

姜 衍 礼 著

理论力学

解题指南

中国农业机械出版社

理论力学解题指南

姜衍礼 著

中国农业机械出版社

理论力学解题指南

姜衍礼 著

*

中国农业机械出版社出版

北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号

重庆印制一厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

*

787×1092 32开 7¹⁴/₁₆印张 173千字

1982年8月北京第一版·1982年8月重庆第一次印刷

印数: 00,001—40,000 定价0.75元

统一书号: 13216·007

前 言

多年来，在理论力学课程的教学工作中，经常听到这样一种说法：学习理论力学的基本理论并不感到太难，但应用这些理论去解题，或用以处理、研究实际问题，却往往难以下手。我们也常看到这样的情况：学生对于直接套用现成公式或模仿书中例题的习题，可以较顺利地进行分析计算；但若习题难度较大，分析比较复杂时，就往往感到困惑甚至束手无策。或者问题本身并不很难，但由于没有正确选择分析问题的方法，而使之难以求解或发生错误。我认为，产生这些情况的一个重要原因，是由于在教学中对学生分析解决问题能力的培养还不很够，学生对某些基本概念和方法的理解不够深入，因而应用不够灵活。要解决这个问题，除应在教材中和教学过程中采取有效措施之外，最好还应创造条件，使学生能在课外围绕课程内容进行比较深入的自学，提高其分析解决复杂问题的能力。本书的编写也就是基于这种状况的一个尝试。

本书的内容，大体上是和现行工科理论力学教学大纲的基本要求一致的。但并不是逐章逐节按大纲编写的。对于一些较简单的易于掌握的章节或内容一律从略。对于一些重要的而且较难的问题，则作了比较详细的讨论。所选的例题，总的来说比一般教材中常见的例题要稍难一些，其目的是为了使学生在学教材的基础上得到进一步的提高。总之，希望这本书能成为供学生课外自学的有益的参考读物，而不是单纯为了查找现成答案的题解。因此，读者在阅读本书之

前，应该先把一般教材中的内容搞懂，并已做过一些基本的习题。这样就会更好地理解 and 掌握本书的内容。

除此之外，本书也可供广大读者自学理论力学参考之用。

振动理论基础一章，虽然也是现行教学大纲中的一个重要部分，但考虑到在这方面读者可以找到不少内容比较深入的参考书，故本书不再列入。

由于水平不高、经验不足，加以成书比较匆促，疏漏不妥之处恐亦不少。希望专家、学者、教师和读者给予批评指正。

编 者

目 录

前 言

第 一 章	受力图.....	1
第 二 章	物体系统的平衡.....	19
第 三 章	考虑摩擦的平衡问题.....	38
第 四 章	空间力系的简化与平衡.....	58
第 五 章	点的运动和刚体基本运动.....	82
第 六 章	点的合成运动.....	102
第 七 章	刚体平面运动.....	116
第 八 章	质点运动微分方程.....	146
第 九 章	质点系动力学普遍定理.....	165
第 十 章	达朗伯原理.....	188
第 十 一 章	虚位移原理.....	209
第 十 二 章	碰撞问题.....	231

第一章 受 力 图

一、概 述

根据计算的要求，全面表示某一物体（或物体系统）受力情况的力学简图，称为该物体（或系统）的受力图。一个正确的、完整的受力图上，应该明确表示出各力的方向和作用位置（至于力的大小，一般不要求在受力图中按比例表示）。画好受力图是对物体（或系统）进行受力和计算的最基本的步骤。

在不同的问题中，对受力图有不同的要求。例如，在几何静力学中，要求在受力图中画出研究对象所受的全部外力，包括全部主动力和约束反力，而内力可以不画。但在分析静力学中（用虚位移原理解静力学问题时），或用动能定理理解动力学问题时，则要求画出所有 做功的力（外力或内力），而不做功的力可以不画。又如，在用达朗伯原理解动力学问题时，要求在受力图上同时画出物体实际所受的外力系，以及它作非平衡运动时的惯性力系。在本章中，我们只着重讨论几何静力学中对受力图的要求和画法。其它的对受力图有不同要求的问题，将在以后各有关章节中加以说明。只要把本章所介绍的有关画受力图的基本方法、步骤搞清楚了，对其它不同类型的受力图的画法，也就不难领会和掌握了。

二、画受力图的要求

要画好受力图，必须了解对受力图的要求，并且深刻理

解为什么要提出这样一些要求，以及如何达到这些要求。现就这一问题说明如下。

1. 画受力图时，必须首先确定研究对象，并将所取研究对象从其周围物体中分离出来，即解除周围物体对它的约束。这是因为，在几何静力学中所建立的力系平衡条件，是力系作用于自由体而使其处于平衡状态的条件。如果所研究的对象是非自由体，就必须将它所受的各种约束，用相应的约束反力来代替，才可以把它看成一个在主动力和约束反力共同作用下的自由体，并应用力系平衡条件求解。这就是所谓解除约束原理。研究对象解除约束后，称为分离体。所以受力图又称为分离体受力图或分离体图。

2. 在研究物体系统的平衡问题时，常需分别取整个系统、系统的某一部分或某一物体为研究对象，即在同一系统中选取多个不同的分离体。这时，受力图应按所选分离体来画，每一分离体必须单独画一受力图，而不要把几个分离体的受力图画在同一个图上。否则，在进一步的分析计算中，就会分不清究竟哪些力属于哪一个分离体，从而引起混乱和错误。

3. 受力图中应画出所取分离体的形状简图，并在其上标明各力的作用位置。不要应用力的可传性及力的平移定理，任意挪动力的作用位置（作用点和作用线在物体上的位置）。一般也不要将某些力分解或合成。这是因为受力图应该反映分离体原有的受力情况，而不是它的等效力系或简化结果。若需将原有力系进行简化或变换为与其等效的另一力系，则应在受力图外另画一图表示之，以资对比。另外，有些时候，需要将物体上所受的某些力进行分解或合成（例如，将力分解后利用合力矩定理计算力矩，或者将分布力用

它的合力来代替等等)，则合力与其分力不要同时画在同一受力图上，以免受力图上出现重复的力。若有必要，可将合力与其分力分别用虚线和实线表示，以示区别。

4. 分离体必须完全解除约束。受力图上不应再画上约束物体或其约束符号（必要时可用虚线表示分离体与约束物体间的相对位置）。每一约束解除后，必须代之以相应的约束反力，不要遗漏。即使在所列平衡方程中不会出现的力（例如取作矩心处的约束反力），也应在受力图中画出，以利于对该力系有一全面了解，并在有关的分析计算中，避免出错。在对分离体进行解除约束时，所加上去的各个约束反力或约束反力偶，都应符合该处约束类型的性质，绝不可随意取舍。

5. 受力图中只画所选分离体受到的外力，而不画分离体内部相互作用的内力（包括内约束力）。这是因为内力总是成对出现的，二者等值、反向、共线，都作用在同一分离体上，因而不会影响该分离体的平衡。故无必要画出。

6. 相关两分离体的受力图中，其相互作用的力必须满足作用与反作用定律。图中应将作用力与其反作用力用方向相反的两矢量来表示，其名称则用同一字母，但一个加撇一个不加撇，例如，若用 F 表示作用力，则用 F' 表示反作用力。但应注意，如果在受力图中已用方向相反的矢量表示作用力与反作用力，则在列平衡方程进行计算时，应该认为此二力的代数值是相同的。例如，若已算出 $F = -3\text{kN}$ ，则其反作用力的大小 $F' = F = -3\text{kN}$ 。

7. 在某些力学简图中，有时会遇到力作用点不很明确的情况。例如图 1-1 中，作用于 C 铰处的集中荷载 P 就是这样。这时，在取分离体画受力图时，应斟酌问题的性质，

适当处理。例如，在求 A、B 处支反力和力偶时，可以把 P 看作是作用于 BC 杆的 C 端，也可以把它看作是作用于 AC 杆的 C 端，其计算结果相同。但若要求两杆在 C 铰处的相互

作用力时，这两种假设便会得出不同的计算结果。此时，只有根据实际结构中力 P 的作用情况来修改简图，否则无法求解。

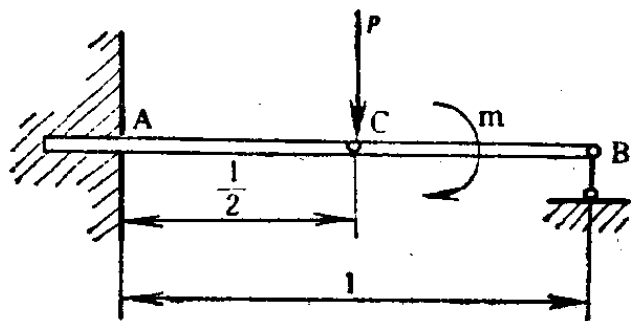


图 1-1

以上各点，就是对受力图的基本要求和应注意的问题。

只要认真领会其意义，并在画受力图时严格按照有关规定去做，就可避免出错。现将画受力图的基本步骤列下：

1. 按照分析计算问题的需要选取研究对象即分离体，画出它的形状简图。
2. 根据给定条件，画出该分离体所受的全部主动力。
3. 逐一解除约束，画出相应的约束反力或力偶。画某一约束的约束反力时，只须考虑该约束的类型和特性，即根据该约束单独作用于物体时，对物体运动可能产生的限制作用，来确定它的约束反力或力偶的作用位置与方向，并用习惯的表示方法来表示。

各约束都已解除并代之以相应的约束反力或力偶之后，应再仔细校核一遍，以防遗漏。

4. 受力图上各力的名称及其作用点，均应以适当的文字符号来表示。

5. 在某些情况下，可以利用三力平衡汇交定理、平行

力系平衡条件等确定某些约束反力的方向。但是这样做是有条件的，不要在任何情况下都加以应用（详见后面例题）。

三、受力图画法举例

【例1-1】 画出图示方块在下列各种受力情况下的受力图（图1-2）。

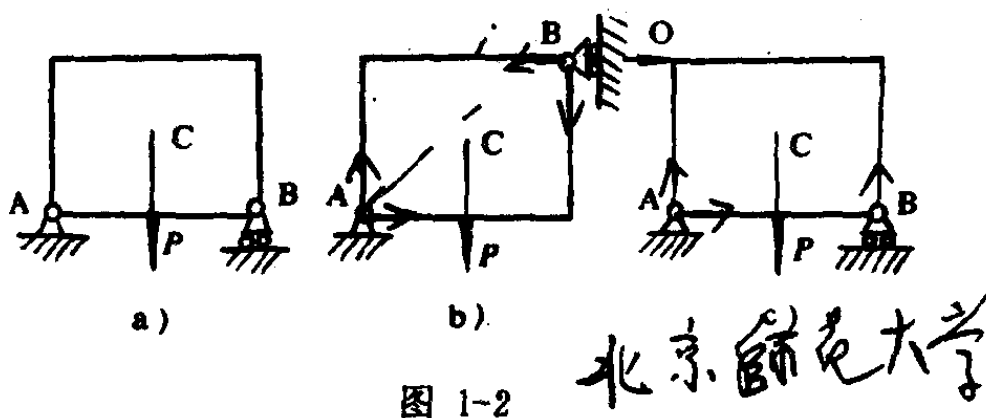


图 1-2

解：情况a)：B点为滚动铰支座，故其约束反力 N_B 与支承面垂直。A点为固定铰支座，故其约束反力过铰中心A点，但方向未定，习惯上用互相垂直的两分力（正交分力） X_A 与 Y_A 来表示（图1-3）。 X_A 有时也可以不画，这是因为根据力系平衡条件 $\sum F_x = 0$ 知 $X_A = 0$ 。不过，当力系比较复杂时，一般不要联系平衡方程来画受力图，以免判断错误。固定铰支座的约束反力的两个分力，还是都在受力图上画出为好。至于它是否为零，留待解平衡方程时再去解决。这样，比较稳妥些。

情况b)：此时受力图可以有两种画法：其中，图1-4a)表示分别单独考虑A、B处的约束类型，画出相应的约束反力。图1-4b)表示先根据B处约束类型，画出该处的约束反力 N_B ，再利用三力汇交定理，确定A处约束反力 R_A 的方向（过A点和P与 N_B 的交点D）。在用解析法（列平衡

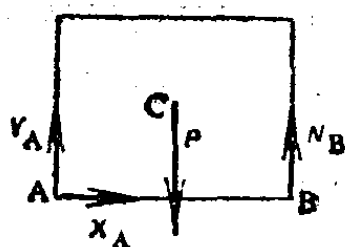
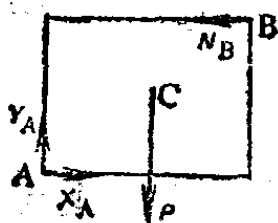
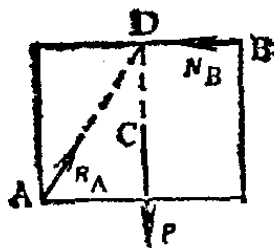


图 1-3



a)



b)

图 1-4

方程) 求解平衡问题时, 多采用前一种画法; 而在用几何法 (特别是图解法) 求解时, 多采用后一种画法。

情况c): 在这种情况下, 只能分别单独考虑 A、B 处的约束类型, 画出相应的约束反力, 如图 1-5 所示。因为此时物体所受之力超过三个, 所以不能应用三力汇交定理确定 A 处约束反力 (合力) 的方向。有人往往想先把已知主动力 P 和 Q 合成为一个力, 再利用三力平衡汇交定理确定 A 处约束反力的方向。但是这样做非常复杂, 不如直接把受力图画成图 1-5 的样子, 再利用平衡方程进行计算来得简便, 故通常不必要那样去做。

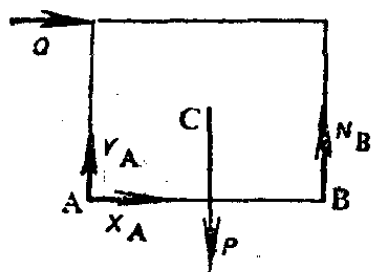


图 1-5

【例1-2】 画出图 1-6 所示几种拱架的受力图。

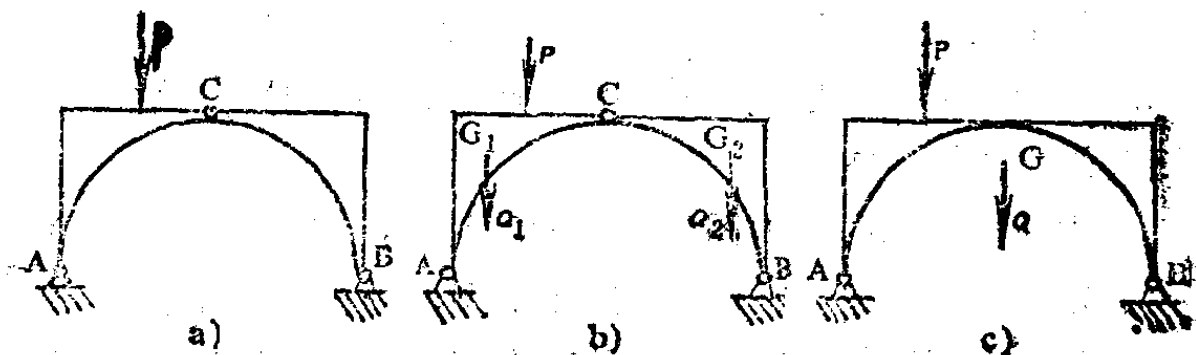


图 1-6

解: 情况a): 其受力图可以有 两种 画法, 如图 1-7 所

示。其中图 1-7a 是一般画法，各个铰链约束的约束反力均用它的两个正交分力来表示。图 1-7b 则是利用 BC 构件的

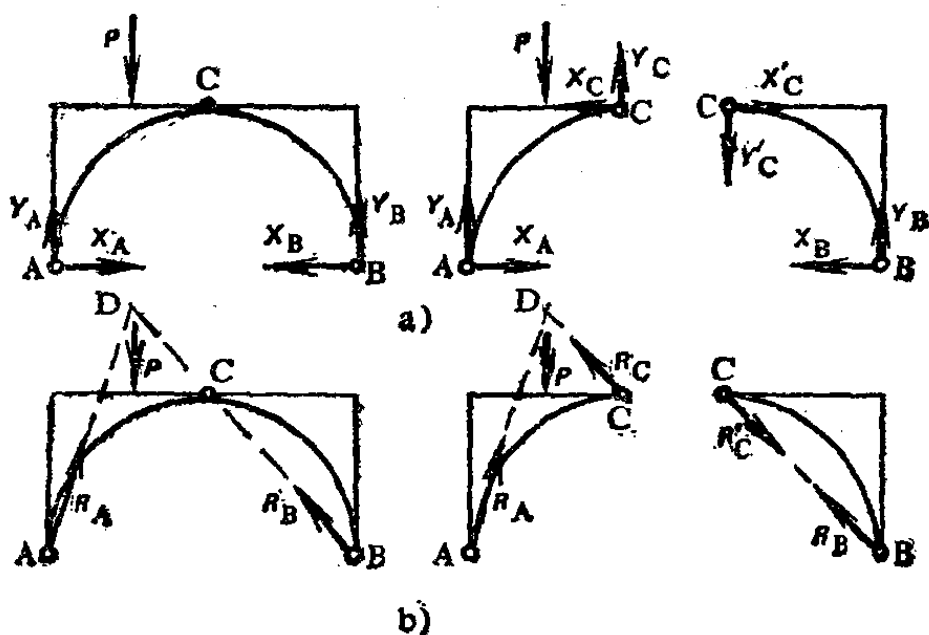


图 1-7

二力平衡条件和 AC 构件的三力平衡汇交条件画成的。如上所说，前一种画法适用于解析法；后一种画法适用于几何法（图解法）。

情况b)：这种情况下，整个拱架或其任何一半（AC 或 BC 构件）的受力图都只能用一般方法来表示各铰链处的约束反力（即用其正交分力来表示）。如图 1-8 所示。此时以采用解析法计算较为合适。

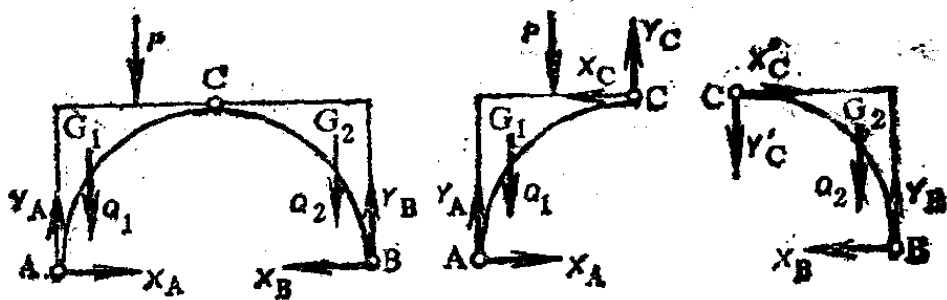


图 1-8

情况c): 这种情况与前面两种情况不同, 它不是三铰拱, 而是两铰拱。它的中间部分没有铰链连接, 因而整个拱架只能看成一个刚体。因此, 无论是铰 A 还是铰 B 的约束反力都不能在进行计算之前预先确定其方向。所以受力图中各铰链处的约束反力只能用其正交分力来表示, 如图 1-9 所示。应该注意, 在这种受力情况下的两铰拱是超静定的 (见物体系统平衡一章), A、B 两处的约束反力的水平分力 X_A 及 X_B , 可以同时增大或减小, 拱架仍可保持平衡。一般地说, X_A 与 X_B 都不等于零。只有当拱架是绝对刚性的, 且

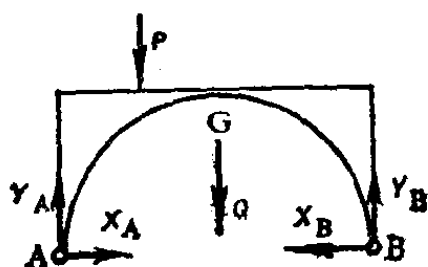


图 1-9

A、B 处均为与光滑水平面接触约束, 或均为沿水平支承面的滚动铰支座, X_A 与 X_B 才等于零。有人认为, 既然主动力 P 、 Q 都是铅垂方向的, 则 A、B 处的约束反力也是铅垂方向的, 这种看法的理由是不充分的。

【例1-3】 画出图 1-10 所示几种支架中 AB 杆和 BC 杆的受力图。

解: 情况a): 可以有三种画法, 示如图 1-11。其中, 图 1-11 a 中各铰链处的约束反力, 都是用它的两个正交分

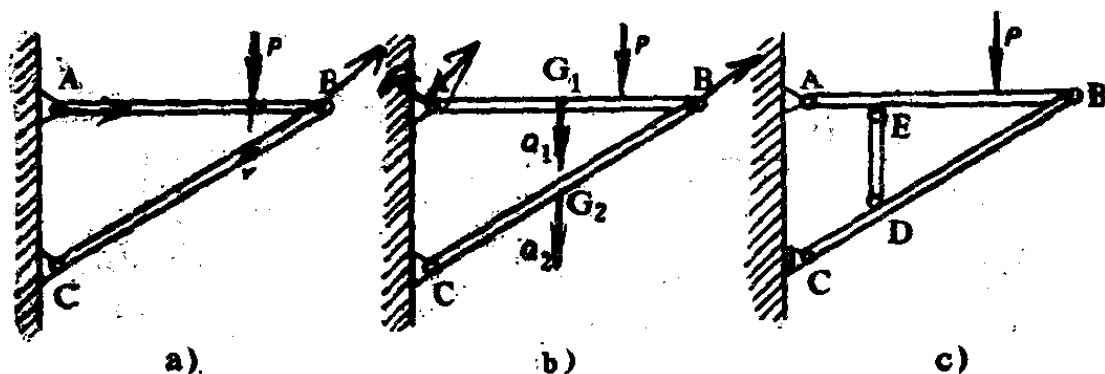


图 1-10

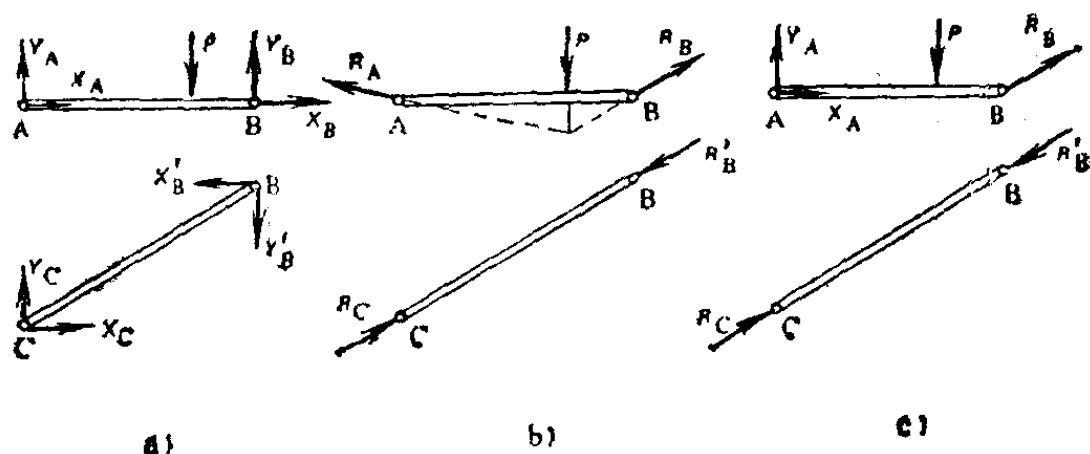


图 1-11

量来表示的。图 1-11b, 先利用 BC 杆是二力杆 (只有 B、C 两点受力而处于平衡) 的特点, 根据二力平衡条件确定了 R_C 与 R'_B 的方向 (二者在一直线即 BC 线上), 然后由作用与反作用定律, 定出 AB 杆上 B 点受力 R_B 的方向 (与 R'_B 共线反向)。最后再根据三力平衡汇交条件, 定出 A 处约束反力 R_A 的方向。图 1-11c 则是以上两种画法的综合应用。AB 杆上 B 点的约束反力是利用 BC 为二力杆的特点而确定其方向的 (R_B 沿 BC 线), 但 A 点的约束反力, 不利用三力汇交条件来确定, 仍采用以两个正交分力来表示的方法。在用解析法进行计算时, 多采用第三种方法。这是因为图中各力的方向, 易于用已知的几何尺寸来表示, 不需要再用其它的计算来确定, 因而在列出平衡方程求解时, 方便得多。

情况 b): 此时 BC 杆已不是二力杆, 所以不能用二力平衡条件画其受力图。各铰链处的约束反力, 只能用一般的方法, 即分解为互相垂直的两个分力的方法来表示。如图 1-12 所示。

情况 c): 由于 DE 杆的存在和 C 处为一滚动铰链支座,

BC杆也不是二力杆。但DE杆可以看作二力杆。所以D、E、C三处的约束反力方向是可以确定的。其余铰链(A和B)处的约束反力则应以两正交分量表示为宜。示如图1-13。

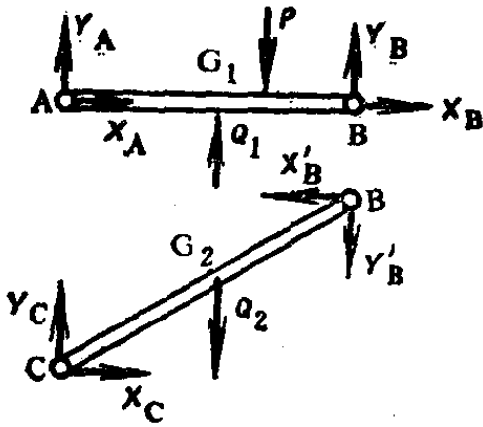


图 1-12

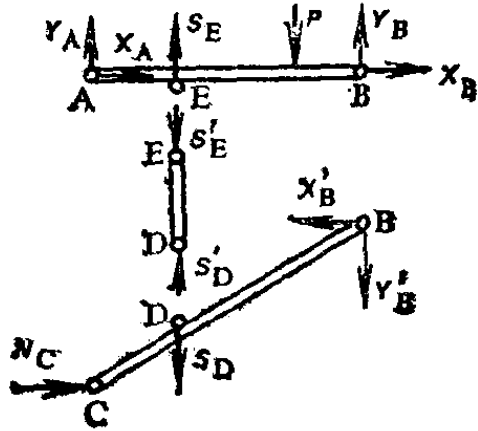
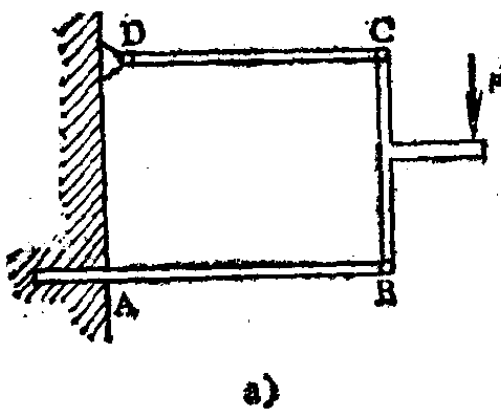


图 1-13

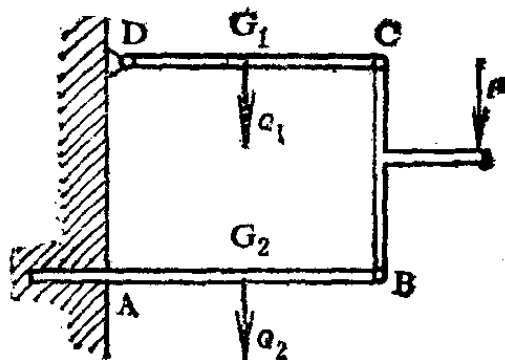
当然，如果取整个支架为分离体，由于只有 P 、 N_C 和A处约束反力(合力) R_A 三个外力作用在支架上，可以利用三力平衡汇交定理求出 R_A 的方向(过A和 P 与 N_C 的交点)。不过，通常用解析法求解本题时，并不需要这样做。

【例1-4】画出图1-14所示支架在两种受力情况下的受力图。

解：情况a)：首先应该正确判定各杆的受力性质。CD



a)



b)

图 1-14

杆是二力杆，但 AB 杆不是二力杆。因为 A 处为刚性固定端约束，其约束反作用需用一个约束反力和一个约束反力偶共同表示。BC 杆也不是二力杆。此支架整体及其各构件的受力图如图 1-15 所示。其中图 1-15a，除 C、D 两处根据

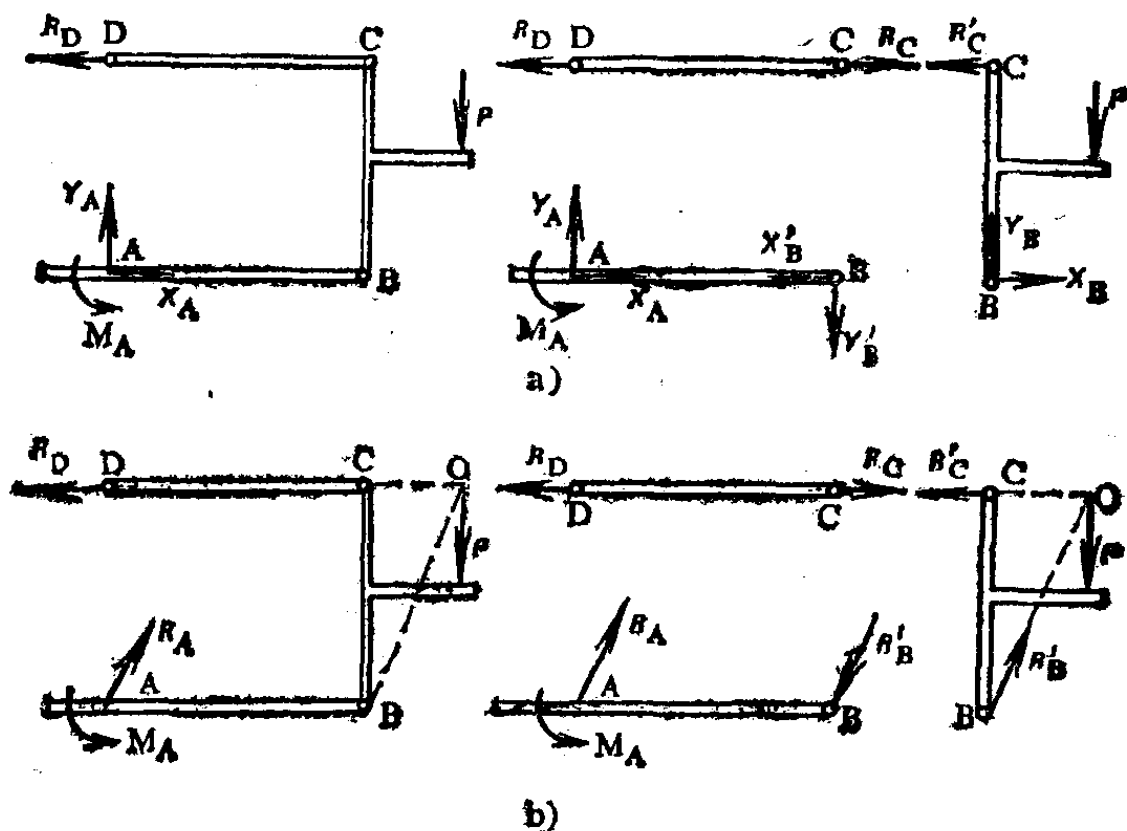


图 1-15

二力杆的受力性质确定其约束反力 R_C 及 R_D 共线反向外，其余各约束反力均按约束类型确定：铰链 B 处约束反力分解为两正交分力来表示，刚性固定端 A 处约束反作用以两分力 X_A 、 Y_A 及一力偶 M_A 来表示。而图 1-15b，则是根据 BC 件的三力平衡汇交条件，定出 R_B 的方向；然后又根据 AB 件的力偶平衡条件 (R_A 与 R_B 必构成一力偶，才能与力偶 M_A 平衡)，定出 R_A 的方向。但应注意，在画整个支架的受力图时，不能直接利用三力平衡汇交条件来确定 A 点约束反力的方向，即 R_A 并不通过 R_D 与 P 的交点 O (见图)。