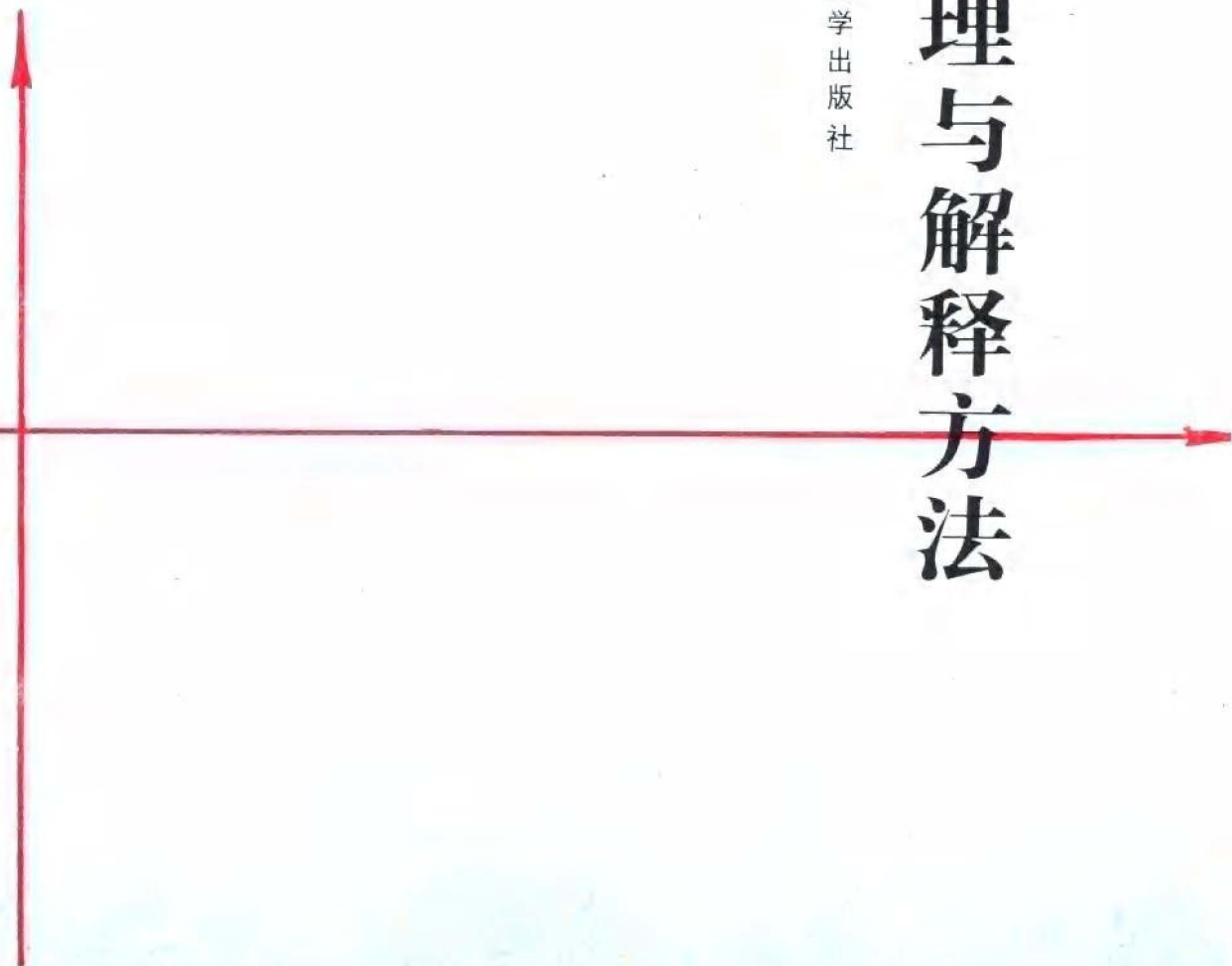
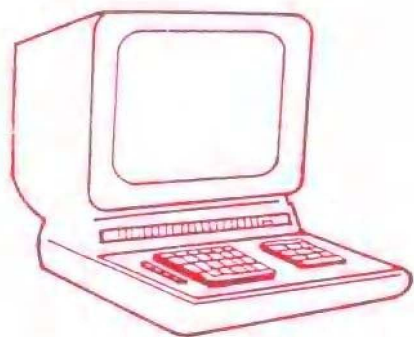
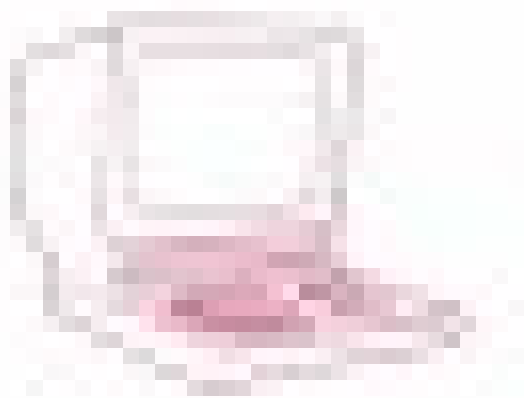


重磁资料电算处理与解释方法

朱文孝 屠万生 刘天佑 编

中国地质大学出版社





1. The first step is to identify the problem or goal. This involves understanding the current situation and what you want to achieve. It's important to be clear and specific about your objectives.



重磁资料电算处理与解释方法

朱文孝 屠万生 刘天佑 编

中国地质大学出版社

内 容 提 要

全篇内容由四个方面组成：正常地磁场计算，重磁场的正演问题，位场转换处理及地下场源体几何形态、产状要素的计算，磁性体界面的计算。并有相应附录(程序设计)。

本书是为适应地球物理勘探专业本科生及函授生教学需要而编写的，各章方法原理介绍力求深入浅出，易学易懂。数学处理分析方法较为详细。便于阅读与应用。也可供广大勘探地球物理工作者，专业研究人员学习和参考。

重磁资料电算处理与解释方法

朱文孝 屠方生 刘天佑 编

责任编辑 陈绪诚

*

中国地质大学出版社出版

公安县印刷厂印刷 湖北省新华书店经销

*

开本 787×1092 1/16 印张 12 字数 260 千字

1989年4月第1版 1989年4月第1次印刷

印数 1—2000册

ISBN 7-5625-0063-0/TP·4

定价：2.20元

前 言

随着重、磁地球物理勘探方法在区域地质、深部地质构造及地壳内地热变化等领域的广泛应用,利用电子计算技术对物探资料进行处理及解释的方法也取得了很大进展。为适应新形势下勘探地球物理工作的需要,在选材方面主要考虑了方法的成熟性、有效性、稳定性及普及程度,同时也力求反映几年来电算处理及解释方面的最新成果,因而涉及内容比较广泛。全书共有六章和五个附录。第一章为正常地磁场计算,也可用于大地磁异常研究;第二章为任意形体重磁场正演计算;第三章和第四章为重磁位场转换处理;第五、六章分别为最优化的解释方法及提取长波磁异常计算磁性界面,为研究地壳内深源地质构造提供的解释方法。

本书的附录部分提供了我国当前常用重磁资料处理及解释方法的计算机程序。程序使用FORTRAN77算法语言编制,并在我院UNIVERS68/137微型计算机上试算通过。为了便于读者使用均有较详细的使用说明。

本书是在原“重磁资料数据处理”(朱文孝、王家林、金国鹰编)铅印教材基础上,经多年教学实践,并结合有关的科研工作成果重新编写而成。第二、三、五、及第六章第二节和附录一、二、三、五主要由朱文孝同志编写;第四章及附录四由屠万生同志编写,并负责全部程序的调试及验算工作;第一章和第六章的第一节及有关程序由刘天佑同志编写的。全部书稿最后由朱文孝同志修改统编。本书由管志宁教授、周熙襄教授、郭绍雍副教授和张昌达高级工程师负责审查。全书的插图由我校绘图室崔宁同志清绘。编者特此向他们表示衷心感谢。

编 者

1987年10月于武汉

目 录

前 言	
第一章 正常地磁场的计算	(1)
§ 1.1 高斯球谐分析方法	(1)
§ 1.2 二维幂多项式法	(6)
§ 1.3 利用二维幂多项式计算局部地区正常场的实例	(10)
第二章 任意形体重磁场的正演计算	(14)
§ 2.1 数值积分解正演问题的基本公式	(14)
§ 2.2 面元法简介	(17)
§ 2.3 任意形体的线元法正演计算	(20)
第三章 积分插值延拓及垂向二次导数	(26)
§ 3.1 积分插值延拓	(26)
§ 3.2 垂向导数场	(39)
第四章 频率域内重磁异常的转换和处理	(42)
§ 4.1 频率域内重磁异常的转换	(42)
§ 4.2 应用快速富氏变换时实数组转化为复数组的计算	(53)
§ 4.3 频率域内重磁异常的若干处理方法	(62)
第五章 最优化选择法	(74)
§ 5.1 方法的基本原理	(74)
§ 5.2 马奎尔特算法	(76)
§ 5.3 多个棱柱体组合模型	(87)
第六章 长波磁异常磁性界面的计算	(92)
§ 6.1 连续模型的磁性下界面反演方法	(92)
§ 6.2 频谱分析法计算磁性界面	(105)
附录一 计算国际地磁参考场程序	(114)
附录二 线元法正演计算程序	(118)
附录三 积分插值延拓和垂向二次导数程序	(124)
附录四 频率域内位场转换(三分量)程序	(129)
附录五 直立长方体组合模型解反问题程序	(141)

第一章 正常地磁场的计算

随着磁法勘探应用领域的扩大,利用航磁异常研究区域及深部地质构造受到普遍重视。在区域航磁异常解释中,要编制大范围的航磁异常图和研究长波长的异常,这就要确定正常地磁场。确定正常地磁场的方法通常有两种:高斯球谐分析法和二维幂多项式法。球谐分析法在编制大范围的航磁图中,可以解决其他方法不易解决的各项磁场的调整和区域校正问题,这对于我们选择工作区,研究大区域地质构造,了解结晶基底的分布与形态,构造与岩性分区,了解地壳内的脆弱带,确定居里面深度以及了解地壳内的温度变化,沉积盆地的几何形态,侵入岩和喷出岩的分布都具有十分重要的意义。美国、加拿大、墨西哥用球谐分析方法编绘了北美洲异常图,芬兰在编图时也采用这一办法。在计算一个局部地区的正常地磁场时,也常常使用二维幂多项式的方法。1970年代的中国正常场模式就是采用这种方法编制的,采用的是三阶模式。

1838年,高斯提出把磁位展开为球谐级数的理论,使地磁场的解析表示向前跨进了一大步。虽然这个理论在实质上并没有对地磁场的成因做出任何解释,但是它对进一步分析研究近地表空间的磁场和研究地磁成因有特殊的意义。以后,很多学者利用不同数量和不同类型的地磁资料,对不同形状的地球模型(如圆球形或椭球形)做了不同阶数的球谐分析。但是,一直到本世纪60年代以前,这方面的工作仍缺乏国际间的合作。国际地磁参考场(IGRF)就是利用球谐分析方法计算的正常地磁场。第一个国际地磁参考场IGRF,1965是国际地磁学和高空物理学协会(IAGA)于1968年确定采用的,它包括一个主要场模式和一个长期变化模式。70年代后期,长期变化模式中可预料的不确定因素的积累效应,已经给IGRF带来了不可接受的误差,为了建立一个准确的国际地磁参考场,IAGA对此作出了补充。

DGRF1965、DGRF1970、DGRF1975和IGRF1980的系数以球谐展开系数的形式给出,各主要场的模式有120个系数($n=10$),长期变化模式1980—1985年有80个系数($n=8$),见表1.1.1。

§ 1.1 高斯球谐分析方法

一、方法原理

高斯理论是假定地球磁场是由地球内部原因引起的。这样的假设是合理的,因为外源场是各种短期变化场,比内源场小几个级次,当磁测资料经过通化后,外源场的影响可以认为小于测量误差,所以它具有位的特征,满足 $H = -\nabla U$

即满足稳定磁场方程。当介质中无传导电流存在时，稳定磁场的麦克斯韦方程为

$$\nabla \times H = 0, \quad \nabla \cdot B = 0$$

$$B = \mu H = \mu_0 (1 + \kappa) H = \mu_0 H + \mu_0 J$$

所以有 $\nabla \cdot (\nabla U + J) = 0$

中式 H 为磁场强度， B 为磁感应强度， μ 为介质的导磁率， κ 为介质的磁化率， J 为磁化强度。因为一个标量的梯度的旋度为零，故由上式可得：

$$\Delta U = \nabla \cdot J$$

式中 ΔU 的 Δ 表示拉普拉斯算符，上式即为泊松方程。在空气介质中， $\nabla^2 U = 0$ 。因而球坐标系中的拉普拉斯方程为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (1.1.1)$$

用分离变量法求解，得拉普拉斯方程的普遍解，从而可分别获得其内源场和外源场的磁位球谐表达式，而内源场的磁位球谐表达式为：

$$u = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n-1} (g_n^m \cos m \lambda + h_n^m \sin m \lambda) \bar{P}_n^m(\cos \theta) \quad (1.1.2)$$

对 (1.1.2) 式进行坐标微分，可以得到沿坐标轴 x, y, z 的场强各分量，

$$X = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m \lambda + h_n^m \sin m \lambda) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \frac{d}{d \theta} \bar{P}_n^m(\cos \theta)$$

$$Y = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \sin m \lambda - h_n^m \cos m \lambda) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \frac{m}{\sin \theta} \bar{P}_n^m(\cos \theta)$$

$$Z = \frac{\partial u}{\partial r} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) (g_n^m \cos m \lambda + h_n^m \sin m \lambda) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \bar{P}_n^m(\cos \theta) \quad (1.1.3)$$

式中 $\bar{P}_n^m(\cos \theta)$ 为缔合勒让德多项式的伴随函数，即准正交的史密特函数。

$$\begin{aligned} \bar{P}_n^m(\cos \theta) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \left[\frac{\epsilon_n (n-m)! (1-x^2)^m}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n \\ &= \left[\frac{\epsilon_n (n-m)! (1-x^2)^m}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (1.1.4) \end{aligned}$$

式中 $x = \cos \theta$ ， $m=0$ 时 $\epsilon_n = 1$ ， $m \geq 1$ 时 $\epsilon_n = 2$ ，

a 为标准参考球半径， $a = 6371.2 \text{ km}$ ，

r 是距地心的径向距离,

θ 是余纬度 ($\theta = 90 - \varphi$, φ 为地理纬度);

λ 是从格林威治向东起算的地理经度。

显然, 如果知道了球谐系数 g_n^m , h_n^m , 就可以由 (1.1.4) 式计算地球表面 ($r = a$) 和外部 ($r > a$) 任一点的地磁要素。而球谐系数 g_n^m , h_n^m 是利用球谐分析方法求得的, 即在地磁场是内源场的假设条件下, 利用全球性的实测资料 (包括资源卫星观测资料), 采用最小二乘拟合的方法求得的。如果考虑地磁场的长期变化, 则还可以得到计算年变率的系数 \dot{g}_n^m 、 \dot{h}_n^m 。表 1.1.1 是 1980—1985 年间国际地磁参考场的高斯球谐系数表。

利用已求得的地磁三要素 X 、 Y 、 Z , 进而可求得其他地磁要素:

$$\text{标量强度 } F = (X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{水平强度 } H = (X^2 + Y^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{磁偏角 } D = \text{tg}^{-1} (Y/X), \quad (1.1.5)$$

$$\text{磁倾角 } I = \text{tg}^{-1} (Z/H);$$

高斯球谐级数各项系数有其一定的物理意义。当 $n = 1, r = a$ 时, 其磁位 u 相当于放在地球的几何中心处的中心偶极子产生的。而其余各项的意义, H·A·乌莫夫曾经给予了解释, 他指出高斯球谐级数中的每一项代表一种所谓多极子的特殊分布产生的磁位, 第二阶项与四极子的磁位相符, 而第三阶项与八极子的磁位相符等等。

对于其他各项的解释, 有人认为地壳场和地核场的分界大约在 $n = 13$, 所以当 $n \leq 12$ 时, 可以认为反映的是地核内部和核幔分界面产生的磁场; 而 $n > 13$ 时, 反映了地球内部场和地壳中磁性岩石产生的磁场的迭加。

以上讨论是把地球看作圆球形, 若考虑地球的扁心率, 在计算球谐系数时就需要把大地坐标变换成为地心坐标。由计算结果可得, 考虑了地球的扁心率, 只对球谐系数有很小的影响, 与不考虑这一因素 (把地球当作圆球, 在地面上 $r = a$) 得到的系数只差几至几十纳特 (nT), 一般在使用误差范围之内。

二、数学处理

由以上讨论可知, 若知道了球谐系数和计算点的地理经纬度, 就可以利用 (1.1.3) (1.1.5) 式来确定该点的地磁要素。为了使史密特函数及其一阶微分式 ($\bar{P}_n^m (\cos \theta)$ 和 $\frac{d}{d\theta} \bar{P}_n^m (\cos \theta)$) 的计算易于在计算机上实现, 特作如下的数学处理:

(一) 计算史密特函数

已知勒让德多项式的函数表示式有:

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n-2k)! (\cos \theta)^{n-2k}}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!}$$

表1·1·1

1980—1985年间IGRF球谐系数

n	m	g_n^m	h_n^m	\dot{g}_n^m	\dot{h}_n^m	n	m	g_n^m	h_n^m	\dot{g}_n^m	\dot{h}_n^m
		n T	n T	n T/年	n T/年			n T	n T	n T/年	n T/年
1	0	-29988	0	22.4	0	8	0	20	0	0.8	0
	1	-1957	5606	11.3	-15.9		1	7	7	-0.2	-0.1
2	0	-1997	0	-18.3	0		2	1	-18	-0.3	-0.7
	1	3028	-2129	3.2	-12.7		3	-11	4	0.3	0
	2	1662	-199	7.0	-25.2		4	-7	-22	-0.8	-0.8
	3	1279	0	0	0		5	4	9	-0.2	0.2
3	1	-2181	-355	-6.5	0.2		6	3	16	0.7	0.2
	2	1251	271	-0.7	2.7		7	7	-13	-0.3	-1.1
	3	833	-252	1.0	-7.9		8	-1	-15	1.2	0.8
	4	938	0	-1.4	0		9	0	6	0	
1	783	212	-1.4	4.6	1	11		-21			
2	398	-257	-8.2	1.6	2	2		16			
3	-410	53	-1.8	2.9	3	-12		9			
4	199	-298	-5.0	0.4	4	9		-5			
5	0	-219	0	1.5	0	5		-3	-7		
	1	357	46	0.4	1.8	6		-1	9		
	2	201	149	-0.6	-0.4	7		7	10		
	3	-74	-150	-3.3	0	8		1	-8		
	4	-162	-79	0.2	1.3	9		-5	2		
	5	-48	92	1.4	2.1	10	0	-3	0		
0	49	0	0.4	0	1		-4	1			
1	65	-15	0	-0.5	2		2	1			
2	42	93	3.4	-1.4	3		-5	2			
3	-192	71	0.8	0	4		-2	5			
4	4	-43	0.8	-1.6	5		5	-4			
6	5	14	-2	0.3	0.6		6	3	-1		
	6	-108	17	-0.1	0		7	1	-2		
	0	70	0	-1.0	0		8	2	4		
	1	-59	-83	-0.8	-0.4		9	3	-1		
	2	2	-28	0.4	0.4	10	0	-6			
	3	29	-5	0.5	0.2						
	4	-13	16	1.6	1.4						
5	1	18	0.1	-0.5							
6	11	-23	0.1	-0.1							
7	-2	-10	0	1.1							

$$\text{其中 } M = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ 为偶数}) \\ \frac{n-1}{2} & (n \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (1.1.6)$$

而缩合勒让德函数的微分形式为:

$$P_n^m(\cos \theta) = (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_n(\cos \theta)$$

将 $P_n(\cos \theta)$ 代入上式可得:

$$\begin{aligned} P_n^m(\cos \theta) &= (\sin \theta)^m \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} \left[\sum_{k=0}^M (-1)^k \frac{(2n-2k)! (\cos \theta)^{n-2k}}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} \right] \\ &= (\sin \theta)^m \sum_{k=0}^M (-1)^k \frac{(2n-2k)! (\cos \theta)^{n-2k-m}}{2^n k! (n-k)! (n-2k-m)!} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

故 (1.1.4) 式的史密特函数可改写为:

$$\begin{aligned} \bar{P}_n^m(\cos \theta) &= \left[\frac{\epsilon_m (n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot P_n^m(\cos \theta) \\ &= \left[\frac{\epsilon_m (n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} (\sin \theta)^m \sum_{k=0}^M (-1)^k \frac{(2n-2k)! (\cos \theta)^{n-2k-m}}{2^n k! (n-k)! (n-2k-m)!} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \epsilon_m = \begin{cases} 2 & (m \geq 1) \\ 1 & (m = 0), \end{cases} \quad M = \begin{cases} \frac{n-m}{2} & (n \text{ 为偶数}) \\ \frac{n-m+1}{2} & (n \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (1.1.8)$$

(二) 计算 $\frac{d}{d\theta} \bar{P}_n^m(\cos \theta)$

已知缩合勒让德函数一次微分的递推公式为:

$$(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^m(x) = (n+m) P_{n-1}^m(x) - n x P_n^m(x)$$

其中 $x = \cos \theta$, 对缩合勒让德函数求 θ 的一次微分需要利用复合函数微分法:

$$\frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) = \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} \cdot \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{d\cos \theta} P_n^m(\cos \theta)$$

代入上述递推公式经整理可得缩合勒让德函数对 θ 求一次微分的递推公式:

$$\frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) = -\frac{1}{\sin \theta} \left[(n+m) P_{n-1}^m(\cos \theta) - n \cos \theta P_n^m(\cos \theta) \right] \quad (1.1.9)$$

而由 (1.1.8) 式可知, 史密特函数与缩合勒让德函数之间仅差一个与 n, m 有关的系数, 所以 (1.1.9) 式的递推公式同样也适用于史密特函数,

有关程序设计见附录一。

§ 1.2 二维幂多项式法

一、方法原理

如果在一个地区进行了地磁场的绝对测量，如地磁台，流动站观测，高精度的航磁连测等，那么就可以用二维幂多项式的方法表示局部地区地磁场的分布。地磁场或它的长期变化的地理分布尽管是复杂的，但总是连续的，可以把它当作地理纬度和经度的函数，用二维幂多项式来表示。

$$\hat{F}(\varphi, \lambda) = a_1 + a_2 \Delta \varphi + a_3 \Delta \lambda + a_4 \Delta \varphi^2 + a_5 \Delta \varphi \Delta \lambda + a_6 \Delta \lambda^2 + a_7 \Delta \varphi^3 + a_8 \Delta \varphi^2 \Delta \lambda + a_9 \Delta \varphi \Delta \lambda^2 + a_{10} \Delta \lambda^3 + \dots \quad (1.2.1)$$

其中 $\hat{F}(\varphi, \lambda)$ 代表某一地点地磁要素的值，

φ, λ 为某一地点的地理纬度和经度，

$$\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0, \quad \Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$$

φ_0, λ_0 为展开原点的纬度和经度。

a_1, a_2, \dots 为待定系数。

二维幂多项式结构简单，使用方便，是表示局部地区地磁场及其长期变化分布的一种常用方法。多项式项数的多少，主要取决于拟合面积的大小及地磁场分布的复杂程度。如果拟合的面积比较小，而且地磁场的分布比较简单，则多项式的项数就比较少；反之，如果拟合的面积比较大，而且地磁场的分布又比较复杂，则多项式的项数就比较多。

下面我们根据地磁场的绝对观测值 $F(\varphi, \lambda)$ 来确定待定系数 a_1, a_2, a_3, \dots 。

利用最小二乘法，在满足观测值 $F(\varphi, \lambda)$ 与估计值 $\hat{F}(\varphi, \lambda)$ 的偏差平方和为最小的条件下求出系数 a_1, a_2, \dots 。

$$Q = \sum_{i=1}^N \left[\hat{F}(\varphi_i, \lambda_i) - F_i \right]^2 \quad (1.2.2)$$

令 Q 对 a_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) 的偏导数等于零，可得多项式系数 a_j 所满足的法方程组。我们以二阶为例来说明。

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^N \left[\hat{F}(\varphi_i, \lambda_i) - F(\varphi_i, \lambda_i) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left[(a_0 + a_1 \varphi_i + a_2 \lambda_i + a_3 \varphi_i^2 + a_4 \varphi_i \lambda_i + a_5 \lambda_i^2) - F(\varphi_i, \lambda_i) \right]^2 \\ \left[\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a_0} &= 2 \sum_{i=1}^N [(a_0 + a_1 \varphi_i + a_2 \lambda_i + a_3 \varphi_i^2 + a_4 \varphi_i \lambda_i + a_5 \lambda_i^2) - F(\varphi_i, \lambda_i)] \\ &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
\frac{\partial Q}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^N [(a_0 + a_1 \varphi_i + a_2 \lambda_i + a_3 \varphi_i^2 + a_4 \varphi_i \lambda_i + a_5 \lambda_i^2) - F(\varphi_i, \lambda_i)] \varphi_i = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=1}^N [(a_0 + a_1 \varphi_i + a_2 \lambda_i + a_3 \varphi_i^2 + a_4 \varphi_i \lambda_i + a_5 \lambda_i^2) - F(\varphi_i, \lambda_i)] \lambda_i = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial a_3} = 2 \sum_{i=1}^N [(a_0 + a_1 \varphi_i + a_2 \lambda_i + a_3 \varphi_i^2 + a_4 \varphi_i \lambda_i + a_5 \lambda_i^2) - F(\varphi_i, \lambda_i)] \varphi_i^2 = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial a_4} = 2 \sum_{i=1}^N [(a_0 + a_1 \varphi_i + a_2 \lambda_i + a_3 \varphi_i^2 + a_4 \varphi_i \lambda_i + a_5 \lambda_i^2) - F(\varphi_i, \lambda_i)] \varphi_i \lambda_i = 0 \\
\frac{\partial Q}{\partial a_5} = 2 \sum_{i=1}^N [(a_0 + a_1 \varphi_i + a_2 \lambda_i + a_3 \varphi_i^2 + a_4 \varphi_i \lambda_i + a_5 \lambda_i^2) - F(\varphi_i, \lambda_i)] \lambda_i^2 = 0
\end{cases}$$

(1.2.3)

写成矩阵:

$$\begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^N 1 & \sum_{i=1}^N \varphi_i & \sum_{i=1}^N \lambda_i & \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 & \sum_{i=1}^N \varphi_i \lambda_i & \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \\
\sum_{i=1}^N \varphi_i & \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 & \sum_{i=1}^N \varphi_i \lambda_i & \sum_{i=1}^N \varphi_i^3 & \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 \lambda_i & \sum_{i=1}^N \varphi_i \lambda_i^2 \\
\sum_{i=1}^N \lambda_i & \sum_{i=1}^N \varphi_i \lambda_i & \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 & \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 \lambda_i & \sum_{i=1}^N \varphi_i \lambda_i^2 & \sum_{i=1}^N \lambda_i^3 \\
\sum_{i=1}^N \varphi_i^2 & \sum_{i=1}^N \varphi_i^3 & \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 \lambda_i & \sum_{i=1}^N \varphi_i^4 & \sum_{i=1}^N \varphi_i^3 \lambda_i & \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 \lambda_i^2 \\
\sum_{i=1}^N \varphi_i \lambda_i & \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 \lambda_i & \sum_{i=1}^N \varphi_i \lambda_i^2 & \sum_{i=1}^N \varphi_i^3 \lambda_i & \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 \lambda_i^2 & \sum_{i=1}^N \varphi_i \lambda_i^3 \\
\sum_{i=1}^N \lambda_i^2 & \sum_{i=1}^N \varphi_i \lambda_i^2 & \sum_{i=1}^N \lambda_i^3 & \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 \lambda_i^2 & \sum_{i=1}^N \varphi_i \lambda_i^3 & \sum_{i=1}^N \lambda_i^4
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
a_0 \\
a_1 \\
a_2 \\
a_3 \\
a_4 \\
a_5
\end{pmatrix}
\begin{matrix}
6 \times 6 \\
6 \times 1
\end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 \\
\varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_N \\
\lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\
\varphi_1^2 & \varphi_2^2 & \dots & \varphi_N^2 \\
\varphi_1 \lambda_1 & \varphi_2 \lambda_2 & \dots & \varphi_N \lambda_N \\
\lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_N^2
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
F_1 \\
F_2 \\
F_3 \\
\vdots \\
F_N
\end{pmatrix}
\begin{matrix}
6 \times N \\
N \times 1
\end{matrix}
\tag{1.2.4}$$

记为 $B^T B a = B^T \cdot F$
 若令 $\underline{G}_i = (1 \ \varphi_i \ \lambda_i \ \varphi_i^2 \ \varphi_i \lambda_i \ \lambda_i^2)^T$
 则 $B^T = (\underline{G}_1, \underline{G}_2, \dots, \underline{G}_N)_{1 \times N}$

$$B^T B = \sum_{i=1}^N \underline{G}_i \cdot \underline{G}_i^T$$

因此方程组也可以表示为

$$\sum_{i=1}^N \underline{G}_i \cdot \underline{G}_i^T \cdot a = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \cdot \underline{G}_i \quad (1.2.5)$$

利用主元消去法解法方程组，容易得到待定系数 a_j ($j = 1, 2, \dots, 6$)。当给定计算点的坐标 λ_i, φ_i 之后，利用(1.2.1)式就可以计算该地区的正常地磁场 $\hat{F}(\varphi, \lambda)$ 。

中国科学院地球物理所曾利用1970—1980年全国地磁普测点、复测点资料，部分航磁资料，以及9个国内地磁台和18个国外地磁台的三分量资料，经过合理筛选，计算了全国的三阶模式。

$$\begin{aligned} I = & 0.9260232492 + 0.1373099586 \times 10^1 \Delta \varphi \\ & - 0.4431916100 \times 10^{-1} \Delta \lambda - 0.1137448784 \times 10^1 \Delta \varphi^2 \\ & - 0.1537202100 \times \Delta \varphi \cdot \Delta \lambda - 0.9183576082 \times 10^{-1} \Delta \lambda^2 \\ & + 0.5627361280 \cdot \Delta \varphi^3 + 0.5648394426 \Delta \varphi^2 \cdot \Delta \lambda \\ & - 0.3563105736 \Delta \varphi \cdot \Delta \lambda^2 - 0.8489259542 \times 10^{-1} \Delta \lambda^3 \text{ (rad)} \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

$$\begin{aligned} H = & 0.3171485384 \times 10^5 - 0.3722365676 \times 10^5 \Delta \varphi \\ & + 0.889923441 \times 10^2 \cdot \Delta \lambda - 0.243350123 \times 10^5 \Delta \varphi^2 \\ & + 0.13054245 \times 10^5 \Delta \varphi \Delta \lambda - 0.476545217 \times 10^4 \Delta \lambda^2 \\ & + 0.13024545 \times 10^5 \Delta \varphi^3 - 0.6894915952 \times 10^3 \Delta \varphi^2 \cdot \Delta \lambda \\ & + 0.2504343722 \times 10^5 \Delta \varphi \Delta \lambda^2 + 0.7804901590 \times 10^3 \Delta \lambda^3 \text{ (nT)} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

利用 I, H 可以计算地磁场的总强度

$$F = H / \cos I \quad (1.2.8)$$

其中 $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0, \Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$; φ_0, λ_0 为展开原点的经纬度，全国三阶模式的 φ_0, λ_0 取为 $\varphi_0 = 36^\circ, \lambda_0 = 106^\circ$

如果有不同时间的地磁场绝对测量值，则还可以用上述同样的方法来计算年度率。这样，任一年的正常地磁场可以表示为

$$F_t = F_{t_0} + \dot{F}_{t_0}(t - t_0) \quad (1.2.9)$$

其中 F_t 表示时间为 t 年的某地磁要素的平均值；

F_{t_0} 表示时间为 t_0 的某地磁要素值；

\dot{F}_{t_0} 表示某地磁要素的长期变化速度，即年变率，单位为 nT/a, (纳特/年), rad/a (弧度/年)；

t 表示欲计算的年份， t_0 表示上述系数计算的年份。例如原计算的系数是用1980.0年

的资料，现在欲计算1982.0年的地磁场，按(1.2.9)式用1980.0年系数计算 \dot{F}_{t_0} ，再减去 $t-t_0=2$ 所引起的长期变化 $\dot{F}_{t_0}(t-t_0)$ 。

1980.0年中国地磁场长期变化的三阶模式是：

$$\begin{aligned} \dot{F}_{t_0} = & -0.9121266552 \times 10^1 - 0.5385856752 \times 10^2 \Delta \varphi \\ & + 0.5051122202 \times 10^2 \Delta \lambda + 0.9934687826 \times 10^2 \Delta \varphi^2 \\ & - 0.8206934322 \times 10^2 \Delta \varphi \Delta \lambda - 0.3161574284 \times 10^2 \Delta \lambda^2 \\ & + 0.2177021142 \times 10^3 \Delta \varphi^3 - 0.362777067 \times 10^3 \Delta \varphi^2 \Delta \lambda \\ & + 0.372614532 \times 10^3 \Delta \varphi \Delta \lambda^2 - 0.9358153102 \times 10^2 \Delta \lambda^3 \text{ (nT)} \quad (1.2.10) \end{aligned}$$

不难分析，二维幂多项式计算正常地磁场的方法就是我们熟知的趋势面分析法，所得到的趋势面即该地区的正常地磁场。在运用该方法时，有一些值得注意的问题。如图1.2.1所示，测区的左下角是没有控制点的空白区，若以已知的二阶趋势值作观测值，当仅以右上角部分的控制点计算二阶模式时，出现了拟合的趋势面略有畸变的现象(见图1.2.2)，左边数值偏低，右边偏高，但是如果测区左下角补以三个控制点(见图1.2.1)，则计算结果有很大改善，其拟合的趋势面同原来的数值。

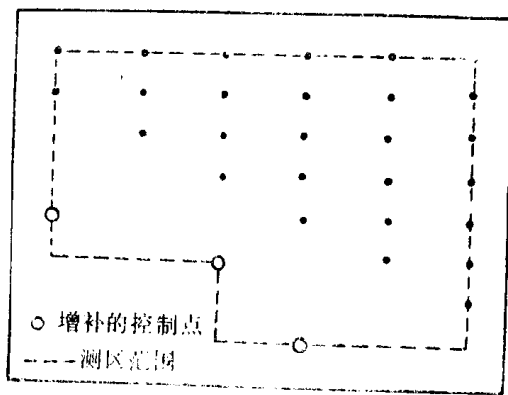


图1.2.1

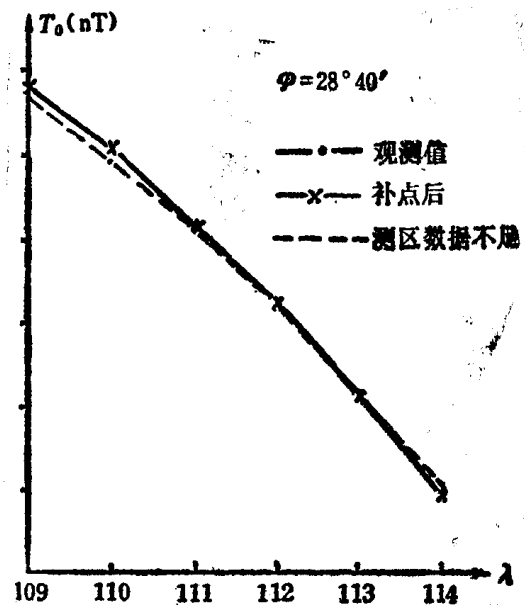


图1.2.2

由以上例子可以看出，趋势面畸变与控制点的分布有关。由线性代数知识可知，当控制点分布得越均匀，正规方程矩阵的条件数就越小，正规方程的解就越稳定。控制点分布最好为网格化，如果控制点分布近于一直线，则能证明正规方程组的系数矩阵可能是降秩的，其条件数可能为无穷大，这样的方程组是严重病态的，必然会使拟合趋势面产生很大的畸变。由于条件限制，控制点分布不均匀是经常碰到的，这时可以根据已有的资料(如理论计算的国际参考场IGRF。)对空白区适当补以少量的控制点，对控制点过密的局部地区亦可删去一些控制点，这样可以保证计算的稳定性和减少畸变。此外，

采用数值稳定性较好的算法解方程，对计算结果也会略有改善。为了减少测区边部的畸变，可以利用邻区的IGRF。理论值把测区扩充。

二、数学处理

(一) G_i 列向量的自动形成

为了方便地在计算机上计算任意阶的二维幂多项式，对(1.2.5)式中的 G_i 列向量，要求程序设计时能根据阶数 P 自动形成。由 i 点的地理坐标($x_i = \Delta \varphi_i, y_i = \Delta \lambda_i$)确定列向量 G_i ：

$$\underline{G}_i = (1, x_i, y_i, x_i^2, x_i y_i, \dots, x_i^p y_i^{p-1}, y_i^p)^T \quad (1.2.11)$$

G_i 列向量由二元变量组成，其向量元素的排列形式如(1.2.11)式，其个数 Q 由阶数 P 确定 [$Q = (P+1)(P+2)/2$]。若将向量的某元素记为 $G_i[x_i, y_i]$ ，则有

$$\begin{aligned} G_i[x_i, y_i] = & [x_i * \text{sign}(K-L) - \text{sign}(K-L) + 1]^{K-L} (y_i * \text{sign}(L) \\ & - \text{sign}(L) + 1)^L \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

其中 sign 为符号函数：

$$\text{sign}(L) = \begin{cases} -1 & L < 0 \\ 0 & L = 0 \\ 1 & L > 0 \end{cases}$$

$$(K = 0, 1, 2, \dots, P), (L = 0, 1, 2, \dots, K)$$

根据(1.2.12)式就可以在计算机上自动实现计算任意阶的二维幂多项式。

(二) 线性方程组的求解

由(1.2.4)式可知线性方程组的坐标变量的系数矩阵是正定对称方阵，因而此方程组的解法可以用多种算法：平方根法，乔累斯基分解法等，本程序采用高斯约当消去法。

§ 1.3 利用二维幂多项式计算局部地区

正常场的实例

在磁法勘探中，通常不研究磁场的总场强度 T ，而是研究 T 与 T_0 的模量差，称 ΔT ($= T - T_0$)。曾用全国三阶模式作为正常场 T_0 来换算 ΔT ，结果在湖南的低纬度部分出现 ΔT 负异常，而在西北部分出现 ΔT 正异常。从湖南地质构造和磁法勘探的观点来看，这样的 ΔT 异常图不好利用和接受。湖南以安化为界，西北属江南地轴，东南属华南褶皱带，应当西北为 ΔT 负值区，南部为正值区(见图1.3.1)。为什么会这种现象呢？这是因为全国三阶模式主要考虑全国大范围的平衡，湖南属弱磁异常区，这种局部地区微弱的差异无法在全国的三阶模式中反映出现。

为此，利用湖南航磁基点网连测切割飞行的57个结点的总场强度 T ，及邻区的10个国际参考场数据计算了二阶及三阶的正常场模式。

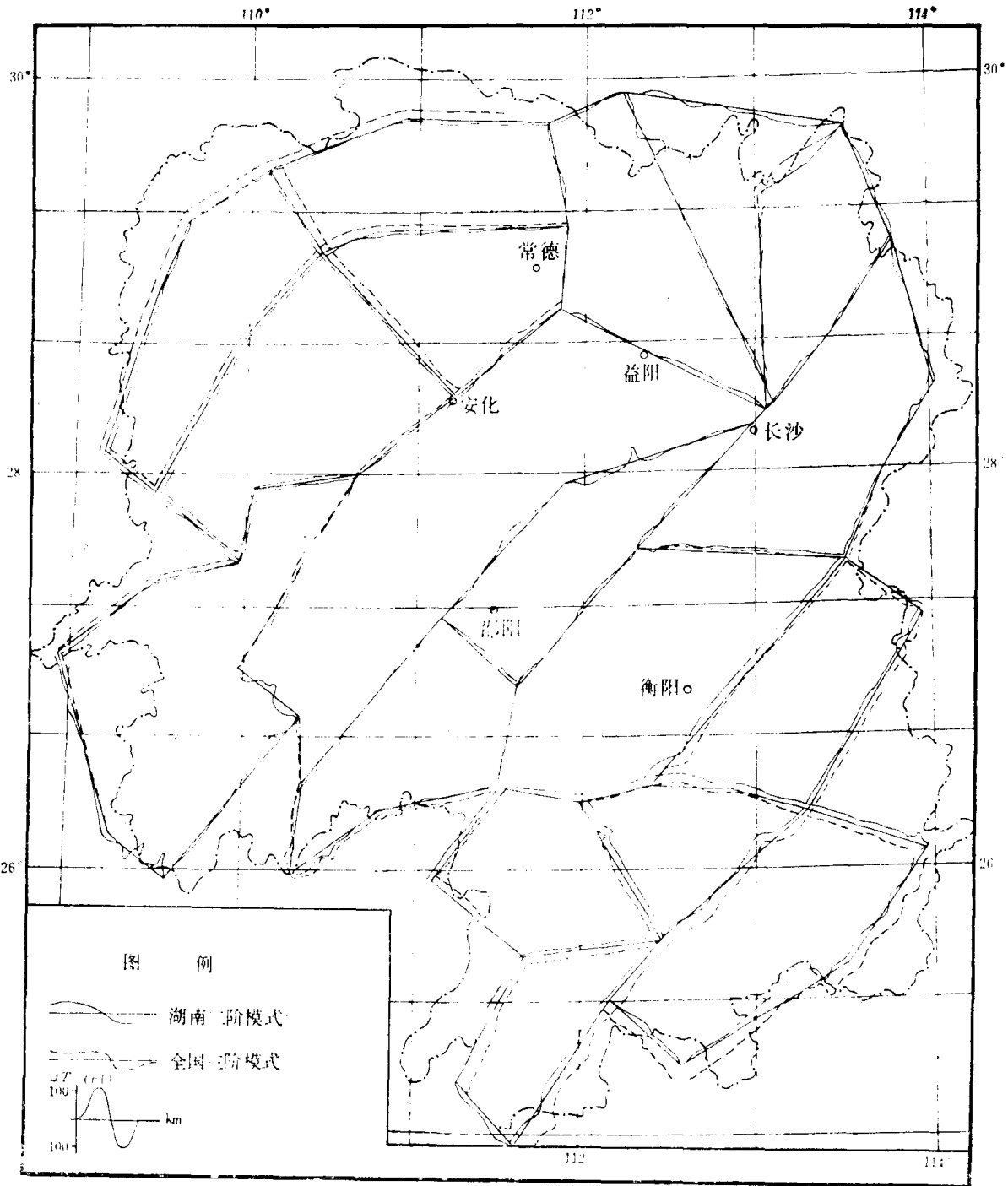


图 1·3·1