152)
魅力无穷的费尔马大定理	(154)
数学史上的一桩冤案	(155)
破译密码的数学家	(157)
裴多菲戏弄富翁	(158)
赌徒卡丹	(160)
这样给分合理吗	(163)
有趣的 7	(164)
数学史上的“张冠李戴”	(165)
奇妙的幻方	(167)
话说方程	(168)
迷人的 0.168	(169)
国王的怪题	(170)
智力玩具——移十五	(171)
趣谈自生数	(172)

---

**应 用 篇**

---

洗衣服的数学	(177)
从“守株待兔”话概率	(178)
四舍五入的“妙用”	(180)
佛缘有多重	(181)
名义利率与实际利率	(183)
不等式的实际应用	(185)
大衍求一	(187)
极端原理	(189)
公说公有理 婆说婆有理	(192)
分钱的风波	(194)
黑白分明	(196)
最佳选择	(198)
竞卖战略	(201)
应用数学题分类	(202)
数学知识应用两例	(205)
数的推理	(208)
游戏中的逆向推理	(209)
揭开数学魔术的面纱	(211)
揭示“神猜”ABC	(213)

# 方 法 篇



## 有理数运算技巧

有理数的运算,一般是按照运算法则和运算顺序逐步进行,如果不出现计算错误,就可以得出正确结果.

如果要把这部分知识学“活”,真正提高自己的思维能力,使计算做到“准”而“快”,就要观察题目的特点,找出其中的规律,发现巧妙的算法.

### 1. 凑整法

在计算中,为了计算的方便,常把非整数凑成整数,一般凑成整一、整十、整百、整千等数.

例1 计算  $89 + 899 + 8999 + 89999 + 899999$ .

分析:观察各数的特征,它们都是由8和9组成,只要将第一个数加上1就凑成90,第二个数加上1,就凑成900,……,最后一个数加1,凑成900000,再求和就很简便.

$$\begin{aligned}\text{解:原式} &= (90 + 900 + 9000 + 90000 + 900000) - 5 \\ &= 999990 - 5 \\ &= 999985.\end{aligned}$$

### 2. 改变运算顺序

改变运算顺序,可以减小运算量.

例2 计算  $3\frac{1}{4} - 2\frac{3}{8} + 1\frac{1}{8} - 48 \times (\frac{1}{6} - \frac{1}{8})$ .

分析:按照算式的运算顺序计算,就较麻烦.如果我们把整



数与分数分别结合起来计算,就简捷得多.

$$\begin{aligned}\text{解:原式} &= (3-2+1) - 48 \times \frac{1}{6} + 48 \times \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 2 - 2 = 0.\end{aligned}$$

### 3. 添括号或去括号

例3 计算  $1+2-3-4+5+6-7-8+\cdots+97+98-99-100$ .

$$\begin{aligned}\text{解:原式} &= (1-3) + (2-4) + (5-7) + (6-8) + \cdots + (97-99) + (98-100) \\ &= (-2) \times 50 = -100.\end{aligned}$$

例4 计算  $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{8192} - \frac{1}{16384}\right)$ .

分析:把所有小括号去掉,因为括号前面都是减号,所以括号中各数都要改变符号,这时恰好使一些数互相抵消了,整个算式只剩下  $\frac{1}{16384}$ .

### 4. 拆项法

在进行有理数计算时,根据不同的情况,常常将一个数拆成两个或两个以上的数,最常用的是这个关系式:

$$\frac{m+n}{mn} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

除了这个关系式外,还有下面一些常见的关系式.若能灵活应用这些关系式,可大大简化计算.

$$(1) \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

$$(2) \frac{m}{n(n+m)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \text{ 或 } \frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right);$$

$$(3) \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)};$$

$$(4) \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

例5 求  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{1994 \times 1995}$  的值.

分析: 观察题目, 可以发现本题中的每一个分数的分子都是1, 分母依次为  $1 \times 2, 2 \times 3, \cdots$ , 即两个连续自然数之积. 像这类分数可以分解成两个数之差, 如  $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \cdots$ , 一般地,  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ . 这样, 把每个分数恒等变换之后, 计算就容易了.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{1994} - \\ &\frac{1}{1995}) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1994} - \frac{1}{1995} \\ &= 1 - \frac{1}{1995} = \frac{1994}{1995}. \end{aligned}$$

例6 计算  $\frac{1}{3 \times 7} + \frac{1}{7 \times 11} + \frac{1}{11 \times 15} + \cdots + \frac{1}{55 \times 59}$ .

分析: 同上例一样, 把每个分数作恒等变换.

如  $\frac{1}{3 \times 7} = \frac{1}{4} \times (\frac{1}{3} - \frac{1}{7}), \frac{1}{7 \times 11} = \frac{1}{4} \times (\frac{1}{7} - \frac{1}{11}), \cdots$ , 一般地, 当  $n > m$  时,  $\frac{1}{m \times n} = \frac{1}{n-m} (\frac{1}{m} - \frac{1}{n})$ . 根据这些等式, 我们可以把这类分数作恒等变换, 使计算由繁变简.

## 比较有理数的大小

我们常常遇到比较有理数的大小问题. 解决这类问题的一般方法是作差与零比较, 或作商与 1 比较. 其实, 还可以根据题目的特点, 选取以下两种方法.

例 1 已知  $A = 54324 \times 54321$ ,  $B = 54322 \times 54323$ , 试判断  $A$ 、 $B$  哪个大? 大多少?

$$\text{方法 1: } \because A = 2950934004,$$

$$B = 2950934006,$$

$$\therefore B - A = 2.$$

故  $B$  比  $A$  大 2.

方法 2: 设  $a = 54321$ , 则

$$A = a(a+3) = a^2 + 3a,$$

$$B = (a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2.$$

于是  $B$  比  $A$  大 2.

1. 各数加上同一个数再比较

例 2 比较  $-\frac{95}{96}$ ,  $-\frac{1995}{1996}$ ,  $-\frac{96}{97}$ ,  $-\frac{1996}{1997}$  的大小.

分析: 直接通分再比较大小, 运算量很大, 且容易出错. 若把各数都加上 1 再比较, 则十分简捷.

$$\text{解: } -\frac{95}{96} + 1 = \frac{1}{96},$$

$$-\frac{1995}{1996} + 1 = \frac{1}{1996},$$

$$-\frac{96}{97} + 1 = \frac{1}{97},$$

$$-\frac{1996}{1997} + 1 = \frac{1}{1997},$$

$$\therefore \frac{1}{96} > \frac{1}{97} > \frac{1}{1996} > \frac{1}{1997},$$

$$\therefore -\frac{95}{96} > -\frac{96}{97} > -\frac{1995}{1996} > -\frac{1996}{1997}.$$

2. 把分子通分

例3 已知五个分数  $\frac{10}{17}$ ,  $\frac{12}{19}$ ,  $\frac{15}{23}$ ,  $\frac{20}{33}$ ,  $\frac{60}{97}$ , 按照由小到大的顺序排列是( )

$$(A) \frac{20}{33} < \frac{60}{97} < \frac{15}{23} < \frac{12}{19} < \frac{10}{17}. \quad (B) \frac{10}{17} < \frac{20}{33} < \frac{15}{23} < \frac{12}{19} < \frac{60}{97}.$$

$$(C) \frac{10}{17} < \frac{20}{33} < \frac{60}{97} < \frac{12}{19} < \frac{15}{23}. \quad (D) \frac{10}{17} < \frac{20}{33} < \frac{12}{19} < \frac{60}{97} < \frac{15}{23}.$$

分析: 把分母通分十分困难, 但把分子通分则容易.

$$\therefore \frac{10}{17} = \frac{60}{102}, \quad \frac{12}{19} = \frac{60}{95}, \quad \frac{15}{23} = \frac{60}{92}, \quad \frac{20}{33} = \frac{60}{99},$$

$$\frac{60}{102} < \frac{60}{99} < \frac{60}{97} < \frac{60}{95} < \frac{60}{92},$$

$$\therefore \frac{10}{17} < \frac{20}{33} < \frac{60}{97} < \frac{12}{19} < \frac{15}{23}. \quad \text{选}(C).$$

## 一元一次方程的特殊解法

方程是中学数学的重要内容, 解一元一次方程是解其他方

程的基础.这部分的内容不难,但要提高解题速度,还要根据方程的特点,选用以下简便的解法.

### 1. 化小数为整数

例1 解方程  $0.4(2x+3) = 0.8(1-x) - 0.5(x-2)$ .

解:方程两边乘以10,得

$$4(2x+3) = 8(1-x) - 5(x-2).$$

化简,得  $21x = 6$ .

$$\therefore x = \frac{2}{7}.$$

### 2. 化分子、分母的小数为整数

例2 解方程  $\frac{0.4x+0.6}{0.5} - \frac{0.03+0.02x}{0.03} = 1$ .

解:第一个分式的分子、分母同乘以10,第二个分式的分子、分母同乘以100,原方程可化为:

$$\frac{4x+6}{5} - \frac{3+2x}{3} = 1.$$

去分母,化简得  $2x = 12$ .

$$\therefore x = 6.$$

### 3. 约去两边的公因数

例3 解方程  $75 \times 24\% = (8-x) \times 50\%$ .

解:两边约去公因数50%,得

$$36 = 8 - x.$$

$$\therefore x = -28.$$

### 4. 由外向内去括号

例4 解方程  $\frac{3}{4} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{x}{5} + 2 \right) + 3 \right] + 7 = x$ .

解:  $\frac{x}{5} + 2 + \frac{9}{4} + 7 = x$ .

$$\therefore x = \frac{225}{16}.$$

### 5. 巧用运算律

例5 解方程  $2(3x+1) - 3(6x+2) = -(21x+7)$ .

分析:本题若先去括号,则计算量较大.仔细观察原方程,不难发现方程各项都有因式 $(3x+1)$ ,故可逆用乘法分配律求解.

### 6. 拆项

例6 解方程  $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{20} + \frac{x}{30} = 1$ .

$$\text{分析: } \frac{x}{6} = \frac{x}{2} - \frac{x}{3}, \quad \frac{x}{12} = \frac{x}{3} - \frac{x}{4},$$

$$\frac{x}{20} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5}, \quad \frac{x}{30} = \frac{x}{5} - \frac{x}{6}.$$

原方程拆项相互抵消后,再解方程就要简便得多.

## 抓住不变量

在瞬息万变的自然界里,在千变万化、错综复杂的社会生活中,“变化”是事物的本质特征,“不变”而往往是相对的、暂时的现象.如果我们能抓住“不变”,对付“万变”,有时也能解决问题.在解某些数学题时,这种“抓不变,应万变”的思路常常可以奏效.下面举例说明.

1986年江苏省初中数学竞赛中有这样一道题:

任意调换五位数12345的各数位上数字的位置,所得的五位数中,质数的个数是( )

(A)4. (B)8. (C)12. (D)0.

分析:如果从调换五位数各数位数字的各种情况分别讨论,将十分繁琐.从整体上考虑,抓住它们的“数字和”不变这个关键,问题就轻而易举地解决了.

不论如何调换各数位上的数字,它们的各数位上的数字之和不变,都是

$$1+2+3+4+5=15.$$

15 能被 3 整除,所以所得的五位数也一定能被 3 整除,都不是质数,故选(D).

第 36 届美国中学数学竞赛试卷上有这样一道题:

六只袋子分别装有 18、19、21、23、25 和 34 粒弹子.其中有一只袋子装的全是有缺口的弹子,其他五袋都是不含缺口的弹子.珍妮取了三袋,乔治取了另外两袋,剩下的那袋是有缺口的弹子.若珍妮得到的弹子总数比乔治多一倍,则有缺口的弹子有( )

(A)18. (B)19. (C)21. (D)23. (E)25.

分析:如果考虑珍妮取三袋弹子比乔治取两袋弹子数多一倍的各种情况,比较繁琐.如果抓住“被取走的五袋弹子之和能被 3 整除”,解答就不难了.

六袋弹子之和为  $18+19+21+23+25+34=140$ . 因为  $140 \div 3=46 \cdots 2$ . 由此断定剩下的那袋的弹子数被 3 除后应余 2. 逐个考察六袋弹子数,知道剩下的那袋是 23 粒有缺口的弹子,选(D).

## 整数分离法

在数学竞赛中,有些题似乎很难,但如果能灵活运用整数分离法进行分析,就找到了解题的突破口.现举例如下:

例1 使  $n^3 + 100$  能被  $n + 10$  整除的正整数  $n$  的最大值是 ( )

(A)90.          (B)890.          (C)900.          (D)9900.

$$\begin{aligned} \text{解: } \frac{n^3 + 100}{n + 10} &= \frac{n^3 + 1000 - 900}{n + 10} \\ &= \frac{(n + 10)(n^2 - 10n + 100) - 900}{n + 10} \\ &= n^2 - 10n + 100 - \frac{900}{n + 10}. \end{aligned}$$

要使  $\frac{n^3 + 100}{n + 10}$  为整数,只要  $\frac{900}{n + 10}$  为整数,故  $n$  的最大值是 890. 选(B).

例2 一队旅客乘坐公共汽车.若每辆公共汽车坐 22 人,则剩下 1 人未上车;如果有一辆公共汽车空车开走,那么所有的旅客正好能平均分乘到其他车上.已知每辆车最多只能容纳 32 人.求一共有多少辆公共汽车?多少名乘客?

解:设一共有  $k$  辆公共汽车,开走一辆空车后,平均每辆车有  $n$  名乘客.依题意有

$$22k + 1 = n(k - 1).$$



$$\begin{aligned}\therefore n &= \frac{22k+1}{k-1} \\ &= \frac{22k-22+23}{k-1} \\ &= 22 + \frac{23}{k-1}.\end{aligned}$$

$\therefore n$  为正整数,

$\therefore k=2$  或  $k=24$ .

当  $k=2$  时,

$n=45$ , 不合题意, 舍去;

当  $k=24$  时,

$n=23, n(k-1)=529$ .

答: 一共有 23 辆公共汽车, 529 名乘客.

想一想:

在向“希望工程”捐款活动中, 甲班的  $m$  个男生和 11 个女生的捐款总数与乙班的 9 个男生和  $n$  个女生的捐款总数相等, 都是  $(mn+9m+11n+145)$  元. 已知每人的捐款数相等, 且都是整数元, 求每人的捐款数?

## 字母代数巧解题

我们对于计算题, 不管数值多大, 一般是不加思考直接计算. 其实, 这种习惯不好, 在计算中浪费了大量的时间. 有些计算题, 如果用字母代替数, 就能得到巧妙、简捷的解法.