# 目 次

# 1. 倒排相加

怎样计算：$1+2+3+\cdots\cdots+100$。

连加太繁。数学王子高斯（Gauss）10岁那年就发明了一种极为简捷的方法，速度之快连他的老师也赞叹不已。

## 高斯的诀窍

$$
\begin{array}{ll}
\text{将} & 1+2+\cdots\cdots+99+100 \\
\text{倒排} & \underline{100+99+\cdots\cdots+2+1} \\
\text{竖加得} & \underbrace{101+101+\cdots\cdots+101+101}_{100\text{个}}
\end{array}
$$

所以 $1+2+3+\cdots+100=(100\times101)\div2=5050$。

真妙！有人将这种方法概括为"倒排相加法"。

## 前n个自然数之和

今用上面的方法将上述问题推广到任意自然数$n$。

$$
\begin{array}{ll}
\text{计算：} & 1+2+\cdots+(n-1)+n \\
\text{将上式倒排} & \underline{n+(n-1)+\cdots+2+1}
\end{array}
$$

两式竖加

$$\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\text{个}}=n(n+1),$$

所以 $1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{1}{2}n(n+1)$。 (1)

上述公式(1)称为“前$n$个自然数之和”。

［例 1］ 计算：$1+2+3+\cdots+1000$。

**解**：利用上述公式(1)，这里$n=1000$，故

$$原式=\frac{1}{2}\times1000\times(1000+1)=500500。$$

## 前n个正奇数之和

正奇数1，3，5，…可以编序，第$n$个正奇数为$2n-1$。

计算：$1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)$。

仍用倒排相加法，将上式倒排为

$$(2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3+1。$$

两式竖加，$2n+2n+\cdots+2n+2n$

$$=2n\cdot n=2n^2$$

所以
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2。\tag{2}$$

上述公式（2）称为“前$n$个正奇数之和”。

［例 2］ 计算：$1+3+5+\cdots+99$。

**解**：利用公式(2)，这里$n=50$，故

$$原式=50^2=2500。$$

## 前n个正偶数之和

正偶数2，4，6，…也可编序为第1个，第2个，第3个，…第$n$个正偶数是$2n$。

计算：$2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n$。

仍用倒排相加法，上式倒排为

$$2n+(2n-2)+\cdots+4+2。$$

两式竖加得

$$(2n+2)+(2n+2)+\cdots+(2n+2)+(2n+2)$$
$$=n\cdot(2n+2)=2n(n+1),$$

所以 $$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)。\tag{3}$$

上述公式（3）称为"前$n$个正偶数之和"。

［例 3］ 计算 $100+102+104+\cdots+1000$。

**解**：先算$2+4+6+\cdots+98$。利用公式(3)，这里$n=49$，故$2+4+6+\cdots+98=49\times(49+1)=2450$。

再算$2+4+\cdots+98+100+102+\cdots+1000$。再用(3)式，这里$n=500$，故$2+4+6+\cdots+1000=500\times(500+1)=250500$。两式相减

$$100+102+104+\cdots+1000$$
$$=(2+4+\cdots+98+100+102+\cdots+1000)-$$
$$-(2+4+\cdots+98)$$
$$=250500-2450=248050。$$

## 练 习

试用倒排相加法直接计算：

1．$1949+1950+1951+\cdots+1989$。

2．$101+103+105+\cdots+199$。

3．$100+102+104+\cdots+1000$。

## 2. 化差求和

怎样计算： $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{9\times10}$。

先通分，数目太大；先化小数，再相加，除法又太繁。向你介绍一种巧妙的算法——化差求和法。

### 交叉相消

请看

$$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

………………

$$\frac{1}{9\times10}=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}。$$

将这些等式统统加起来，右侧许多分数交叉相消了，只剩下“头”和“尾”，所以

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{9\times10}=\frac{1}{1}-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}。$$

多么简单呀！