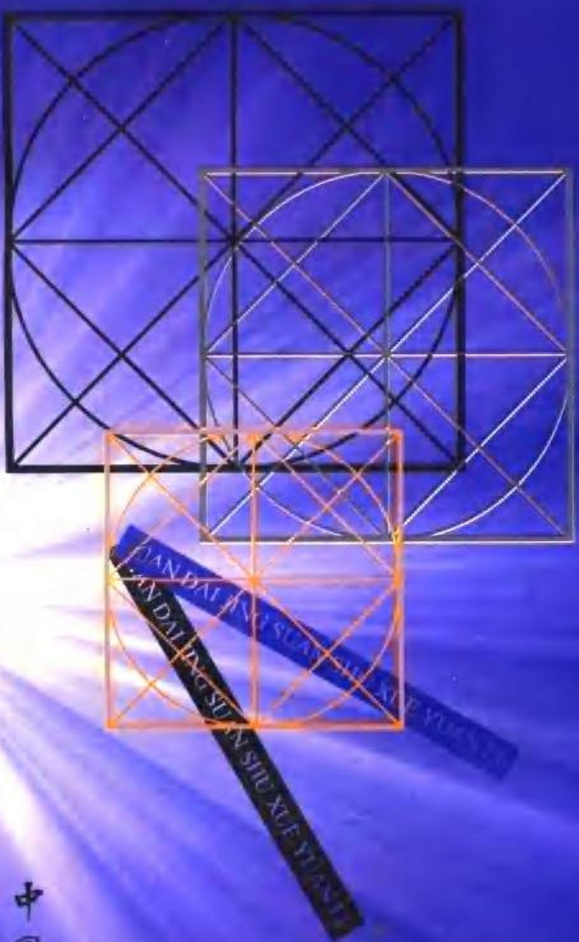
现代精算数学原理



陈典发　石俊志　方辉　编著

中国金融出版社

现代精算数学原理

陈典发　石俊志　方辉　编著

中国金融出版社

责任编辑：王海晔
封面设计：三土图文
责任校对：刘　明
责任印制：裴　刚

图书在版编目(CIP)数据

现代精算数学原理/陈典发等编著. —北京：中国金融出版社，1998.2

ISBN 7—5049—1906—3

Ⅰ.现…

Ⅱ.陈…

Ⅲ.经济数学—理论

Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 00269 号

出版
发行　中国金融出版社

社址　北京广安门外小红庙南里 3 号
邮码　100055
经销　新华书店
印刷　地矿印刷厂
开本　850 毫米×1168 毫米　1/32
印张　3.875
字数　100 千
版次　1998 年 6 月第 1 版
印次　1998 年 6 月第 1 次印刷
印数　1—2000
定价　18.00 元

引 言

精算数学的主要发展源泉和传统应用领域是保险业，它在保险风险管理中的作用举足轻重。近 20 年来，它已从一种特殊的计算方法逐步发展成一门专门的学科，其应用范围正在迅速扩大。特别是由于受现代金融数学（亦称现代金融工程）的影响，精算数学进入了一个新的发展时期；同时，它的一些思想和方法也将对其他金融领域的风险管理产生深刻的影响。我国是人寿保险（包括养老退休基金）业的潜在的巨大市场，在这一产业中，我国独特的人口结构、地域环境和经济发展水平将提出许多复杂的精算问题，它们不可能完全依赖国外现成的理论得到解决，我们将需要一大批各种层次的人致力于精算工作。然而，由于种种原因，目前真正了解这门学科的人还不多，相关的读物也很少。我们写作本书的目的，就是想以尽可能少的篇幅，向读者介绍现代精算数学的基本知识。

与目前现有的精算著作相比较，本书在题材的处理方法上作了新的尝试：我们没有沿袭通常使用剩余寿命（在多流出情形还有流出原因）作为生存模型的方法，而是将一个生命（单个或多原因流出生命，多生命复合生命）定义为满足一定条件的一族随机变数（或称随机过程）。生存模型的这种刻划是现代精算数学中普遍采用的方法。它的好处是可以对许多基本概念给予精确的描述，将一些实际中较复杂的问题的分析和计算变成纯数学的处理，使相关的方法变得更强有力；同时也避免了仅使用一个或两个随机变数描述生存模型所带来的许多尴尬。这种优越性在多原因流出和多生命的复合模型中表现得尤为突出；此外，当考虑随机利率模型时，采用这种描述在计算和分析方面也比较方便。在推导各种计算公式时，我们尽量避免过多地使用传统精算符号。这样做的目的，

是为了减轻读者(特别是初学者)记忆大量符号的负担。实际上,精算数学的严密的符号系统曾给人工计算创造了很大的方便,但在计算机技术已非常普及的今天,过多的符号反而不必要地成为理解一些基本原理的障碍。

阅读本书所应具备的数学知识是微积分和初等概率论,虽然书中使用了随机过程的概念,但读者无需预先具备这方面的知识。我们也不假定读者熟悉保险方面的课程。只有第九章有些特殊,要完全理解这部分内容,需要知道一些有关投资基金的初步知识。

本书的作者们都是精算领域的新介入者,在保险方面也缺乏实际经验,我们借在伦敦可以接触较多精算资料的机会,仓促写成此书,以抛砖引玉。限于时间和水平,书中缺点错误定会不少,恳请读者批评指正。

作　者

1996 年秋于伦敦

目　　录

$$C(1+\frac{di}{365}) \tag{1.1.3}$$

其中 d 为使用本金的实际天数。

复利是单利的对称。采用复利方式计算利息时，按一定期限，将所产生的利息加入本金再计息，逐期滚算，俗称“利滚利”。其计算公式为：

$$C(1+i)^n \tag{1.1.4}$$

如果 时间 n 以年为单位，A_n 为一项借贷交易的到期本利和（或终值），那么，

$A_1=C(1+i)$

$A_2=C(1+i)^2$

$A_3=C(1+i)^3$

……

$A_n=C(1+i)^n$

采用复利方式计算的利息额为：

$$I=C(1+i)^n-C \tag{1.1.5}$$

因此，在借贷期限长，利率高的情况下，采用单利计算方式，借贷资金本利和随时间呈线性增长；采用复利计算方式，借贷资金本利和随时间呈指数增长。

1.2 实际利率和名义利率

1.2.1 **实际利率**(Effective Rate of Interest)

如果用 1 元钱做借贷资金，期限为 1 个时间单位，从时间 t 开始，假如 $1+i(t)$ 是在 $t+1$ 时的还本付息额，那么，我们就称 $i(t)$ 为 t 到 $t+1$ 这一段时间内的实际利率。

假设利率不取决于本金 C 的大小，本金 C 借贷发生于 t 时，到 $t+1$ 时的本息累积额即为：

$$C[1+i(t)] \tag{1.2.1}$$

由此可以推导出，从 0 时到 n 时（其中 n 为正整数），本金 C 的本息累积额：

$$C[1+i(0)][1+i(1)]\cdots\cdots[1+i(n-1)] \qquad (1.2.2)$$

其中，

0 至 1 时，本金为 C；

1 至 2 时，本金为 $C[1+i(0)]$；

2 至 3 时，本金为 $C[1+i(0)][1+i(1)]$；

……

假如每一时间单位上的实际利率都一致，即 $i(t)=i$，公式(1.2.2)就可以写成：

$$C(1+i)^n \qquad (1.2.3)$$

例题 1.2.1

银行存款实际利率为 0.07，两年后下降到 0.06， 4,000 元存款 5 年后的本息累积额为多少？

解：累积额 $=4,000$ 元 $\times(1+0.07)^2\times(1+0.06)^3=5,454.38$ 元

1.2.2 **名义利率**(Nominal Rate of Interest)

如果用 1 元钱做借贷资金，期限为 h 个时间单位，从 t 时刻开始，我们可以定义 h 期限内每个时间单位的名义利率 $i_h(t)$，使得对整个 h 期限而言，实际利率为 $hi_h(t)$。

于是若借贷发生于 t 时，本金为 C，到 $t+h$ 时的本息累积额为：

$$C[1+hi_h(t)] \qquad (1.2.4)$$

若 $h=1$，名义利率与实际利率一致：

$$i_1(t)=i(t)$$

在许多实际运用中，$i_h(t)$ 不依赖于 t，因此，我们可以写：

$$i_h(t)=i_h$$

若 $h=\dfrac{1}{p}$(p 为正整数)，常用 $i^{(p)}$ 来代替 $i_{\frac{1}{p}}$：

$$i^{(p)} = i_{\frac{1}{p}}$$

在这种情况下，本金1元，在任何期限$\frac{1}{p}$都将得到本息累积额：

$$1 + \frac{i^{(p)}}{p}$$

例题1.2.2

纽约银行同业资金拆借利率为：

期限	名义利率
1天	$11\frac{3}{4}$
2天	$11\frac{5}{8}$
7天	$11\frac{1}{2}$
1月	$11\frac{3}{8}$
3月	$11\frac{1}{4}$

计算本金1,000元，期限分别为一周和一个月的本息累积额。

解：根据题意，有：

h：	1/365	2/365	7/365	1/12	1/4
$i_h(t)$：	0.1175	0.11625	0.115	0.11375	0.1125

根据前述公式

$$1{,}000\text{ 元} \times [1 + h i_h(t)]$$

一周的本息累积额为：

$$1{,}000\text{ 元}[1 + \frac{7}{365} \times 0.115] = 1{,}002.21\text{ 元}$$

一个月的本息累积额为：

$$1{,}000\text{ 元} \times [1 + \frac{1}{12} \times 0.11375] = 1{,}009.48\text{ 元}$$

1.3 累积系数和利息力

1.3.1 累积系数(Accumulation Factors)

对 $t_1 \leqslant t_2$,定义 $A(t_1,t_2)$为 1 元钱在 t_1 时发生借贷,到 t_2 时的本息累积额,则

$$A(t,t+h)=1+hi_h(t) \tag{1.3.1}$$

$A(t_1,t_2)$称为累积系数。若本金为 C,在 t_1 时借贷到 t_2 时的本息累积额即为

$$CA(t_1,t_2) \tag{1.3.2}$$

对 $t_o<t_1<t_2$,在本金不变的情况下,累积系数应为 $A(t_o,t_2)$,且有,

$$A(t_o,t_2)=A(t_o,t_1)A(t_1,t_2) \tag{1.3.3}$$

依此类推,

$$A(t_o,t_n)=A(t_o,t_1)A(t_1,t_2)\cdots\cdots,A(t_n-1,t_n) \tag{1.3.4}$$

例题 1.3.1

以年为时间单位,假定对任何 $t_1\leqslant t_2$,有 $A(t_1,t_2)=\exp[0.05(t_2-t_1)]$,求 600 元本金 15 年后的本息累积额。

解:

累积额$=600\exp(0.05\times 15)=1,270.20$ 元

1.3.2 利息力(The Force of Interest)

我们已知累积系数

$$A(t,t+h)=1+hi_h(t)$$

那么,名义利率

$$i_h(t)=\frac{A(t,t+h)-1}{h} \qquad (h>0) \tag{1.3.5}$$

在一定条件下,若 h 不断减少,$i_h(t)$可以趋于一个有限值。这个值的大小一般与 t 有关。

我们假定每一个 t 值有一个 $\delta(t)$满足

$$\lim_{h\to 0} i_h(t)=\delta(t) \tag{1.3.6}$$

$\delta(t)$称为 t 时的利息力。

显然有

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\frac{[A(t,t+h)-1]}{h} \tag{1.3.7}$$

定理 1.1

如果$\delta(t)$和 $A(t_o,t)$是 t 在 $t\geqslant t_o$上的连续函数，则对$t_o\leqslant t_1\leqslant t_2$，

$$\mathbf{A(t_1,t_2)=\exp\left[\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)dt\right]} \tag{1.3.8}$$

证明： 设 $f(t)=A(t_o,t)$，对 $t\geqslant t_o$，有

$$\begin{aligned}\delta(t)&=\lim_{h\to 0}i_h(t)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{A(t,t+h)-1}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{A(t_o,t)A(t,t+h)-A(t_o,t)}{hA(t_0,t)}\\&=\frac{1}{f(t)}\lim_{h\to 0}\frac{A(t_0,t+h)-A(t_0,t)}{h}\\&=\frac{1}{f(t)}\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\\&=\frac{1}{f(t)}f^+(t)\end{aligned}$$

其中 $f^+(t)$表示 f 的右导数。上述结果可以写成

$$\delta(t)f(t)=f^+(t)$$

由于 δ 和 f 都是连续函数，所以 $f^+(t)$也是连续函数。解上述方程得到 $f(t)=\mathrm{C}\,exp\{\int_{t_o}^{t}\delta(s)ds\}$

其中 C 为常数。于是

$$\begin{aligned}A(t_1,t_2)&=A(t_o,t_2)/A(t_o,t_1)\\&=f(t_2)/f(t_1)\\&=\exp\{\int_{t_1}^{t_2}\delta(s)ds\}\end{aligned}$$

现在不难得到

$$i_h(t)=\frac{\exp[\int_t^{t+h}\delta(s)ds]-1}{h} \tag{1.3.9}$$

以上说明了利息力与累积系数、名义利率之间的关系。如果已知利息力 $\delta(t)$，则累积系数 $A(t_1,t_2)$和名义利率 $i_h(t)$即可被上述公式所决定。

例题 1.3.2

设 $\delta(t)=\delta$(δ 为常数)，则

$$A(t_1,t_2)=\exp[\delta(t_1-t_2)]$$

例题 1.3.3

若 $\delta(t)=a+bt$，那么

$$\begin{aligned}A(t_1,t_2)&=\exp[\int_{t_1}^{t_2}(a+bt)dt]\\&=\exp[(at_2+\frac{1}{2}bt_2^2)-(at_1+\frac{1}{2}bt_1^2)]\end{aligned}$$

如果对所有 t，$\delta(t)=\delta$， 那么对 $n>0$，

$$\begin{aligned}A(t_o,t_o+n)&=\exp[\int_{t_0}^{t_o+n}\delta(t)dt]\\&=e^{\delta n}\end{aligned}$$

于是每个时间单位上的实际利率为：

$$i=e^{\delta}-1$$

或

$$e^{\delta}=1+i$$

从而累积系数 $A(t_o,t_o+n)$可以表示为

$A(t_o,t_o+n)=(1+i)^n$

1.4 现值(Present Values)

如果借贷发生在 0 时，到 t 时本息累积额为 C，其中 $t\geqslant 0$，C 在 0 时的贴现值，称为它在 $t=0$ 时的现值(Discounted Present

Value)，简称现值。

在此情况下的借贷金额，即现值应为 $C/A(0,t)$，可以写成：

$$C\ \exp\left[-\int_0^t \delta(s)ds\right] \tag{1.4.1}$$

我们用 $V(t)$ 表示累积额 C 到 t 时为 1 的情况下，在 0 时的现值，则：

$$V(t)=\exp\left[-\int_0^t \delta(s)ds\right] \tag{1.4.2}$$

当 $t\geqslant 0$ 时，$V(t)$ 即是累积额 C 到 t 时为 1 情况下在 0 时的贴现值。当 $t<0$ 时，因为

$$\int_0^t \delta(s)ds = -\int_t^0 \delta(s), V(t) \tag{1.4.3}$$

$V(t)$ 即成为从 t 到 0 时的累积额。

综上所述，在非负时间 t 累积额为 C 的现值是 $CV(t)$

例题 1.4.1 (1.4.4)

假定对任何时间 t，$\delta(t)=0.06(0.9)^t$，试求 100 元在 3.5 年前的现值。

$$解：V(t)=\exp\left[-\int_t^0 0.06(0.9)^s ds\right]$$

$$=\exp[-0.06(0.9^t-1)/ln(0.9)]$$

3.5 年前 100 元的现值为：

$$100\exp[-0.06(0.9^{3.5}-1/ln(0.9)]=83.89 元$$

2. 生存模型及生命表

每一种保险合同(亦称保单)都涉及到两列资金流:投保人分期(或一次性)交付的保险费,和保险公司偿付给被(投)保险人的保险金及各种费用支出。精算数学的一个基本任务,就是计算这些资金流在不同时刻的时间值。与第一章中各种复利计算不同的是,我们这里所涉及到的款项支付,是以某个或某些随机事件的发生为前提的,这些随机事件大多以被保险人处于某种特定的状态(如生或死等)为条件,因此在对一个保单进行有关计算之前,必须对可能涉及的随机事件的性质进行分析,求出相关的各种概率。为此,必须首先建立相应的数学模型。

本章将从一种最简单、同时应用最广泛的模型开始,首先假定所有的随机事件都是由被保险人的生或死决定,且被保险人为单个人。我们将建立其生存模型,然后介绍计算有关概率的一个表——生命表,它们是以后各种计算的基础。

2.1 基本生存模型

我们用一个概率空间(Ω,F,P)来表示人生存死亡的不确定性。其中Ω为所有可能结果的全体,F表示所有随机事件全体,P给出各种事件的概率。今后所讨论的各种随机事件和随机变数都是定义在此空间上的。

考虑一个现在x岁的人未来的生存情况,由于我们所感兴趣的仅是此人未来"生"和"死"两种状态,因此可用0和1来分别表示,即0表"活着"(或生存),1表"死亡"。用X_t^x来表示"现在x岁