

目 次

1. 倒排相加.....	1
2. 化差求和.....	4
3. 妙用非负数.....	9
4. 奇偶识别法.....	16
5. 约数简易判定法.....	21
6. 神奇的配方法.....	25
7. 巧分二元二次多项式.....	30
8. 判别式的功能.....	37
9. 韦达定理的活用.....	45
10. 巧解无理方程.....	57
11. 化难为易的换元法.....	66
12. 化繁为简的降次法.....	75
13. 特殊二次方程组的特殊解法.....	80
14. 解方程组的特技.....	86
15. 比值法.....	91
16. 巧用比例.....	97
17. 大小比较法.....	104

18. 解对数题的技巧	109
19. 首末位数字的估算法	114
20. 特殊三角比	119
21. 累积法	124
22. 涂色法	129
23. 抽屉原理	134
解答	139

1. 倒排相加

怎样计算： $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ 。

连加太繁。数学王子高斯 (Gauss) 10岁那年就发明了一种极为简捷的方法，速度之快连他的老师也赞叹不已。

高斯的诀窍

$$\begin{array}{r} \text{将} \qquad \qquad \qquad 1 + 2 + \cdots + 99 + 100 \\ \text{倒排} \qquad \qquad \qquad 100 + 99 + \cdots + 2 + 1 \\ \text{竖加得} \qquad \qquad \qquad \hline \qquad \qquad \qquad 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 \\ \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 100\text{个} \end{array}$$

所以 $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = (100 \times 101) \div 2 = 5050$ 。

真妙！有人将这种方法概括为“倒排相加法”。

前 n 个自然数之和

今用上面的方法将上述问题推广到任意自然数 n 。

计算： $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$

将上式倒排 $n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$

两式竖加

$$\underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n\text{个}} = n(n+1),$$

所以 $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ 。 (1)

上述公式(1)称为“前 n 个自然数之和”。

[例 1] 计算： $1+2+3+\cdots+1000$ 。

解：利用上述公式(1)，这里 $n=1000$ ，故

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \times 1000 \times (1000 + 1) = 500500。$$

前 n 个正奇数之和

正奇数 $1, 3, 5, \cdots$ 可以编序，第 n 个正奇数为 $2n-1$ 。

计算： $1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)$ 。

仍用倒排相加法，将上式倒排为

$$(2n-1) + (2n-3) + \cdots + 5 + 3 + 1。$$

两式竖加， $2n+2n+\cdots+2n+2n$

$$= 2n \cdot n = 2n^2$$

所以 $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ 。 (2)

上述公式(2)称为“前 n 个正奇数之和”。

[例 2] 计算： $1+3+5+\cdots+99$ 。

解：利用公式(2)，这里 $n=50$ ，故

$$\text{原式} = 50^2 = 2500。$$

前 n 个正偶数之和

正偶数 $2, 4, 6, \cdots$ 也可编序为第1个，第2个，第3个， $\cdots$ 第 n 个正偶数是 $2n$ 。

计算： $2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n$ 。

仍用倒排相加法，上式倒排为

$$2n + (2n-2) + \cdots + 4 + 2。$$

两式竖加得

$$(2n+2) + (2n+2) + \cdots + (2n+2) + (2n+2) \\ = n \cdot (2n+2) = 2n(n+1),$$

所以 $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$ 。 (3)

上述公式 (3) 称为“前 n 个正偶数之和”。

[例 3] 计算 $100+102+104+\cdots+1000$ 。

解：先算 $2+4+6+\cdots+98$ 。利用公式 (3)，这里 $n=49$ ，故 $2+4+6+\cdots+98=49 \times (49+1)=2450$ 。

再算 $2+4+\cdots+98+100+102+\cdots+1000$ 。再用 (3) 式，这里 $n=500$ ，故 $2+4+6+\cdots+1000=500 \times (500+1)=250500$ 。两式相减

$$\begin{aligned} & 100+102+104+\cdots+1000 \\ &= (2+4+\cdots+98+100+102+\cdots+1000) - \\ & \quad - (2+4+\cdots+98) \\ &= 250500 - 2450 = 248050. \end{aligned}$$

练 习

试用倒排相加法直接计算：

1. $1949+1950+1951+\cdots+1989$ 。
2. $101+103+105+\cdots+199$ 。
3. $100+102+104+\cdots+1000$ 。

2. 化差求和

怎样计算： $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10}$ 。

先通分，数目太大；先化小数，再相加，除法又太繁。
向你介绍一种巧妙的算法——化差求和法。

交叉相消

请看

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

.....

$$\frac{1}{9 \times 10} = \frac{1}{9} - \frac{1}{10}.$$

将这些等式统统加起来，右侧许多分数交叉相消了，只剩下
“头”和“尾”，所以

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{9 \times 10} = \frac{1}{1} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

多么简单呀！