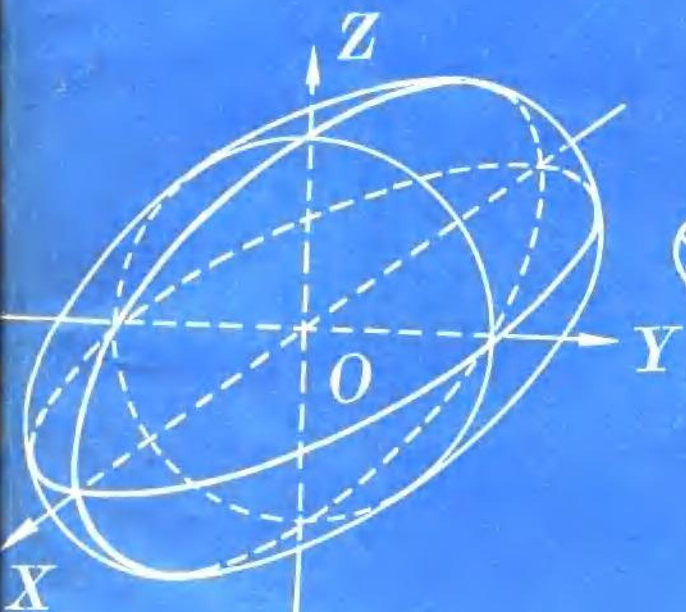
1978年

上海市数学会论文选编

上 海 市 数 学 会 编



$$M\xi=\sum_{k=0}^{n} kP(\xi=k)$$

$$\rho=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

上海科学技术文献出版社

前　　言

上海市数学会于1978年8月27日到8月29日召开了文化大革命后的第一次年会。在会议上共宣读(包括书面报告)论文116篇,其中综合性论文34篇。学会理事长苏步青教授在全体会议上作了题为《计算几何的兴起》的综合性学术报告，颇受与会者注意。美籍华裔数学家伍鸿熙教授也应邀在全体会议上作了深入浅出的有启发性的报告——《几何中的刚性问题》。

通过学术报告和讨论，交流了近几年来，上海数学工作者在纯粹数学、应用数学和计算数学的科学研究以及数学教学方面的大量成果(其中某些成果是相当优秀的)。我们感到基础理论研究和教学在受到“四人帮”严重摧残之后,能够在如此短的时间内,取得这样一些成果是很不容易的。当然目前也还是处于恢复阶段,总的说来我们的论文水平与实现四个现代化对我们的要求,同国际先进水平相比,差距还是很大的,需要我们急起直追。

为了进一步推动数学研究、加强国内数学的学术交流,我们将年会上报告的一小部分论文摘要(共30篇)汇编出版,供国内数学工作者及有关同志参考。如有不当之处,希望广大读者不吝批评指正。

上海市数学会理事会
1979年

1. 几何外形设计的理论及其应用……复旦大学 苏步青 (1)

2. 规范场数学结构的一种表述方式……复旦大学 谷超豪 (2)

3. 线性算子理论的若干问题……大学 夏道行 严绍宗 舒五昌 (4)

4. 球对称的SU_2规范场……复旦大学 胡和生 (7)

5. 关于拟不变变换群上的拓扑和无限维李群……复旦大学 杨亚立 (9)

6. Yonede 范畴与线性拓扑空间……复旦大学 肖尔健 (12)

7. 与线性变换完全环同构的环……复旦大学 许永华 (15)

8. 关于$L^p[0, 1]$和一类奥尔里奇空间上的测度……华东师范大学 吴良森 (19)

9. 单叶函数的系数估计和不等式……复旦大学 任福尧 张锦豪 (21)

10. 关于整函数导出的非拟解析函数空间……华东师范大学 张奠宙 (24)

11. 关于样条函数……复旦大学 陈天平 (25)

12. 有关偏微分方程的一些应用问题……复旦大学 数学系偏微分方程教研组 数学研究所微分方程研究室 (28)

13. 关于二个自变量拟线性双曲型方程组的边值问题……复旦大学 李大潜 俞文魮 (31)

14. 二阶线性椭圆型方程组广义黎曼-希尔伯特问题……复旦大学 李明忠 侯宗义 (32)

15. 高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动……复旦大学 江福汝 高汝熹 (35)

16. 关于最优控制理论和计算机控制的几个问题……复旦大学 李训经 (39)

17. 线性多变量系统第 II 类规范形的演化……华东师范大学 郑毓蕃 (43)

18. 矩阵的 Jordan 标准形的变换矩阵的计算方法……复旦大学 蒋尔雄 (46)

19. 流体力学问题的差分解法……上海科学技术大学 郭本瑜 (50)

20. 激光核聚变的数值计算……上海科学技术大学 潘仲雄、张卫生、王翼飞 中国科学院上海光学精密机械研究所 徐至展 (53)

21. 无穷空间问题的数值解法及其在酶作用原理研究中的应用……上海计算技术研究所 李子才 (56)

22. 自反馈静压轴承系统的全局稳定性……北京工业大学 邓乃扬 上海师范学院 沈家骐 (59)

23. 化学反应方程中的奇摄动问题……华东师范大学 陈美廉 徐钧涛 (61)

24. 关于非线性规划中直接搜索法的理论……复旦大学 俞文魮 (63)

25. 关于异侧对称策略的判别条件……上海交通大学 胡毓达 (66)

26. 用线性逼近法求解非线性管道网络问题的收敛性……上海师范学院 张建中 (68)

27. 总体最优化及初始点估计的一个数论方法……上海师范学院 严仲德 (72)

28. 在概率统计与计算机交界面上的一些工作……复旦大学 信息论教研组 (74)

29. Cramér-Rao 不等式成立的充要条件……华东师范大学 郑伟安 (76)

30. 追加试验的最优设计……上海师范学院 周敬良 武汉大学 张尧庭 (78)

附录 上海市数学会 1978 年年会论文报告目录……(85)

几何外形设计的理论及其应用

复旦大学　苏步青

在计算几何中，插值和逼近的技巧经常被利用到曲线和曲面去。"几何外形"的各性质却不同于函数的性质，我们要求的是一种在所允许的范围内可以接受的贴近拟合，它既保持着曲线或曲面的本性而又是光滑或光顺的。

"光顺"是指拐点不能太多。在有限处拐点个数对于仿射变换是不变的，对于参数的线性变换也是不变的。

下面仅举三次参数样条曲线和曲面的例子和有关的拐点与奇点问题。

如所知，这种曲线适用于大挠度的情况．最初为 S. A. Coons(1967)所使用，后来由 J. H. Ahlberg (1971)、穗坂卫(1969)、柳生孝昭(1974)等人加以扩张。

我们考察三次参数曲线段，方程为

$$(E)\quad \begin{cases} x=a_0+a_1t+\dfrac{1}{2!}a_2t^2+\dfrac{1}{3!}a_3t^3; \\ y=b_0+b_1t+\dfrac{1}{2!}b_2t^2+\dfrac{1}{3!}b_3t^3。\end{cases}$$

对其中 t 可有两种取法：(1) $0\leqslant t\leqslant 1$；(2) $0\leqslant t\leqslant T$，T 表示所讨论曲线段的弦长。

为了检查这个曲线段有没有拐点，我们首先对(E)中的参数 t 的取值不加任何限制，从而所考察的不是曲线段而是整根曲线，然后对各种插值曲线段进行拐点的检查。

我们作两向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，它们的向量积是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(p,\ q,\ r)$，从此作

$$I=\left(\frac{q}{p}\right)^2-2\left(\frac{r}{p}\right)。$$

容易证明：I 是曲线(E)的一个内在仿射不变量。还可证明：

当 $I>0$ 时，曲线上有两个实拐点；当 $I=0$ 时，曲线上出现一个尖点；当 $I<0$ 时，曲线上出现一个二重点。曲线的拐点方程是

$$pt^2-2qt+2r=0。$$

假定曲线段在两端点的曲率是同符号，那么第一种参数曲线要使两个实拐点在曲线段上出现的充要条件是：(1)$q^2-2pr>0$；(2)$p,\ q,\ r$ 有同符号；(3)$\dfrac{q}{p}<1$。同样，在第二种情况下的充要条件是：(1)和(2)完全同上，只是(3)$\dfrac{q}{p}<T$。

为了消除曲线有两端点间的一段可能出现的多余拐点，决定两端点的切线长度的正则区域。

为了解决 Bézier 曲线及其拓广的拐点问题，把仿射不变量理论拓广到平面上 n 次有理整曲线去，获得了 $2n-5$ 个相对的仿射不变量。

规范场数学结构的一种表述方式

复旦大学　谷超豪

1. 规范场理论起源于电磁场的研究。在考虑带电粒子和电磁场相互作用时，粒子的波函数有位相的不定性（在各点可进行独立的 U_1 群的变换），这种不定性和电磁势的不定性恰好互相抵偿，从而使电磁场理论和 U_1 群联系起来，形成了 U_1 群的规范场理论，并已在高能物理实验中受到了很多检验。1954 年杨振宁和 R. L. Mills 根据中子和质子有近似的对称性这一事实，首先提出了非 Abel 群的规范场理论[1]。最近十余年来，这一理论有很大发展：在弱相互作用方面已经取得了很重要的成就，试用于强子的结构也有一定的进展，并且，引力理论也和规范场关系密切，也在引起人们的注意。在这里叙述一下我们所取得的若干数学结果及某些物理应用。

2. 设 M 为 4 维的 Minkowski 空间，G 为李群，规范场一般由规范势形式（取值于 G 的李代数 g 的一次微分形式）

$$b=b_\lambda dx^\lambda=b_\lambda^a(x)X_a dx^\lambda \quad (\lambda=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ a=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

所定义，式中 X_a 是 g 的一组基，又

$$F_{\lambda\mu}=b_{\lambda,\mu}-b_{\mu,\lambda}-[b_\lambda,\ b_\mu]$$

称为场的强度，式中逗号表偏导数，方括号为换位运算，势之间可以容许规范变换。

规范场的理论可以由路径位相因子来描述[2]，弧的微分 $x\,x+dx$ 所对应的位相因子为 $I+b$，这里 I 为 G 的恒等元素，b 即为规范势形式。

为了尽可能地消除规范不定性，我们提出了环路位相因子方法[3]，可以把规范场理解为以一定点 O 出发又回到 O 的环路集合到 G 的映照，但须满足同态性和可微分性。为了解释可微分性，我们需要引入一组标准通路 $\{ox\}$，标准微分三角形 $o\,x\,x+dx\,o$ 的位相因子 $I+k$ 可成为规范场理论的出发点。如果再引入 ox 的位相因子 Φ_{0x}，那末我们重新得到了原来意义的规范场。Φ_{ox} 的给定称为给出一个规范。

这个表述方式（以及相应的观点）有相当的应用，例如：

(1) 我们证明了：规范场的强度添上规范，就决定了规范场（规范势），可以把规范理解为位相的参考系统的给定。在非 Abel 规范场的情形，强度因参考系统而有不同的解析表示，所以讲到强度需要联系参考系统。从这个观点可以推导出下述结论：场的强度（但要联系规范）仍然是决定非 Abel 规范场的物理量。

(2) 既然规范势联系于规范，那就可以把决定规范场方程的拉氏密度函数加以增补，使其保持规范不变性，并能使规范粒子成为有质量的粒子。这样，我们就得到了一个结论：在规范变换不变的理论体系中，规范粒子可以有质量[4]。

这个方法对于研究规范场的等价性，可化约性，时空对称性等[2,5]都有方便之处。

3. 在研究磁单极时，空间 M 应除去一些奇点，规范场相应于非平凡的主纤维丛上的联络[6]。又在研究正定欧氏空间中的瞬子解时，由于空间非紧致，不易处理，可用共形变换使之

成为 S^4，丛也成为非平凡的[7]，所以非平凡丛在物理上是有必要考虑的。

我们发现，满足同态性和可微性这两个条件的环路集到 G 的对应，依然是非平凡丛的规范场的一个基本的描述方式。此时规范仍然可以定义作标准路径的位相因子，只是标准路径的构作比较复杂．成立：规范场的强度和若干个环路的位相因子决定了规范场。

从数学上看，上述表述方式的含义是：流形 M 上从 O 环路到 G 的满足同态性和可微性的映照（和乐映照）能同时又唯一（除等价外）决定了以 M 为底的一个 G 主丛和其上的一个联络。

参 考 文 献

[1] Yang, C. N. and Mills, R. L., Phys. Rev. 96 (1954), 161.

[2] Yang, C. N., Phys. Rev. Lett. 33 (1974), 445.

[3] 谷超豪，《复旦学报》(1976), No. 2, 51；高能物理和核物理, 2 (1978), 97.

[4] 谷超豪，有质量的规范粒子(未发表)。

[5] 谷超豪，《复旦学报》(1977), No. 2, 30.

[6] Wu, T. T. and Yang, C. N., Phys. Rev. D12 (1975), 3943.

[7] Atiyah, M. F., Hitchin, N. J. and Singer, I. M., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 74 (1977).

线性算子理论的若干问题

复旦大学　夏道行　严绍宗　舒五昌

§1　压缩算子酉扩张和不变子空间理论

(1) C. Foias 和 Sz. Nagy 曾研究 H 中完全非酉压缩算子的不变子空间与算子特征函数的正则分解的关系。在[8]中解除了完全非酉的限制，得到了一般压缩算子的结果。首先，在[8]中证明了任何压缩算子酉等价于下述定理中函数模型，因此只需就函数模型来讨论。

定理　设 $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{C}_*, \Theta\}$ 是纯压缩解析函数，$\mathscr{H}$ 是可析 Hilbert 空间，$\mathscr{H}(\cdot)\subset\mathscr{H}$ 是 $([0, 2\pi], \beta, \mu)$ 上强可测投影算子值函数，T 是 $\mathfrak{K}=[H^2(\mathfrak{C}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{C})}\oplus\mathscr{H}(\cdot)L^2(\mu, \mathscr{H})]\ominus\{\Theta W\oplus\Delta W\oplus 0 \mid W\in H^2(\mathfrak{C})\}$ 中的压缩算子，它的共轭算子是

$$T^*(u\oplus V\oplus f)=e^{-it}(u(e^{it})-u(0))\oplus e^{-it}V(t)\oplus e^{-it}f(t)。$$

设 $\mathfrak{K}_1$ 是 T 的一个不变子空间，则必有压缩解析函数 $\{\mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \Theta_1\}$，$\{\mathfrak{F}, \mathfrak{C}_*, \Theta_2\}$，使 $\Theta=\Theta_2\Theta_1$。又有强可测投影算子值函数 $Q_3(\cdot)\subset\mathscr{H}(\cdot)$，$\mathscr{B}(\cdot)\subset\mathscr{H}(\cdot)$，使相应的分解是正则的(定义略)这时若记 $\mathfrak{K}_2=\mathfrak{K}\ominus\mathfrak{K}_1$ 则 $\mathfrak{K}_j$，$j=1, 2$ 的表达式为：

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_1=\{&\Theta_2u\oplus z^{-1}(\Delta_2u\oplus V) \mid u\in H^2(\mathfrak{F}),\ V\in\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{C})},\\ &\Theta_1^*u+\Delta_1V\in H^2(\mathfrak{C})\}\oplus\mathscr{A}_1L^2(\mu, \mathscr{H}),\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_2=\{&u\oplus z^{-1}(V\oplus 0) \mid u\in H^2(\mathfrak{C}_*),\ V\in\overline{\Delta_2L^2(\mathfrak{F})},\ \Theta_2^*u+\Delta_2V\in H^2(\mathfrak{F})\}\\ &\oplus\mathscr{A}_2L^2(\mu, \mathscr{H})。\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $\mathscr{A}_j(\cdot)$，$j=1, 2$ 是强可测的算子值函数，

$$\mathscr{A}_1(t)+\mathscr{A}_2(t)=\mathscr{H}(t)-\mathscr{B}(t)-\mathscr{A}_3(t)。$$

反之，如果给出 $\mathscr{A}_3$，$\mathscr{B}$ 及 Θ 的一个正则分解，(1)定义的 $\mathfrak{K}_1$ 必是 T 的不变子空间，而且 $\mathfrak{K}_2=\mathfrak{K}\ominus\mathfrak{K}_1$ 形如(2)。

(2) 对于交换压缩酉算子族，在[13]中得到如下结果。

定理　设 N_+ 是一个 Gauss 半群，L 是 N_+ 中既约元素全体，M 是 L 中元素一次幂乘积全体，$\mathfrak{K}$ 是 Hilbert 空间。$a\mapsto T(a)$ 是 N_+ 到 $\mathscr{B}(\mathfrak{K})$ 中同态，而且 $T(e)=I$，$\|T(a)\|\leqslant 1$。那末 $T(a)$ 存在酉扩张 $U(a)$，且满足 $T^*(a)T(b)=P_fU(a)^*U(b)$ 的充要条件是对任何含有 e 的有限子集 S 成立着 $\sum\limits_{a\subset S}(-1)^{e(a)}T(a)^*T(a)\geqslant 0$。

定理　设 $\{T(t), S(t), t\geqslant 0\}$ 是 $\mathfrak{K}$ 上交换的压缩算子半群，那末它们存在交换的酉扩张的充要条件是对一切 s，$t\geqslant 0$，$T^*(t)$ 与 $S(s)$ 交换

(3) 利用压缩算子，在[8]中得到以下结果

定理　设 T 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{K}$ 上压缩算子，$\Theta(\lambda)$ 是它的特征函数，那末(i)T 相似于等距算子的充要条件是 $\Theta(\lambda)$ 有左逆 $\Omega(\lambda)$ 成为 $|\lambda|<1$ 上的解析函数，且使 $\|\Omega(\lambda)\|\leqslant c$，$|\lambda|<1$。(ii)$T$ 相似于部分等距算子，而且 $T\mathfrak{K}=\mathfrak{K}$ 的充要条件是 $\Theta(\lambda)$ 有右逆 $\Omega(\lambda)$，使 $\Omega(\lambda)$ 成为 $|\lambda|<1$

上的解析函数，而且 $\|\Omega(\lambda)\|\leqslant c$，$|\lambda|<1$。

定理 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$ 上的完全非酉压缩算子，那末 $T\in C_0$ 的充要条件是(i)算子 T 的特征函数 $\Theta(\lambda)$ 是内的。(ii) $\Theta(\lambda)^{-1}$ 在单位圆内除去极点 $\{\lambda_\nu\}$ 外是解析的，$\sum(1-|\lambda_\nu|)<\infty$ 和 (iii) $\overline{\lim\limits_{r\to1}}\int\ln\|\Theta(re^{it})^{-1}\|dt<\infty$。

定理 设 T 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$ 上压缩算子，而且(i)(强) $T^{*n}\to0(n\to\infty)$；(ii) T 在单位圆内至少有一个正则点 a；(iii) $tr(I-T^*T)<\infty$。那末解析函数 $b(\lambda)=\det[\Theta^*(a)\Theta(\lambda)]$ 适合 $b(T)=0$。如果 $a=0$，那末

$$\ln\frac{\det(T^*T)}{\prod\limits_\nu|\lambda_\nu|^2}=\lim_{r\to1}\int_0^{2\pi}\ln(\det(\Theta(re^{it})^*\Theta(re^{it}))dt,$$

其中 $\{\lambda_\nu\}$ 是 T 在单位圆中特征值全体。

(4) 利用 Foias 及 Geber 关于压缩算子半群酉扩张的一个定理，在[3]中对有 q 个单位磁荷的磁单极的波截面量子力学建立了 Von-Neumann 式的定理

在[9]中研究了压缩算子半群具有有循环元的酉半群扩张存在的充要条件，对母元为初等因子的情况已被[9]解决。

§2 关于非正常算子

(1) 在[1]中给出了半正常算子的函数模型。

定理 设 A 是 Hilbert 空间中线性有界算子，A 的导数子 $Q=\frac{1}{2}(AA^*-A^*A)\geqslant0$。又设 H 中不存在包含 QH 并且约化 $\frac{A+A^*}{2}$ 的闭线性子空间，那末必有 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$，其中两族均匀有界自共轭算子 $\{\xi(t),\ t\in[a,\ b]\}$ 和 $\{\beta(t),\ t\in[a,\ b]\}$，而且 $\xi(t)\geqslant0$。又有 H 到 $\mathscr{L}^2(P(\cdot)\mathfrak{H})$ 上酉算子 U，使得 $UAU^{-1}=\hat{A}$，其中 $\hat{A}x(t)\mapsto(t+i\beta(t))x(t)+\xi(t)P\cdot\int_a^b\frac{\xi(s)x(s)}{s-t}ds$，$x\in L^2[a,\ b]$。而且每个上述类似的奇异积分算子 $\hat{A}$ 都一定是某个半正常算子。

(2) 利用上述奇异积分算子模型，我们给出了一类散射反问题的解(略)。

§3 关于不定度规空间中算子的谱分析

(1) 在文献[4]、[5] 中给出具有不定度规的散射算子的酉性的一个基本定理，在李——Wick 模型下给出散射算子的具体形式。

在[5]中还讨论了其中间系统的情况。纠正了 Лившиц 的一个错误。

(2) 在文献[10]中给出了 Понтрягин 空间以及 Крейн 空间中酉算子谱半径的准确估计式：

定理 设 $\Pi=\Pi_-\oplus\Pi_+$，Π_+，Π_- 可以无限维，U 是 Π 上酉算子，P_+ 为 $\Pi\to\Pi_+$ 的投影算子，记 $T=P_+U|_{\Pi_+}$，则 T 是 Hilbert 空间 $\Pi_+\to\Pi_+$ 上有界的(扩张)算子，如果 r 为 U 的谱半径，便有

$$r\leqslant\|T^*\|+\sqrt{\|T^*T\|-1}。$$

这个估计式在下述意义下是准确的：任给 $\alpha>1$，必存在不定度规空间 $\Pi=\Pi_-\oplus\Pi_+$ 上酉算子，使其相应的 T：$\|T\|=\alpha$，谱半径 $r=\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}$。

(3) 当 $\Pi_k=\Pi_-\oplus\Pi_+$ 是 Понтрягин 空间（Π_- 为 k 维，$k<\infty$，Π_+ 为无限维）[10] 中得到 $\Pi_k\to\Pi_k$ 上酉算子一般形式。

定理 对 Π_k 上任何一个酉算子 U，一定存在 Π_k 的分解 $\Pi_k=N\oplus\{Z\dot{+}Z^*\}\oplus P$，$N$，$p$，$Z$。分别是负、正、零性子空间，$Z^*$ 为 Z 的对偶空间，$\dim N+\dim Z=K$，以及 $N\to N$，$P\to P$ 的酉算子 u，$\bar{u}$，$Z\to Z$ 的一个非奇算子 S 以及 N 到 Z，P 到 Z 的算子 C，D，以及 $Z^*\to Z$ 的算子 T，$\mathrm{U}\equiv\{S,u,\bar{u},C,D,T\}$ 的有机整体，它们相互关联是

$$\begin{aligned}&\mathrm{U}z=Sz,\ z\in Z;\\&\mathrm{U}n=un+Fn,\ F=SC^*u,\ n\in N;\\&\mathrm{U}x=\bar{u}x+Gx,\ G=-SD^*\bar{u},\ x\in P;\\&\mathrm{U}z^*=(S^{-1})^*z^*+Bz^*+Cz^*+Dz^*,\ z^*\in Z^*,\end{aligned}\tag{A}$$

其中 $B=\frac{S}{2}(\widetilde{C}-\widetilde{D})+ST$，而 $\widetilde{C}=C^*C$，$\widetilde{D}=D^*D$，这里"*"都是把 N，P，Z 当作 Hilbert 空间时算子的共轭意思。而 Z^* 看成 Z 的共轭空间，把 Z 和 Z^* 一致化时，$T=-T^*$。

反之，六个独立算子 S，C，u，$\bar{u}$，D，T 按 (A) 方式必定义出 Π_k 上酉算子，并且 $\sigma(\mathrm{U})=\sigma(S)\cup\sigma(S^*)\cup\sigma(u)\cup\sigma(\bar{u})$。

定理还表明 U 算子实质上有标准的三角模型，其次说明即使 Π_k 上只有一个特征值 1 的酉算子也是包括 4 个独立算子 S、C、D，T 的机体。

在[11]中利用这个模型得到 Π_k 上自共轭算子模型后，从而直接证明了 Крейн-Lange 早就发表过，但至今未见完全证明的如下谱系定理：在 Π_k 上任何一个有界自伴算子 A，一定存在一族单调增加在连续谱系 P_λ：$-M<\lambda<M$，即

(i) P_λ 是投影算子（幂等且关于度规自伴）。

(ii) 记 $\Delta=(\lambda,\mu)$，并且内中不含临界点时，$P_\Delta\Pi_k=(P_\mu-P_\lambda)\Pi_k$ 是非退化正性子空间。

(iii) A 在 $P_\Delta\Pi_k$ 上限制的谱落在 Δ 中。

在[14]中用了谱算子方法，即从另一个途径也证实了 Крейн-Lange 有关谱系结论的可靠性和正确性，并求得事先给定谱系能成为自伴算子谱系的充要条件：

定理 设给定的右连续、投影算子 P_λ：$-M<\lambda<M$，它能成为某个自共轭算子的谱系的充要条件是：把有限个临界点的小邻域 O_n 挖去后，作

$$A_n=\int_{[-M,M]-O_n}\lambda dp_\lambda,$$

$\{A_n\}$ 为 Π_k 上均匀有界的。

[11]中给出了 P_λ 的具体形式。在[12]中利用酉算子一般形式研究了与一个酉算子交换的酉算子一般形式（略）。

(4) 在[13]中得到了定度规（即 Hilbert）空间上压缩算子酉扩张和线性有界算子在不定度规空间上酉扩张的一切形式（略），前者是熟知的 Halmos 的酉扩张和 Nagy 的酉扩张结果的一般化。后者是 Бродский 等研究的所谓组成"结"的特殊情况的一般化。根据我们所得到的一切酉扩张形式，便知除去某些保距对应之外，本质上是唯一的，并指出了 Бродский 所引入的"特征函数"（类比定度规上压缩算子的特征函数）本质上也是唯一的。（下转 71 页）

球对称的 SU_2 规范场

复旦大学　胡和生

1．在研究规范场理论时，球对称的模型是常见的，并且有着重要的作用，引起了各方面的注意[1,2]。

我们曾对球对称规范场作了系统的研究[3,4,5,7,8]。在 SU_2 的情形，我们完全决定了球对称规范场，研究了它们的性质，并给出了一定的物理解释。在这个报告中，我们着重叙述这些结果。由于互为规范变换的规范场是等价的，且原点可以是奇点，因而问题的解决过程是复杂的。

2．设 $b^i_\lambda(x, t)(\lambda=1, 2, 3, 4;\ i=1, 2, 3)$ 为 4 维平坦时空的 SU_2 规范场的规范势，这里 $x=x^i e_i$ 为空间的点，e_i 为空间直角坐标的基向量，t 表示时间。记 $b_\lambda=b^i_\lambda X_i$，$\partial_\lambda=\dfrac{\partial}{\partial x^\lambda}$

$$b_\lambda(x, t)\rightarrow\zeta(x, t)b_\lambda(x, t)\zeta^{-1}(x, t)-\partial_\lambda\zeta(x, t)\zeta^{-1}(x, t) \tag{1}$$

为规范变换，其中 $\zeta(x, t)\in SU_2$，$X_i(i=1, 2, 3)$ 是李代数 SU'_2 的一组基。

设 $\mathscr{F}$ 为 SU_2 规范场，如果规范势经过空间的任一转动后都能和原来的规范势相等，则称 $\mathscr{F}$ 为球对称的。用式子来记，即对任何 $A\in SO_3$ 必有 $\zeta(A, x, t)\in SU_2$ 使

$$\begin{gathered}A(\zeta(A, x, t)b(x, t)\zeta^{-1}(A, x, t)-\nabla\zeta(A, x, t)\zeta^{-1}(A, x, t))=b(Ax, t),\\ \zeta(A, x, t)b_4(x, t)\zeta^{-1}(A, x, t)-\partial_4\zeta(A, x, t)\zeta^{-1}(A, x, t)=b_4(Ax, t)\end{gathered} \tag{2}$$

成立。

我们证明了 4 维平坦时空的球对称 SU_2 规范场只能有下述三种基本类型[3]:

(1) 同步球对称——其特点是空间的转动配上同位旋空间同一旋转能使规范势（在适当规范下）保持不变。

(2) 狭义球对称——其特点是单纯的空间转动就能使规范势（在适当规范下）保持不变。

(3) 化约为 U_1 子群的球对称规范场。

我们论证的方法是：先设场的势满足一般球对称的定义，然后区分各种情况，找到几个规范变换，在小范围内把规范势变到所需的形式，然后再把这个结果整体化。

3．在适当的规范下，得出球对称规范势的一般形式[4]

(1) 同步球对称场

$$b^l_i=\epsilon_{ilk}x_k V(r, t)+\delta_{il}S(r, t)+x_i x_l T(r, t)$$
$$b^l_4=x_l U(r, t)$$

式中 $r=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$，$V$, S, T 为 r, t 的任意函数。

(2) 狭义球对称场

$$b^l_i=R^l(r, t)x_i,\ b^l_4=Y^l(r, t),$$

式中 R, Y 为 r, t 的任意函数。

(3) 化约的球对称场——即普通电磁势的形式。

4．'t Hooft 在研究磁单极时引进了一个同位旋向量场（Higgs 场），$Q(x,t)=q_i(x,t)X_i$，在 q_i 不全为 0 之处，他以

$$F_{\lambda\mu}=\frac{1}{|Q|}q_i f^i_{\lambda\mu}-\frac{\epsilon_{abc}}{|Q|^3}q_a D_\lambda q_b D_\mu q_c$$

作为电磁场能量[1]，式中 $D_\lambda Q$ 为 Q_b 的规范导数，$f_{\lambda\mu}=f^i_{\lambda\mu}X_i$ 是 SU_2 规范场的强度。

$$|Q|=(q_1^2+q_2^2+q_3^2)^{1/2}$$

磁荷的表达式是

$$\frac{1}{8\pi}\int_S F_{\lambda\mu}dx^\lambda\wedge dx^\mu$$

我们得到[3]：同步球对称场容有磁荷为 ±1 的磁单极，狭义球对称场中无磁荷，而化约的球对称场容有磁荷为 $\pm m$ 的磁单极（m 为任意整数）。't Hooft 所研究的只是同步球对称场的一个特例。又如果把有 Higgs 场的 SU_2 场解释为电磁场和带电介子场的耦合，那末在球对称情形，如果 |磁荷| >1，它必为纯电磁场[3]。

各类球对称 SU_2 规范场的性质可以列表如下[5]

类　　别	Higgs 场	磁　荷	带电矢粒子	无　源　解
狭义球对称	平　行	0	不化约时出现	只是静电场
同步球对称	径　向	±1	同　上	相当多，但一般需用数值方法求解
化约为 U_1^* 群的球对称	$\pm m$ 重复盖（m 为自然数）	$\pm m$	必不出现	只是静电场加静磁场

5．各类球对称 SU_2 规范场还可以进行适当的规范变换，使第 3 节中的规范势化为最简单的形式。在同步球对称规范场时，保持规范势为同步球对称形式的规范变换的特点是：它所引起的同位旋旋转的转轴是向径，并且在同一时刻以原点为心的同一球面上的各点的转角相同，并且

a）总可以选取规范使 $S+r^2T=0$ 恒等成立[5]。

b）求无源解时，可令 $S=T=0$[5]，就包括了所有无源解。

c）在许多情况下，可以选取规范使

$$[b_i,f_{jk}]+[b_j,f_{ki}]+[b_k,f_{ij}]=0$$

成立，此时磁通量有守恒形式的积分[8]。

6．关于 SU_3 的情况，[6] 中写出了一类球对称规范势的形式，在 [7] 中提出决定一般紧致群的球对称规范场的方法。

参 考 文 献

[1] T. T. WuC. N. Yang, In Properties of Matter under Unusual conditions (1969), 349.
[2] 't Hooft, G., Cucl. Phys., 78B (1974), 296.
[3] 谷超豪、胡和生，《物理学报》26, (1977), 155.
[4] 胡和生，《复旦学报》1 (1976), 72.
[5] 侯伯宇、谷超豪、胡和生，《复旦学报》1 (1977), 92.
[6] Chkrabarti, A., Ann. Inst. Henri Poincare A23 (1975), 230.
[7] 谷超豪，球对称规范场的决定，《复旦学报》2 (1977), 30.
[8] 谷超豪、胡和生，关于规范条件的变分问题，《科学通报》11 (1979), 492.

关于拟不变变换群上的拓扑和无限维李群

复旦大学　杨亚立

为了研究无限维空间测度和积分，И. М. Гельфанд 在 1959 年提出了关于拟不变测度的概念。他利用装备 Hilbert 空间上的拟不变测度研究了量子场论中 Bose-Einstein 交换关系的表示。P. E. Segal 在 1958 年也提出过类似的概念，但是他们都没有对平移拟不变测度理论建立相应的调和分析。在夏道行老师"无限维空间上测度和积分论"[1]中对拟不变测度和拟不变变换群上的相应拓扑进行了深刻的研究，成功地建立了关于具有拟不变测度的群上的调和分析，并且对线性拓扑空间中关于平移拟不变测度得到了更为完善的结果。这说明讨论拟不变变换群上的拓扑是十分必要的。本文主要讨论二个问题：1) 讨论线性拓扑空间中拟不变拟线性变换群上的拓扑，所得结果也适用于抽象 Wiener 过程，并对标准高斯过程作进一步的讨论。2) 当 G 是交换的无限维李群时，这里我们采用 [2] 中所述的以 Banach 空间作参数空间的无限维李群的概念。这时，拓扑群 G 局部同胚于线性拓扑空间。我们讨论了关于 G 的平移拟不变变换群上的拓扑，得到了和线性拓扑空间情形相应的一些结果。我们采用的有关术语和记号均用[1] [2]中的。

1．设 G 是实线性拓扑空间，$\mathscr{B}$ 是 G 中由全体开集张成的 Borel σ-代数，$\Omega=(G, \mathscr{B}, \mu)$ 是关于子空间 $\mathfrak{G}$ 平移拟不变的有限正则测度空间，且关于 $\mathfrak{G}$ 是遍历的，$\mathfrak{G}$ 本身具有拓扑 $\mathscr{T}$，强于 G 在 $\mathfrak{G}$ 上的诱导拓扑，且使 $\mathfrak{G}$ 按 $\mathscr{T}$ 成为完备的赋范空间，同时 $\mathfrak{G}$ 的共轭空间 $\mathfrak{G}^\dagger$ 是可分的，$(\Omega, \mathfrak{G})$ 是标准的[1]即满足 $\widetilde{G}^\mu=\mathfrak{G}^\dagger$，且 G^μ 是 Ω 的决定集。

设 T 是 G 到 G 关于 $(G, \mathscr{B})$ 可测的变换[1]，若满足下列条件：

(i) T 的值域是可测集，而且 $G\backslash\mathscr{R}(T)$ 是 μ 零集。

(ii) T 是 $\mathscr{D}(T)$ 到 $\mathscr{R}(T)$ 的一一映照。

(iii) 对 $A\in\mathscr{B}$，设 $\mu_T(A)=\mu(T^{-1}A)$ 有 $\mu_T\sim\mu$。

则称 T 为使 Ω 拟不变的变换[1]，显然使 Ω 拟不变变换全体构成群。通常，我们仅讨论拟不变变换群的某些子群。

若可测变换 T 进一步满足条件：对每个 $h\in\mathfrak{G}$，存在元 $\widetilde{T}(h)\in\mathfrak{G}$，使对任何实数 t，等式

$$T(tg+h)=tT(g)+\widetilde{T}(h)\quad g\in G$$

关于 μ 几乎处处成立，则称 T 为 Ω 上关于 $\mathfrak{G}$ 的拟线性变换，可逆拟不变拟线性变换全体关于乘法构成群，记为 $\{T\}$，下面将讨论可逆拟不变拟线性变换群 $\{T\}$ 上的拓扑，可以知道 Ω 上每个拟不变拟线性变换 T 导出 $\mathfrak{G}$ 上的连续线性算子 $\widetilde{T}$。由 $\mathfrak{G}^\dagger$ 的可分性和 $(\Omega, \mathfrak{G})$ 标准的假定，能保证 $\mathfrak{G}$ 上每个线性有界算子 A 一定可以延拓为 Ω 上关于 $\mathfrak{G}$ 的拟线性算子 T，使 $\widetilde{T}=A$，同时在一些容易满足的条件下[1]这种延拓在允许差一零集意义下是唯一的。下面在 $\{T\}$ 上引进 d_0-距离

$$d_0(T_1, T_2)=\frac{1}{2}(d_2(T_1, T_2)+d_2(T_1^{-1}, T_2^{-1}))$$

其中 $$d_2(T_1, T_2)=\frac{1}{2}(\|\tilde{T}_1-\tilde{T}_2\|+d_1(T_1, T_2))$$

而 $$d_1(T_1, T_2)=(\int_G(\sqrt{d\mu_{T1}(g)}-\sqrt{d\mu_{T2}(g)})^2)^{\frac{1}{2}}$$

我们证明了 d_0 距离给出了 $\{T\}$ 上一个第二纲适宜拓扑。

定理 1 设 $(G, \mathscr{B}, \mu)$ 关于 $\mathfrak{G}$ 强循环[1]，且以 1 为循环元，则可逆拟不变拟线性变换群 $\{T\}$ 关于由 $d_0(T_1, T_2)$ 距离导出的拓扑是一个完备的距离空间。

如果线性拓扑空间 G 本身是赋范空间，则可考虑 G 上拟不变拟线性算子构成的群 $\{T\}'$。

定理 1′ 设 G 是赋范空间，$\Omega=(G, \mathscr{B}, \mu)$ 是关于 $\{T\}'$ 拟不变的正则概率测度，则 $\{T\}'$ 关于 $d_0'(T_1, T_2)$ 决定的拓扑是完备的。

顺便可以得到，对于 Wiener 测度的拟不变线性变换

$$Ax(t)=x(t)+\int_0^1 K(t, s)dx(s)$$

其中 $$K(0, s)=0 \quad \frac{\partial}{\partial t}K(t, s)\in\mathscr{L}^2(0,1;\ 0, 1)$$

则变换相应的拉东-尼古丁导数为

$$\frac{d\mu_A}{d\mu}=|D|\exp\left\{-\int\left(\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}K(t, s)dx(s)\right)^2dt-2\int_0^1\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}K(t, s)dx(s)dx(t)\right\}$$

其中积分均理解为随机积分，或 P-W-Z 意义下的积分。

定理 2 在定理 1 条件下，$\{T\}$ 关于 d_0-拓扑构成拓扑群。

下面将讨论高斯过程情形，设 $\Omega=(G, \mathscr{B}, \mu)$ 是相应于 H 的标准高斯过程，H 关于内积 (x, y) 是可分的，若 T 是拟不变拟线性变换，由条件 $x(\omega)$ 是 Ω 上的决定集

$$\int x(\omega)y(\omega)d\mu(\omega)=(x, y)$$

$$\int x(\omega)y(\omega)d\mu_T(\omega)=\int x(T\omega)y(T\omega)d\mu(\omega)$$

令 $x(T\omega)=(\tilde{T}x)(\omega)$，由 Feldman 定理知道 $x(\omega)\to(\tilde{T}x)(\omega)$ 对应 H 中的等价算子，为方便起见，仍记 $\tilde{T}$ 作 T。

定理 3 在标准高斯过程情形，kakutani-拟范数 $M_1(T)$ 决定的拓扑等价于 $\|T^*T-I\|_2$ 决定的拓扑，$\|\cdot\|_2$ 表示算子的 Hilbert-Schmidt 范数，特别可逆拟不变拟线性变换群 $\{T\}$ 上 d_0-拓扑可由 $R(T)=\|T-I\|+\|T^{-1}-I\|+\|T^*T-I\|_2+\|T^{-1*}T^{-1}-I\|_2$ 决定。

为了进一步搞清 d_0-拓扑的构造，先构造一个空间 S，它是由如下的向量 $C=(A, B)$ 组成，其中 A 是 H 中有界自共轭算子，B 是 H 中自共轭 H-S 算子，在 S 上定义范数：$\|C\|_s=\|A\|+\|B\|_2$ 构成一个 Banach 空间。

定理 4 对于线性拓扑空间上的高斯过程，可逆拟不变拟线性变换全体 $\{T\}$ 关于 d_0-拓扑是一个连通的，以 Banach 空间 S 作为参数空间的无限维李群。

系，若 $\{T\}$ 按另一拓扑 τ 使它也成为李群，若 τ 和 d_0-拓扑可比较，则拓扑 τ 和 d_0-拓扑一致。

2. 由[1]知道，当 G 是线性拓扑空间，$\mathfrak{G}$ 是 G 的子空间，$\Omega=(G, \mathscr{B}, \mu)$ 是关于 $\mathfrak{G}$ 拟不变拟连续的有限正则测度空间，$\mathfrak{G}$ 极大，那末 $\mathfrak{G}$ 按 s-拟距离 p_1 成为第二纲线性拓扑空间，且拓扑是适宜的，对一般群的场合，并不知道 $\mathfrak{G}$ 上能否构造非平凡的第二纲适宜拓扑。这节里我

们将讨论 G 是以 Banach 空间 E 为参数空间的交换李群情形。

这里，关于无限维李群的概念采用[2]中的，设 E 是 Banach 空间，对 $E\to F$ 的映照 f，考虑 Frechet 意义下的可微性。

定义：一个拓扑空间 G 关于拓扑 $\mathscr{T}$ 称为关于 Banach 空间 E 作参数空间的 k 次（$k\geqslant 3$）可微分李群，若它满足下述条件：

1．G 关于 $\mathscr{T}$ 是一个拓扑群。

2．G 关于 Banach 空间 E 是 k 次可微分流形。

3．a) 映照 $(p, q)\to pq$, $p\in G$, $q\in G$ 是从 $G\times G$ 到 G 上的 k 次连续可微分映照。

b) 映照 $p\to p^{-1}$ 是 $G\to G$ 的 k 次连续可微分映照。

定理 5 每一个连通交换以 Banach 空间 E 为参数空间的 k 次局部等度连续可微分李群 G，存在线性拓扑空间 $\widetilde{G}$，$\widetilde{G}$ 是 G 的复盖群，且 $\widetilde{G}$ 同构于 Banach 空间 E。

系：在定理条件下，exp 映照可延拓为整个 $\widetilde{G}$ 到 G 上的开同态。

我们利用复盖 σ–代数和复盖测度概念证明了。

定理 6 设 G 是以 Banach 空间 E 为参数空间的局部连通，线性连通交换李群，k 次（$k\geqslant 3$）局部等度连续可微，同时 E 是可分的，$\mathscr{B}$ 是 G 上 Borel σ–代数，$\Omega=(G, \mathscr{B}, \mu)$ 是关于李子群 $\mathfrak{G}$ 拟不变拟连续[1]的有限正则测度空间，且 $\mathfrak{G}$ 是 Ω 的极大拟不变拟连续李子群，则 $\mathfrak{G}$ 上存在拓扑 $\mathscr{T}$，$\mathfrak{G}$ 按拓扑 $\mathscr{T}$ 成为第二纲拓扑群，且 G 在 $\mathfrak{G}$ 上导出拓扑比 $\mathscr{T}$ 弱，从而是适宜的。

定理 7 若 $\Omega=(G, \mathscr{B}, \mu)$ 满足定理 6 条件，$(\widetilde{G}, \widetilde{\mathscr{B}}, \widetilde{\mu})$ 是 $(G, \mathscr{B}, \mu)$ 的复盖测度空间，$\widetilde{\mathfrak{G}}$ 是相应于 $\widetilde{G}$ 的极大拟不变拟连续子空间，若在 $\widetilde{\mathfrak{G}}$ 上给定一适宜拓扑 τ，则 τ 强于 μ 拓扑的充要条件是：若 $h_n\in\widetilde{\mathfrak{G}}$ 按拓扑 τ，$\lim\limits_{n\to\infty} h_n=0$ 能推得

$$\lim_{n\to\infty} M_1(\exp th_n)=0 \quad -\infty<t<\infty$$

定理 8 在定理 6 的条件下，$\widetilde{\mathfrak{G}}$ 上由 $R(\tilde{h})=\left(\int_0^\infty e^{-t}M_1(\exp t\tilde{h})^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$ 和 $\|h\|$ 决定的拓扑和 $\widetilde{\mathfrak{G}}$ 上 μ–拓扑一致，构成完备的距离空间。

定理 9 $\mathscr{T}$ 是使得 $\mathfrak{G}$ 按拓扑 $\mathscr{T}$ 局部同胚于线性拓扑空间，且强于 $M_1(h)$，导出拓扑的最弱适宜拓扑。

类似地可建立 $\mathfrak{G}$ 上拓扑 $\mathscr{T}$ 的特征（[1] § 4.1）。本文得到夏道行老师热情帮助和指导，在此深表感谢。

参 考 文 献

[1] 夏道行，无限维空间上测度和积分论(1965)。

[2] B. Maissen, Acta Math., 108 (1962).

[3] Hui-Heiung Kuo, Gaussian Measures in Banach Spaces (1975).

[4] Л. С. Понтрагин: 连续群。

Yoneda 范畴与线性拓扑空间

复旦大学　肖尔健

J. L. Taylor[1] 中讨论了拓扑代数的同调和上同调，但他使用的实际上是相对范畴，要求正合序列-分裂，还有一些数学工作者，例如 A. Ja. Helemskii[2] 及 M. V. Šeinberg[3] 等，在讨论 Banach 模时也要加上类似的条件。本文证明 Yoneda 的拟 Abel 范畴（见[4]）是研究拓扑 Abel 群、线性拓扑空间、拓扑模等的适当的范畴，因而可以用 Yoneda[4] 中的方法与结果建立同调代数基本函子。本文还证明局部凸线性拓扑空间范畴、Freçhet 空间范畴及局部凸线性拓扑代数上拓扑模范畴都有足够多内射对象。本文最后一个结果似乎比 G.Isac[5] 的结果强得多。

引理 1　设 $\mathbf{E}$: $0\to A\xrightarrow{\varkappa}B\xrightarrow{\sigma}C\to 0$ 是拓扑 Abel 群的短正合序列，χ 及 σ 是拓扑同态（指开集的象是象空间的开集），C_1 是另一个拓扑 Abel 群，γ: $C_1\to C$ 为拓扑群的同态，则存在拓扑 Abel 群及其同态的交换图

$$\begin{array}{rl} \mathbf{E}_1: & 0\to A\xrightarrow{\varkappa_1}B_1\xrightarrow{\sigma_1}C_1\to 0\\ & \qquad\ \big\| \qquad\quad \downarrow\beta \qquad \downarrow\gamma \\ \mathbf{E}: & 0\to A\xrightarrow{\varkappa}B\xrightarrow{\sigma}C\to 0\end{array}\tag{1}$$

使 $\mathbf{E}_1$ 是正合序列并 $\varkappa_1$ 及 σ_1 是拓扑同态，如果 B 和 C_1 是 Hansdorff 的，则 B_1 也是 Hansdorff 的。如果 B 与 C_1 是完备的并 C 是 Hansdorff 的，则 B_1 也是完备的。

推论　如果引理 1 中 A、B、C 及 C_1 是线性拓扑空间（或局部凸线性拓扑空间或 Frechet 空间或 Banach 空间）并 $\varkappa$、σ 及 γ 是线性连续映照，σ 及 $\varkappa$ 是拓扑同态，则图(1)中 B_1 是同一类型的空间，β 是线性连续映照，$\varkappa_1$ 及 σ_1 是线性拓扑空间之间的拓扑同态。

引理 2　设 $\mathbf{E}$: $0\to A\xrightarrow{\varkappa}B\xrightarrow{\sigma}C\to 0$ 是拓扑 Abel 群的短正合序列，$\varkappa$ 及 σ 是拓扑同态，A_1 是另一个拓扑 Abel 群，α: $A\to A_1$ 是拓扑群间同态，则存在拓扑 Abel 群及同态的交换图

$$\begin{array}{rl} \mathbf{E}: & 0\to A\xrightarrow{\varkappa}B\xrightarrow{\sigma}C\to 0\\ & \quad\ \alpha\downarrow \qquad \beta\downarrow \qquad \big\| \\ \mathbf{E}_1: & 0\to A_1\xrightarrow{\varkappa_1}B_1\xrightarrow{\sigma_1}C_1\to 0\end{array}\tag{2}$$

使 $\mathbf{E}_1$ 是正合序列并 $\varkappa_1$ 及 σ_1 是拓扑同态，如果 A_1 和 C 是 Hansdorff 的，则 B_1 也是 Hansdorff 的。

推论　如果引理 2 中 A、B、C 及 A_1 是线性拓扑空间（或局部凸线性拓扑空间或 Frechet 空间或 Banach 空间）并 $\varkappa$、σ 及 α 是线性连续映照，$\varkappa$ 及 σ 是拓扑同态，则图(2)中 B_1 是同一类型的空间，β 是线性连续映照，$\varkappa_1$ 及 σ_1 是线性拓扑空间之间的拓扑同态。

Yoneda[4] 中称加法范畴 $\mathscr{A}$ 中一射 $A\xrightarrow{\alpha}B$ 为真的，如果它能嵌入交换图

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[dr, "\alpha_3"] & & \\ & A \arrow[ur, "\alpha_2"] \arrow[rr, "\alpha"] & & B \arrow[dr, "\alpha_4"] & \\ N \arrow[ur, "\alpha_1"] & & & & L \end{tikzcd}$$

其中 $\alpha_1=\ker\alpha_2$、$\alpha_2=\operatorname{coker}\alpha_1$、$\alpha_3=\ker\alpha_4$、$\alpha_4=\operatorname{coker}\alpha_3$。$p\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}$ 中真照映所成的类，我们取

$\mathscr{AG}$ 为拓扑 Abel 群所成范畴、$\mathscr{HAG}$ 为 Hausdorff 拓扑 Abel 群所成范畴。$\mathscr{CAG}$ 为 Hausdorff 局部紧拓扑 Abel 群所成范畴。

$\mathscr{LT}$ 为实(或复)数域上线性拓扑空间所成范畴，$\mathscr{LCT}$ 为实（或复）数域上局部凸线性拓扑空间所成范畴。$\mathscr{HLCT}$ 为实(或复)数域上 Hausdorff 局部凸线性拓扑空间所成范畴，$\mathscr{FS}$ 为实(或复)数域上 Frechet 空间所成范畴，$\mathscr{BS}$ 为实（或复）数域上 Banach 空间所成范畴。

一个拓扑代数 A 指它是实(或复)数域上局部凸线性拓扑空间，并是具么元的结合代数，乘法运算分离(或联合)连续，一个拓扑 A-模 E 是实(或复)数域上局部凸线性拓扑空间，它是 A-模，A 中元乘 E 中元的运算是 $A\times E\to E$ 分离(或联合)连续的。

$\mathscr{M}_A$ 为拓扑代数 A 上扑拓左(或右)A-模所成范畴，$\mathscr{FM}_A$ 范：A 为拓扑代数它的底线性空间为 Frechet 空间。A-模的底空间也是 Frechet 空间，这种 A-模构成 $\mathscr{FM}_A$。范畴 $\mathscr{BM}_A$ 为：A 是 Banach 代数，A-模的底空间为 Banach 空间，这种 A-模构成 $\mathscr{BM}_A$。

定理 1 设 $\mathscr{A}$ 为上面所述范畴中的任一种，$P\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}$ 中所有真映照所成的类，则 $(\mathscr{A}, P\mathscr{A})$ 是 Yoneda[4] 意义下的拟 Abel 范畴。

因此在这些范畴上可直接用 Yoneda[4] 中的方法与结果建立 $\mathrm{Ext}^n_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}$ 函子，特别对于 $\mathbf{E}$：$0\to A\xrightarrow{\varkappa}B\xrightarrow{\sigma}C\to 0$ 是任一真射的短正合序列及 $\mathscr{A}$ 中任一对象 D 有长正合序列

$$0\to\mathrm{Hom}(D,A)\to\mathrm{Hom}(D,B)\to\mathrm{Hom}(D,C)\to\mathrm{Ext}_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(D,A)\to$$
$$\mathrm{Ext}_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(D,B)\to\mathrm{Ext}_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(D,C)\to\mathrm{Ext}^2_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(D,A)\to\cdots$$
$$0\to\mathrm{Hom}(C,D)\to\mathrm{Hom}(B,D)\to\mathrm{Hom}(A,D)\to\mathrm{Ext}_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(C,D)\to$$
$$\mathrm{Ext}_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(B,D)\to\mathrm{Ext}_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(A,D)\to\mathrm{Ext}^2_{(\mathscr{A},P\mathscr{A})}(C,D)\to\cdots$$

对于上述 $\mathscr{LT}$ 至 $\mathscr{BM}_A$ 范畴，$\mathrm{Ext}^n(A,B)$ 还是线性空间，k 为任何实(或复)数，$\mathbf{E}\in\mathrm{Ext}^n(A,B)$ 则 $k\mathbf{E}=(k\cdot 1)\circ\mathbf{E}=\mathbf{E}\circ(k\cdot 1)$。

对于 $\mathscr{AG}$, $\mathscr{HAG}$, $\mathscr{CAG}$, $\mathscr{M}_A$, $\mathscr{FM}_A$, $\mathscr{BM}_A$ 可直接用 Yoneda[4] 中的结果定义左右卫星([4] p. 553)。

拟 Abel 范畴$(\mathscr{A}\mathscr{S})$ 中一对象 J 称内射对象，如果对任何 $\alpha: E\to F$, $\alpha\in\mathscr{S}I$ (对我们这里的范畴是核为 0 的真映照) 及 $\beta: E\to J$ 存在 $\gamma(F\to J$ 使 $\gamma\alpha=\beta$(见 [4]p. 554)。拟 Abel 范畴$(\mathscr{A},\mathscr{S})$称有足够多内射对象，如果对 $\mathscr{A}$ 中任一对象存在 $\alpha: A\to J$, $\alpha\in\mathscr{S}I$, J 为内射对象。

在泛函分析中熟知的具扩张性质的 Banach 空间即为范畴 $\mathscr{BS}$ 中内射对象，并任一个 Banach 空间必等距地线性同构于具扩张性质的 Banach 空间(见 H. E. Lacey[6])。用范畴论的语言来讲即拟 Abel 范畴 $\mathscr{BS}$ 有足够多内射对象。利用这一结果，本文证明

定理 2 拟 Abel 范畴 $\mathscr{LCT}$ 及 $\mathscr{FS}$ 中有足够多内射对象。

以下考察拟 Abel 范畴 $\mathscr{M}_A$, A 为分离连续局部凸线性拓扑代数，$\mathscr{M}_A$ 中对象为左 A-模。为避免混淆，取 $L(E, F)$ 为线性拓扑空间 E 到 F 所有线性连续映照全体，如果 E, F 是 $\mathscr{M}_A$ 中对象，取 $\mathrm{Hom}(E, F)$为 E 到 F 所有连续 A-同态。

命题 1: 设 E 为一个局部凸线性拓扑空间,则 $L(A, E)$ 取简单收敛拓扑是 $\mathscr{M}_A$ 中一对象(即左 A-模)。

命题 2: 设 E 是 $\mathscr{M}_A$ 中一对象,M 是局部凸线性拓扑空间,则存在线性同构。

$$\mathrm{Hom}(E, L(A, M)) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} L(E, M)$$

并 φ 与 ψ 关于 E 与 M 是自然的。

命题 3: 设 J 是 $\mathscr{LCT}$ 中内射对象,则 $L(A, J)$ 是 $\mathscr{M}_A$ 中内射对象。

定理 3 A 是分离连续局部凸线性拓扑代数,则拟 Abel 范畴 $\mathscr{M}_A$ 中有足够多内射对象。

总之对 $\mathscr{LCT}$, $\mathscr{FS}$, $\mathscr{BS}$ 及 $\mathscr{M}_A$ 中任一对象 E, 有内射分解

$$\mathbf{Y}: E \to Y^0 \to Y^1 \to Y^2 \to \cdots \to Y^n \to \cdots$$

它是正合序列, 其中每个射是真射, 因此可用同调代数标准方法(见 S. MacLan [7] pp. 95~96) 得

$$\mathrm{Ext}^n_{(\mathscr{A}, P\mathscr{A})}(F, E) = H^n(\mathrm{Hom}(F, \mathbf{Y}))$$

其中 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{LCT}$ 或 $\mathscr{FS}$ 或 $\mathscr{BS}$ 或 $\mathscr{M}_A$。

参考文献

[1] J. L. Taylor, Homology and cohomlogy for topological algebras, Advances in Math., 9 (1972), 137~182.

[2] A. Ja.Helemshii, A periodic product of modules over Banach algebras, Funkcional Anal. i Prilozen. 5 (1971), No. 1, 95~96 MR 43 6722.

[3] M. V. Seinberg, Relatively injective modules over Banach algebras, Vestnik Moskow Univ. Ser. I. Mat. Mech., 26 (1971), No. 3, 57~58., MR 43 6729.

[4] N. Yoneda, On Ext and exact sequences, J.Fac. Sci.Univ. Tokyo, 8 (1960), 507~576.

[5] G. Isac, Modules topologique ouvert injetifs, Rev. Romaine Math. Pure App., k4, No. 6~10(1969), 1017~1024.

[6] H. E. Lacey, The isometric theory of classical Banach spaces, Springer, (1974).

[7] S. MacLane, Homology, Springer, (1963).